

מבחן - 581

בחירה: ארבע שאלות מהשאלות 1-8.

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. בבית מלון יש שתי מעליות, מעלית א ומעלית ב. שתי המעליות התחילו לעלות מקומת הקרקע (גובה 0) באותו זמן. מעלית א עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 14 שניות, ולאחר מכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים. מעלית ב עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 7 שניות, ולאחר מכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה 81 מטרים. מעלית א הגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים בדיוק באותו זמן שבו הגיעה מעלית ב לקומה שגובהה 81 מטרים. לאחר מכן התחילו שתי המעליות לרדת בדיוק באותו הזמן. מעלית א ירדה 15 מטרים, ובדרכה עצרה עצירת ביניים, שנמשכה 9 שניות. בזמן שירדה מעלית א, ירדה מעלית ב 63 מטרים ברציפות, ללא עצירת ביניים. ידוע כי המהירות של כל אחת מן המעליות בעליה שווה למהירות של כל אחת מהן בירידה, וכן שהמעליות נעות במהירויות קבועות. **א.** חשב את המהירות של כל אחת משתי המעליות. מעלית א היתה בקומת הקרקע של בית המלון, ואילו מעלית ב היתה בקומה הנמצאת מַעַל קומה שגובהה 42 מטרים. שתי המעליות התחילו לנוע באותו זמן לכיוון הקומה שגובהה 42 מטרים. מעלית א עלתה לקומה זו מקומת הקרקע ללא עצירת ביניים. מעלית ב ירדה לקומה זו מן הקומה שבה היא היתה ובדרכה עצרה עצירת ביניים אחת, שנמשכה 6 שניות. שתי המעליות הגיעו לקומה שגובהה 42 מטרים בדיוק באותו הזמן. **ב.** האם מעלית ב היתה בקומה העליונה של בית המלון כאשר היא התחילה לרדת? נמק.

אתה יכול להיות סוציאליסט עד שנגמר לך הכסף של אחרים
(מרגארט תאצ'ר, ראש ממשלת בריטניה, 1925-2013)

תשובות

1. **א.** א: 3 m/sec , ב: 4.5 m/sec . **ב.** לא

2. נתונה סדרה a_n שסכום n איבריה הראשונים, לכל n טבעי, הוא: $S_n = k \cdot n^2 - p \cdot n$ ($p > 0$ ו- $k > 0$ פרמטרים).

- א. (1) הבע את האיבר הכללי של הסדרה באמצעות k , p ו- n עבור $n \geq 2$.
 (2) הנוסחה שמצאת בתת-סעיף א(1) נכונה עבור כל n טבעי. הסבר מדוע.
 (3) הוכח כי הסדרה היא סדרה חשבונית והבע את d , הפרש הסדרה, באמצעות k .

נתונות שתי סדרות הנדסיות b_n ו- c_n .
 מנת הסדרה b_n שווה ל- d (הפרש הסדרה החשבונית a_n).
 הסדרה c_n היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה שווה ל- $\frac{2}{d}$.
 נתון: $a_1 = b_1 = c_1$, $p = 4.5$, $k = 1.5$.
 ב. הסבר מדוע הסדרה c_n היא סדרה מתכנסת.

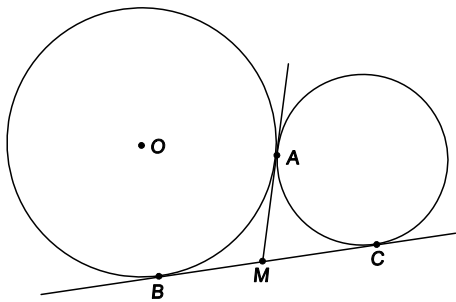
נתון כי היחס בין סכום m האיברים הראשונים של הסדרה b_n ובין סכום כל איברי הסדרה האינסופית c_n הוא $40\frac{1}{3}$.
 ג. חשב את m .
 ד. האם הסדרה c_n היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת? נמק.

3. בבית ספר תיכון גדול מאוד, מספר התלמידים גדול פי 9 ממספר המורים.
 בבית הספר נערך סקר שהשתתפו בו כל המורים והתלמידים בבית הספר, והם בלבד. המשתתפים בסקר נשאלו אם הם נבדקו לגילוי קורונה.
 נמצא כי 80% מן המורים בבית הספר נבדקו לגילוי קורונה.
 נמצא גם כי $\frac{13}{15}$ מכלל המשתתפים בסקר (מורים ותלמידים), שנבדקו לגילוי קורונה, היו תלמידים.
 א. מהי ההסתברות שמבין כלל משתתפי הסקר ייבחר באקראי תלמיד שלא נבדק לגילוי קורונה?
 בחרו באקראי בזה אחר זה 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר.
 ב. מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נבדקו לגילוי קורונה?
 ג. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות אחד נבדק לגילוי קורונה.
 מהי ההסתברות שלפחות 4 מן המשתתפים שנבחרו נבדקו לגילוי קורונה?
 ד. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 2 נבדקו לגילוי קורונה.
 מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר נבדק לגילוי קורונה?

תשובות

2. א. (1) $a_n = 2kn - k - p$ (3) $d = a_{n+1} - a_n = 2k$ ב. $|q_{c_n}| = \frac{2}{3} < 1$ ג. $m = 5$ ד. עולה
 3. א. $P = 0.38$ ב. $P = 0.33696$ ג. $P = \frac{351}{1031} = 0.3404$ ד. $P = 0.4$

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A.

הנקודה O היא מרכז המעגל השמאלי.

מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים.

B ו- C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף,

המשיק לשני המעגלים.

שני המשיקים נחתכים בנקודה M.

א. הוכח כי הזווית $\angle BAC$ ישרה.

ב. הוכח כי $4 \cdot AM^2 = AC^2 + AB^2$.

נתון: $AB = 8$, $AC = 6$.

ג. חשב את רדיוס המעגל שמרכזו הוא בנקודה O.

ד. חשב את יחס השטחים $S_{\triangle OBM} : S_{\triangle AMC}$.

5. DB ו- DC משיקים למעגל שמרכזו O.

R הוא רדיוס המעגל.

המשך BD חותך את המשך OC בנקודה A.

הקטע OD והמיתר BC נחתכים בנקודה M.

הקטע CE מאונך ל- AB. $\angle ABC = \alpha$.

א. הסבר מדוע אפשר לחסום במעגל:

(1) את המרובע OBDC.

(2) את המרובע MDEC.

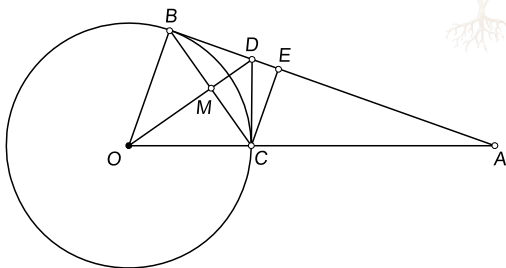
d_1 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע OBDC.

d_2 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע MDEC.

d_3 הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש AOD.

ב. הבע באמצעות α ו- R את d_1 , את d_2 ואת d_3 .

ג. מצא את הערך של α שעבורו מתקיים: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$.



תשובות

4. ג. $R_O = OA = 6\frac{2}{3}$ (יחידות אורך). ד. $S_{\triangle OBM} : S_{\triangle AMC} = \frac{25}{18}$.

5. ב. $d_1 = \frac{R}{\cos \alpha}$, $d_2 = R \tan \alpha$, $d_3 = \frac{R}{\cos \alpha \cos 2\alpha}$ (יחידות אורך). ג. $\alpha = 30^\circ$.

פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות שורש, פונ' רציונליות ופונ' טריגונומטריות

6. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x}{(x^2-2)^2}$ ו- $g(x) = \frac{x}{(x^2-2)^3}$.

א. ענה על תתי הסעיפים (1)-(4) עבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) הראה כי לפונקציה אין נקודות קיצון.

(4) הוכח כי הפונקציה אי-זוגית.

ב. (1) הגרף הנתון מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$ או $g(x)$.

קבע איזו מן הפונקציות מתאר הגרף. נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.

נתונה הפונקציה $h(x)$ המקיימת: $h'(x) = f(x)$.

$f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העליה והירידה של $h(x)$?

ד. חשב את:

$$(1) \int_{-1}^1 f(x) dx \quad . \text{נמק.}$$

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר x והישרים $x = 1$ ו- $x = -1$.

נתונה הפונקציה $k(x) = f(x) + b$, $b \neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק.

"Britain and France had to choose between war and dishonour.

They chose dishonour. They will have war"

("בריטניה וצרפת צריכות היו לבחור בין מלחמה לבין חרפה. הם בחרו בחרפה. הם יקבלו מלחמה").

וינסטון צ'רצ'יל (1874-1965), על הסכם מינכן (1938). זה באמת מה שהיה.

את ההסכם 'השיג' מהיטלר יש'ו ראש ממשלת בריטניה בזמנו **נוויל צ'מברליין** (1869-1940).

חצי שנה לאחר פרוץ מלחמת העולם השנייה נאלץ להתפטר.

צ'רצ'יל החליף אותו בתפקיד וניהל את המלחמה עד למיגורה של החיה הנאצית.

תשובות

6. א. לשתי הפונקציות: (1) $x \neq \pm\sqrt{2}$ (2) $x = \pm\sqrt{2}, y = 0$ ב. (1) $f(x)$

ג. $\downarrow: (0 < x < \sqrt{2}) \cup (x > \sqrt{2})$, $\uparrow: (x < -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2} < x < 0)$

ד. (1) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ (2) $S = \frac{1}{2}$ (יחידה ריבועית) ה. לא זוגית ולא אי-זוגית

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 - 4a}}{x^3}$, $a > 0$ פרמטר.

בסעיפים א-ה, בטא תשובותיך באמצעות a , לפי הצורך.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. הוכח שהפונקציה $f(x)$ איזוגית.

ג. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ה. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$, אם יש כאלה?

ידוע כי בכל אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$,

יש לגרף של $f(x)$ ולגרף של $g(x)$ משיק משותף.

ו. (1) הוסף לסרטוט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקולידך.

(2) מהו הערך של הפרמטר a ? נמק.

8. במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a . $\angle BAC = \alpha$ (ברדיאנים).

נסמן: $\angle ABC = x$ ($0 < x < \pi - \alpha$).

א. הבע באמצעות x , a ו- α את היקף המשולש ABC .

ב. הבע באמצעות α את ערך x שעבורו היקף המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. הסבר מדוע הטענה הבאה נכונה:

מכל המשולשים בעלי צלע נתונה וזווית מולה נתונה,

המשולש בעל ההיקף המקסימלי הוא משולש שווה-שוקיים.

בהצלחה

זכות היצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

תשובות

7. א. $(x \leq -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}) \cup (x \geq \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}})$

ג. (1) $(\pm \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}, 0)$ (2) $\max(\sqrt{2a}, \frac{1}{2a})$ $\min_{ep.}(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}, 0)$ $\max_{ep.}(-\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}, 0)$ $\min(-\sqrt{2a}, -\frac{1}{2a})$

ה. (1) $(x < -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}) \cup (x > \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}})$ (2) $x = \pm \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$ (3) $a = \frac{1}{2}$

8. א. $P_{\triangle ABC} = a + \frac{a \sin x}{\sin \alpha} + \frac{a \sin(\alpha+x)}{\sin \alpha}$ ב. $x = \frac{\pi-\alpha}{2}$

פתרון - 581

1. א. סימון: x - מהירות מעלית א (A), y - מהירות מעלית ב (B)

	V	T	S	
A: $0_m \rightarrow 33_m$	x	$\frac{33}{x} + 14$	33	$\Rightarrow (I) \quad \frac{33}{x} + 14 = \frac{81}{y} + 7 \Rightarrow 81x - 33y = 7xy$
B: $0_m \rightarrow 81_m$	y	$\frac{81}{y} + 7$	81	
A: $33_m \rightarrow 18_m$	x	$\frac{15}{x} + 9$	15	$\Rightarrow (II) \quad \frac{15}{x} + 9 = \frac{63}{y} \Rightarrow 63x - 15y = 9xy$
B: $81_m \rightarrow 18_m$	y	$\frac{63}{y}$	63	

$$\frac{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{81x - 33y}{63x - 15y} = \frac{7}{9} \Rightarrow 9(81x - 33y) = 7(63x - 15y) \Rightarrow 3(81x - 33y) = 7(21x - 5y)$$

$$243x - 99y = 147x - 35y \Rightarrow 96x = 64y \Rightarrow x = \frac{64y}{96} = \frac{2y}{3}$$

$$(I) \quad 81 \cdot \frac{2y}{3} - 33y = 7y \cdot \frac{2y}{3} \quad / \cdot \frac{3}{y} \Rightarrow 162 - 99 = 14y \Rightarrow 14y = 63$$

$$\Rightarrow y = 4.5 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 4.5}{3} = 3 \Rightarrow \mathbf{A: 3_{m/sec.}, B: 4.5_{m/sec.}}$$

ב.

	V	T	S	
A: $0_m \rightarrow 42_m$	3	$\frac{42}{3} = 14$	42	$\Rightarrow 14 = \frac{k}{4.5} + 6 \Rightarrow k = 8 \cdot 4.5 = 36$
B: $(42 + k)_m \rightarrow 42_m$	4.5	$\frac{k}{4.5} + 6$	k	$42 + 36 = 78 < 81 \Rightarrow \mathbf{לא}$

(גובה הקומה העליונה אינו ידוע, אבל ידוע שגובהה הוא לפחות 81_m .)

2. א. (1)

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (k \cdot n^2 - p \cdot n) - (k \cdot (n-1)^2 - p \cdot (n-1))$$

$$= kn^2 - pn - kn^2 + 2kn - k + pn - p \Rightarrow \mathbf{a_n = 2kn - k - p}$$

(2) הנוסחה נכונה לכל $n \geq 2$. נבדוק לגבי $n = 1$:

$$S_1 \stackrel{?}{=} a_1 \iff k \cdot 1^2 - p \cdot 1 = 2k \cdot 1 - k - p \iff \mathbf{k - p = k - p \quad (\checkmark)}$$

(3)

$$a_{n+1} - a_n = (2k(n+1) - k - p) - (2kn - k - p) \Rightarrow \mathbf{a_{n+1} - a_n = 2k = d \quad (\checkmark)}$$

ב.

$$q_{cn} = \frac{2}{d} = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \mathbf{|q_{cn}| < 1 \quad (\checkmark)}$$

ג.

$$d = 2k = 2 \cdot 1.5 = 3, \quad a_1 = b_1 = c_1 = k - p = 1.5 - 4.5 = -3, \quad \frac{2}{d} = \frac{2}{3}$$

$$S_{m(bn)} = (-3) \cdot \frac{3^m - 1}{3 - 1} = \frac{3(1 - 3^m)}{2}, \quad S_{cn} = \frac{-3}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{-3}{\frac{1}{3}} = -9, \quad 40 \frac{1}{3} = \frac{121}{3}$$

$$\frac{3(1 - 3^m)}{2} : (-9) = \frac{121}{3} \Rightarrow \frac{3(1 - 3^m)}{2 \cdot (-9)} = \frac{121}{3} \Rightarrow 3^m - 1 = 242 \Rightarrow 3^m = 243 \Rightarrow \mathbf{m = 5}$$

ד.

$$c_1 = -3, \quad q = \frac{2}{3} \Rightarrow c_{n+1} - c_n = (-3) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - (-3) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{2}{3} - 1\right) > 0 \Rightarrow \nearrow$$

3. הגדרת מאורעות: A - תלמיד, B - נבדק

	A	\bar{A}	Σ
B	$x = 0.52$	$0.8 \cdot 0.1 = 0.08$	$0.08 + x = 0.6$
\bar{B}	$0.9 - 0.52 = 0.38$	$0.1 - 0.08 = 0.02$	$0.38 + 0.02 = 0.4$
Σ	0.9	0.1	1

$$P(A/B) = \frac{13}{15} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{x}{0.08+x} = \frac{13}{15} \Rightarrow 15x = 1.04 + 13x \Rightarrow 2x = 1.04 \Rightarrow x = 0.52$$

א.

$$P = P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P = 0.38$$

ב.

$$P = P_5(5) + P_5(4) = 0.6^5 + \binom{5}{4} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^1 = 0.07776 + 0.2592 \Rightarrow P = 0.33696$$

ג. ההסתברות 'לפחות אחד מהחמישה נבדק' היא $1 - 0.4^5 = 0.98976$

ההסתברות 'לפחות אחד מהחמישה נבדק' וגם 'לפחות ארבעה מהחמישה נבדק'

היא הסתברות 'לפחות ארבעה מהחמישה נבדק', ולכן:

$$P = \frac{0.33696}{0.98976} \Rightarrow P = \frac{351}{1031} = 0.3404$$

$$P_5(2) = \binom{5}{2} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^3 = 0.2304$$

ההסתברות 'לפחות שניים מהחמישה נבדק' וגם 'לפחות אחד מהחמישה נבדק' היא

$$0.6 \cdot P_4(1) = 0.6 \cdot \binom{4}{1} \cdot 0.6^1 \cdot 0.4^3 = 0.09216$$

$$\Rightarrow P = \frac{0.09216}{0.2304} \Rightarrow P = 0.4$$

אפשר גם: מספר האפשרויות לבחור 2 מ-5 הוא $\binom{5}{2} = 10$ (מספר האפשרויות של המאורע הידוע).

מספר אפשרויות של זוגות מתוך ה-10 שכוללות את האחרון הוא 4, ולכן: $P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

הרב יוסי שריד ממרצ

יוסי שריד היה חבר כנסת מטעם סיעת השמאל בכנסת ששמה 'מרצ'.

שם זה הינו גלגול שמם שתי מפלגות שמאל: 'רץ' של שולמית אלון, ו'מ' של מפ"ם.

עוד טרם קביעת שמה הנוכחי של סיעת מרצ, פעל (ועדיין פועל) במבשרת ציון מוסד חינוכי - כולל אברכים ציוניים ששמו... מר"ץ (מרכז צוותים).

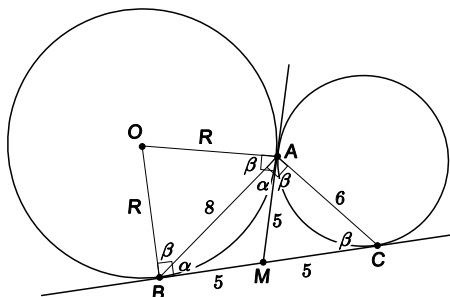
הרב שעומד בראש כולל זה הוא הרב... יוסי שריד.

הרב יוסי שריד והח"כ לשעבר יוסי שריד כמעט בני אותו גיל (הרב יליד 1939 והח"כ לשעבר יליד 1940).

שניהם עברו אירוע לב ראשון בשנת 1986 והיו מאושפזים מיטה ליד מיטה ב-רומניה.

הרב יוסי שריד, שיש לו חוש הומור נפלא, אומר שלשניהם יש שני דברים משותפים:

הראשון הוא 'שהשם אחד' והשני הוא ששניהם מתפללים 'לקץ הימין'...



5. א. תנאי הכרחי ומספיק לחסימת מרובע במעגל: זוויות נגדיות משלימות ל- 180° :

$$\angle OBD = \angle OCD =^{(1)} 90^\circ \quad (1)$$

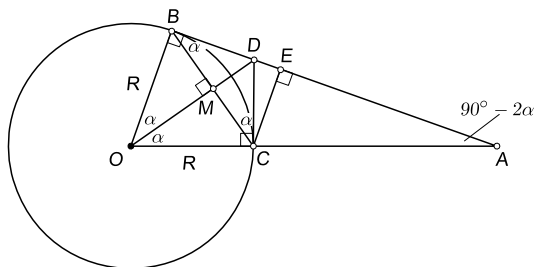
$$\angle OBD + \angle OCD = 180^\circ \quad (\checkmark)$$

(2)

$$DB =^{(2)} DC, \quad OB =^{(3)} OC = R$$

$$\angle DMC =^{(4)} 90^\circ, \quad \angle DEC =^{(3)} 90^\circ$$

$$\angle DMC + \angle DEC = 180^\circ \quad (\checkmark)$$



ב. המעגל החוסם את OBDC הוא המעגל החוסם את $\triangle OBD$ (ישר-זווית).

קוטר המעגל הוא יתר המשולש $(OD = d_1)$:

$$\angle OBM =^{(5)} 90^\circ - \alpha \Rightarrow^{(6)} \angle BOD = \alpha$$

$$\triangle OBD: \cos \alpha = \frac{R}{OD} = \frac{R}{d_1} \Rightarrow OD = d_1 = \frac{R}{\cos \alpha} \quad (\text{יחידות אורך})$$

המעגל החוסם את MDEC הוא המעגל החוסם את $\triangle DMC$ (ישר-זווית).

קוטר המעגל הוא יתר המשולש $(DC = d_2)$:

$$\triangle OBD: \operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{R} \Rightarrow BD = R \operatorname{tg} \alpha =^{(2)} DC \Rightarrow d_2 = R \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{יחידות אורך})$$

$$\angle DOC =^{(7)} \angle DOB = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha \Rightarrow^{(8)} \angle A = 90^\circ - 2\alpha$$

$$\triangle AOD: \frac{OD}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{d_1}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} =^{(9)} 2R_3 = d_3 \Rightarrow^{(10)} d_3 = \frac{R}{\cos 2\alpha} \Rightarrow d_3 = \frac{R}{\cos \alpha \cos 2\alpha} \quad (\text{יחידות אורך})$$

ג.

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_3}{d_1} \Leftrightarrow \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\frac{R}{\cos \alpha}} = \frac{\frac{R}{\cos 2\alpha}}{\frac{R}{\cos \alpha \cos 2\alpha}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

$$(\sin \alpha)_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$(1) \sin \alpha = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ, \quad \angle BOC = 2\alpha \Rightarrow \alpha < 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$(2) \sin \alpha = -1 = \sin 270^\circ \Rightarrow \emptyset$$

(1) זווית בין משיק למעגל לרדיוס הנקודת ההשקה

(2) שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת (3) נתון (4) אלכסוני דלתון מאונכים זה לזה

(5) השלמה לזווית ישרה (6) השלמה ל- 180° ב- $\triangle OMB$

(7) אלכסון ראשי בדלתון חוצה את זווית הראש שלו (8) השלמה ל- 180° ב- $\triangle OBA$

(9) משפט הסינוסים (10) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

$$f(x) = \frac{x}{(x^2-2)^2}, \quad g(x) = \frac{x}{(x^2-2)^3} \Rightarrow x^2 - 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{f, g: x \neq \pm\sqrt{2}} \quad (1) \quad \text{א. 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{2}} f(x) \text{ or } g(x) = \frac{\pm\sqrt{2}}{0} = \infty \Rightarrow \underline{f, g: x = \pm\sqrt{2}} \quad (2)$$

בשתי הפונקציות מעלת פולינום המכנה גבוהה ממעלת פולינום המונה, ולכן:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ or } g(x) = 0 \Rightarrow \underline{f, g: y = 0} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-2)^2 - x \cdot 2(x^2-2) \cdot 2x}{(x^2-2)^4} = \frac{(x^2-2) - 4x^2}{(x^2-2)^3} = \frac{-3x^2-2}{(x^2-2)^3} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 3x^2 = -2 \Rightarrow \emptyset$$

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-2)^3 - x \cdot 3(x^2-2)^2 \cdot 2x}{(x^2-2)^6} = \frac{(x^2-2) - 6x^2}{(x^2-2)^4} = \frac{-5x^2-2}{(x^2-2)^4} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 5x^2 = -2 \Rightarrow \emptyset \quad (4)$$

$$f(-x) = \frac{-x}{((-x)^2-2)^2} = -\frac{x}{(x^2-2)^2} = -f(x) \Rightarrow \underline{f(-x) = -f(x)} \quad (\checkmark)$$

$$g(-x) = \frac{-x}{((-x)^2-2)^3} = -\frac{x}{(x^2-2)^3} = -g(x) \Rightarrow \underline{g(-x) = -g(x)} \quad (\checkmark)$$

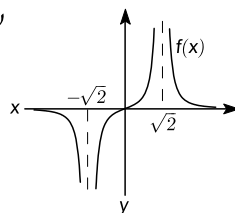
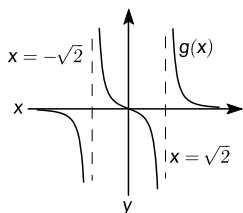
ב. (1) $g'(x) = \frac{-5x^2-2}{(x^2-2)^4} = \frac{-}{+} = -$ לכן $g(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה.

הגרף מתאר פונקציה שעולה בחלק מהתחום. להן הגרף אינו של $g(x)$.

נתון שהוא של אחת הפונקציות $f(x)$ או $g(x)$. לכן הגרף מתאר את $f(x)$.

(2) לשתי הפונקציות אותן אסימפטוטות. מסעיף (1) - $g(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה.

שתי הפונקציות עוברות בראשית הצירים.



x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$f = h'$	-	\emptyset	-	0	+	\emptyset	+
h	\searrow		\searrow	min	\nearrow		\nearrow

$$\Rightarrow \underline{\searrow: (x < -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2} < x < 0)}$$

$$\underline{\nearrow: (0 < x < \sqrt{2}) \cup (x > \sqrt{2})}$$

ד. (1) $f(x)$ איזוגית. השטח משמאל לציר x שווה לשטח מימין לציר x בסימנים הפוכים.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \quad \text{לכן:}$$

(2) ראה הסבר בסעיף קודם (ד(1)).

$$S = 2 \int_0^1 \frac{x}{(x^2-2)^2} dx \stackrel{(*)}{=} \left(-\frac{1}{x^2-2} \right) \Big|_0^1 = \left(-\frac{1}{-1} \right) - \left(-\frac{1}{-2} \right) = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{S = \frac{1}{2}} \quad \text{(יחידה ריבועית)}$$

$$(*) \quad x^2 - 2 = u \Rightarrow 2x dx = du \Rightarrow \int \frac{2x}{(x^2-2)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{x^2-2} + c$$

ה. $k(x) = f(x) + b$ אינה איזוגית כי אינה עוברת בראשית הצירים.

היא אינה זוגית כי העתקתה מעלה או מטה אינה משנה את הזוגיות של x וגם לא של x^2 .

ולכן $k(x)$ אינה זוגית ואינה איזוגית. (אפשר גם: $k(-1) \neq k(1)$, $k(-1) \neq -k(1)$)

7. א. $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3}$, (1) $x^3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

(2) $3x^2 - 4a \geq 0$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4a}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \Rightarrow (x \leq -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}) \cup (x \geq \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}})$

(1) \cap (2) $\Rightarrow (x \leq -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}) \cup (x \geq \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}})$

ב.

$f(-x) = \frac{\sqrt{3(-x)^2-4a}}{(-x)^3} = \frac{\sqrt{3x^2-4a}}{-x^3} = -\frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3} = -f(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad (\checkmark)$

ג. (1)

$x \neq 0$, $y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4a = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}} \Rightarrow (\pm\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}, 0)$

(2)

$f'(x) = \frac{\frac{3\cancel{x}}{2\sqrt{3x^2-4a}} \cdot x^3 - 3x^2 \cdot \sqrt{3x^2-4a}}{x^6} = \frac{3x^2 - 3(3x^2-4a)}{x^4\sqrt{3x^2-4a}} = \frac{3(-2x^2+4a)}{x^4\sqrt{3x^2-4a}} = \frac{-6(x^2-2a)}{x^4\sqrt{3x^2-4a}} \stackrel{?}{=} 0$

$x^2 - 2a = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2a} \in \{(x \leq -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}) \cup (x \geq \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}})\} \quad (\checkmark)$

x		$-\sqrt{2a}$		$-\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$		$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{2a}$	
f'	$\frac{-+}{+} = -$	0	$\frac{-+}{+} = +$	\emptyset			$\frac{-+}{+} = +$	0	$\frac{-+}{+} = -$
f	\searrow	min	\nearrow	$\max_{ep.}$	\emptyset	$\min_{ep.}$	\nearrow	max	\searrow

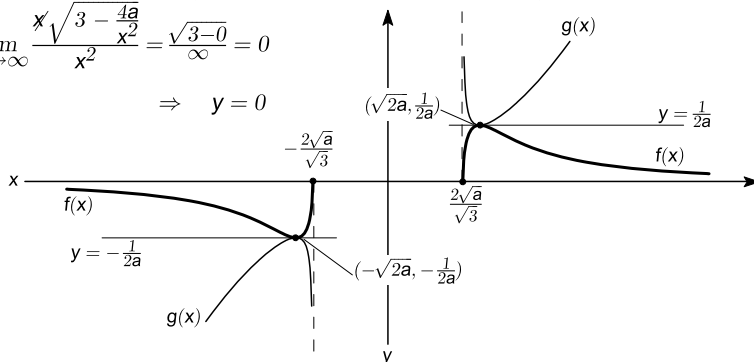
$f(\sqrt{2a}) = \frac{\sqrt{6a-4a}}{(2a)^{1.5}} = \frac{(2a)^{0.5}}{(2a)^{1.5}} = (2a)^{0.5-1.5} = (2a)^{-1} = \frac{1}{2a} \Rightarrow f(-\sqrt{2a}) = -f(\sqrt{2a}) = -\frac{1}{2a}$
אסימטות הפונקציה

$\Rightarrow \min(-\sqrt{2a}, -\frac{1}{2a}), \max_{ep.}(-\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}, 0), \min_{ep.}(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}, 0), \max(\sqrt{2a}, \frac{1}{2a})$

ד. לא נדרש, אבל נחוץ לציור: $y = 0$ אסימפטוטה אופקית.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{3-\frac{4a}{x^2}}}{x^3} = \frac{\sqrt{3-0}}{\infty} = 0$

$\Rightarrow y = 0$



ה. (1)

$g(x) = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow (x < -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}) \cup (x > \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}})$

(2)

$\lim_{x \rightarrow \pm\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}} g(x) = \frac{1}{\rightarrow 0} = \infty \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{1}{\rightarrow 0} = \infty \Rightarrow \emptyset$

ו. (1) שיעורי x של נקודות הקיצון נשארים. סוג הקיצון מתהפך. ציור - לעיל.

(2)

$f(\pm\sqrt{2a}) = g(\pm\sqrt{2a}) \Rightarrow \pm\frac{1}{2a} = \pm 2a \Rightarrow \pm\frac{1}{4} = \pm a^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

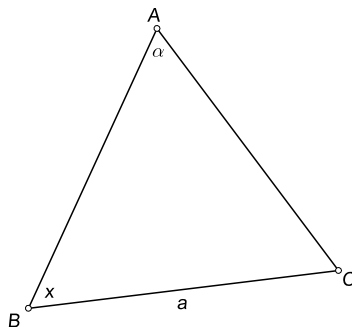
8. א.

$$\angle C = \pi - \alpha - x$$

$$(1) \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin x} = \frac{AB}{\sin (\pi - (\alpha + x))}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{a \sin x}{\sin \alpha}, \quad AB = \frac{(2) a \sin (\alpha + x)}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow P_{\triangle ABC} = a + \frac{a \sin x}{\sin \alpha} + \frac{a \sin (\alpha + x)}{\sin \alpha}$$



ב.

$$P'(x) = 0 + \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \cos x + \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \cos (\alpha + x) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} \cdot (\cos x + \cos (\alpha + x)) = 0 \Rightarrow \cos x = -\cos (\alpha + x) = \cos (\pi - (\alpha + x))$$

$$x = \pm(\pi - (\alpha + x)) \Rightarrow (1) x = \pi - \alpha - x \Rightarrow 2x = \pi - \alpha \Rightarrow x = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

$$(2) x = -\pi + \alpha + x \Rightarrow \alpha = \pi \Rightarrow \emptyset$$

$$P''(x) = \left(\frac{a}{\sin \alpha} \cdot (\cos x + \cos (\alpha + x)) \right)' = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot (-\sin x - \sin (\alpha + x))$$

$$P''\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \left(-\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin \frac{\pi + \alpha}{2}\right) = (+) \cdot (-) = - \Rightarrow \max (\sqrt{ }) \Rightarrow x = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

ג.

זה בדיוק המקרה שלנו:

$$\angle B = x = \frac{\pi - \alpha}{2} \Rightarrow \angle C = \pi - \alpha - x = \pi - \alpha - \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{2\pi - 2\alpha - \pi + \alpha}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \angle C = \angle B \Rightarrow (3) AB = AC (\sqrt{ })$$

(1) משפט הסינוסים (2) $\sin (\pi - x) = \sin x$ (3) מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות

איך עושה כלב?

אוזן - מגעגע, אוזן - נאנח, אֵיל - צוהל, אֵיל - עורג, אפרוח - מצייץ, אריה - שואג, ברווז - מגעגע, גמל - מחרחר, דבורה - מזוזמת, דב - נוהם, דוכיפת - מהדהדת, זאב - מיילל, זנב - מזוזם, זמיר - מסתלסל, זרזיר - מפטפט, חרגול - מנסר, חזיר - נוחר, חמור - נוער (גם: נוהק), חסידה - מלקלקת, חתול - מיילל (וגם: מגרגר), יונה - הומה, ינשוף - נושף, יתוש - מזוזם, כבשה - פועה, כלב - נובח, נחש - לוחש, נמר - שואג, נץ - מצפצף, סוס - צוהל, עגור - מצפצף, עורב - קורא, עז - פועה, עיט - צועק, עכבר - מצייץ, עפרוני - מסלסל, פיל - מריע (וגם: תוקע, נוהם, מחצצר), פרא - נוהק, פרה - גועה, צבוע - צוחק (גם מיילל), צבי - מפרט, ציפור - מצייצת, צפרדע - מקרקרת, צרצר - מצרצר, קוף - לוגג, ראם - מצלצל, שועל - מיילל, שור - גועה, שרקן - שורק, תוכי - מדבר (גם: שורק, מפטפט, מקשקש), תן - מיילל, תנשמת - נושמת, תרנגול - קורא, תרנגול-הודו - מהלצר,