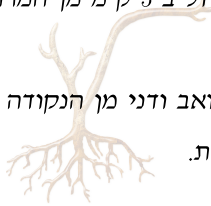


מבחן - 581

בחירה: 5 שאלות מהשאלות 1-8.

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. יואב ודני יצאו באותו הזמן לרכוב על אופניים.
הם רכבו במסלול ישר שהחל בנקודה A והסתיים בנקודה B.
לאורך המסלול קָב כל אחד מהם במהירות קבועה.
יואב הגיע לנקודה B, ומיד חזר באותו מסלול לנקודה A.
כאשר היה יואב בדרכו חזרה מ-B ל-A והגיע לאמצע המסלול AB, הגיע דני לנקודה B.
א. מהו היחס בין המהירות של יואב ובין המהירות של דני? נמק.
40 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, כאשר יואב היה בדרכו חזרה מ-B ל-A, נפגשו יואב ודני.
ב. הבע את אורך המסלול AB באמצעות המהירות של דני.
30 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, יואב עדיין לא הגיע לנקודה B,
והמרחק של דני מן הנקודה A היה גדול ב-5 ק"מ מן המרחק של יואב מן הנקודה B.
ג. מצא את אורך המסלול AB.
ד. כמה זמן עבר מרגע יציאתם של יואב ודני מן הנקודה A עד שהמרחק ביניהם היה 2 ק"מ?
מצא שתיים מבין שלוש האפשרויות.



2. a_n היא סדרה הנדסית המקיימת לכל n טבעי את הכלל: $3a_{n+2} + 5a_{n+1} - 2a_n = 0$. $a_1 \neq 0$.
א. מצא את שני הערכים האפשריים למנת הסדרה a_n .
נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל ואינה מתכנסת ב- b_1, b_2, b_3, \dots .
נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל ומתכנסת ב- c_1, c_2, c_3, \dots .
ב. הסבר מדוע הסדרה $b_1c_1, b_2c_2, b_3c_3, \dots$ היא סדרה הנדסית מתכנסת.
נתון: $b_1 = c_1 = m$ ו- $b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + \dots = 15$.
ג. מצא את m (רשום את שתי האפשרויות).
ד. עבור ערך m הקטן מבין שתי האפשרויות שבסעיף ג.
נתון: $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k = 1705$. מצא את ערכו של k .

שאלות

1. א. $\frac{x}{y} = 1\frac{1}{2}$ ב. $AB = \frac{5y}{6} \text{ km}$ ג. $AB = 10 \text{ km}$ ד. $t_1 = 20 \text{ min.}, t_2 = 36 \text{ min.}, t_3 = 44 \text{ min.}$
2. א. $q_1 = \frac{1}{3}, q_2 = -2$ ג. $m_{1,2} = \pm 5$ ד. $k = 10$

3. בכד יש כדורים בשלושה צבעים בלבד: אדום, צהוב, כחול.

ההסתברות להוציא כדור אדום היא $\frac{5}{8}$.

מספר הכדורים הצהובים גדול פי 3 ממספר הכדורים הכחולים.

$\frac{4}{5}$ מן הכדורים האדומים שבכד ו- $\frac{8}{9}$ מן הכדורים הצהובים שבכד מחוספסים,

וכל שאר הכדורים שבכד חלקים.

הוציאו באקראי כדור מן הכד והחזירו אותו לכד.

את הפעולה הזאת (הוצאה באקראי והחזרה) עשו 8 פעמים.

א. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן הכדורים שהוציאו הם מחוספסים?

ענה על סעיף ב עבור כד שבו 32 כדורים.

ב. הוציאו באקראי בזה אחר זה 2 כדורים מן הכד (ללא החזרה).

(1) מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים?

(2) ידוע ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים.

מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוציאו היה בצבע אדום?

ג. עבור כד שבו n כדורים, $50 < n < 100$, מצא את n (מצא את שתי האפשרויות).

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ. מרכזי המעגלים הם O_1 ו- O_2 .

הרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2 בהתאמה.

מן הנקודה M , שמחוץ לשני המעגלים, יוצאים שני ישרים

המשיקים למעגל O_1 בנקודות A ו- B ,

ולמעגל O_2 בנקודות C ו- D .

המשיק בנקודה המשותפת לשני המעגלים חותך

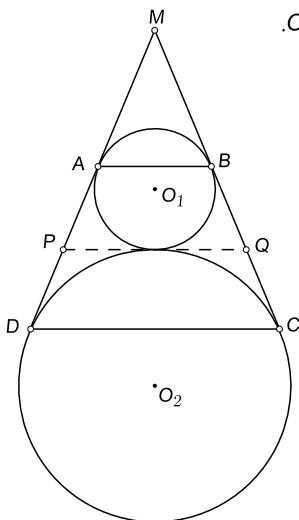
את הישרים MD ו- MC בנקודות P ו- Q בהתאמה.

א. הוכח כי המרובע $ABCD$ הוא טרפז שווה-שוקיים.

ב. הוכח כי PQ שווה לשוק הטרפז $ABCD$.

ג. הוכח כי $\angle O_1 Q O_2 = 90^\circ$.

ד. נתון: $R_1 = 4$, $R_2 = 9$. מצא את PQ .



תהליך

3. א. $P = \frac{189}{8192} = 0.0231$ ב. (1) $P = \frac{267}{496} = 0.5383$ (2) $P = \frac{40}{89} = 0.4494$ ג. $n_1 = 64$, $n_2 = 96$

4. ד. $PQ = 12$ (יחידות אורך)

5. בציור מתואר משולש חד-זוויות ABC החסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R .

המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך הקטע AB בנקודה D.

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא $2R$. נסמן: $\angle BAC = \alpha$.

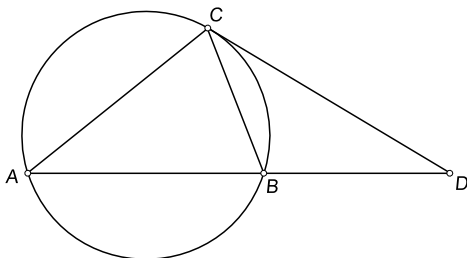
א. הבע את BD באמצעות R ו- α .

נתון: $\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$

ב. מצא את α .

נתון: שטח המשולש CBD הוא 27.

ג. מצא את R .



פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות שורש, פונ' רציונליות ופונ' טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos^3 x \cdot \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$

א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגו.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = a \cdot f(x)$, $a > 0$ פרמטר.

ג. הבע באמצעות a את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.

הישר שמצאת בסעיף ג אינו חותך את גרף הפונקציה $q(x)$ בנקודה נוספת.

השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על-ידי הישר שמצאת בסעיף ג

ועל-ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$ שווה ל- $(\frac{\pi^2}{2} - 1)$.

ד. מצא את a.

"Britain and France had to choose between war and dishonour."

They chose dishonour. They will have war"

(**"ברייטניה וצרפת צריכות היו לבחור בין מלחמה לבין חרפה. הם בחרו בחרפה. הם יקבלו מלחמה").**

ווינסטון צ'רצ'יל (1874-1965), על הסכם מינכן (1938). זה באמת מה שהיה.

את ההסכם 'השיג' מהיטלר יש"ו ראש ממשלת בריטניה בזמנו **נוויל צ'מברליין** (1869-1940).

חצי שנה לאחר פרוץ מלחמת העולם השנייה נאלץ להתפטר.

צ'רצ'יל החליף אותו בתפקיד וניהל את המלחמה עד למיגורה של החיה הנאצית.

תולדות

5. א. $BD = 2R \sin \alpha \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$ (יחידות אורך) ב. $\alpha = 36.34^\circ$ ג. $R = 5.6964$ (יחידות אורך)

$$a = 4 \quad \text{7} \quad y = ax \quad \text{8} \quad \min_{\text{ep.}}(0, 0) \quad , \quad \max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right) \quad , \quad \min\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right) \quad , \quad \max_{\text{ep.}}(\pi, 0) \quad \text{9} \quad \text{6}$$

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$. פרמטר a .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) עבור אילו ערכי a אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון? נמק.

(2) במקרים שיש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון, הבע באמצעות a את שיעוריה וקבע את סוגה.

ג. סרטט בנפרד סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ לכל אחד מן התחומים של הפרמטר a :

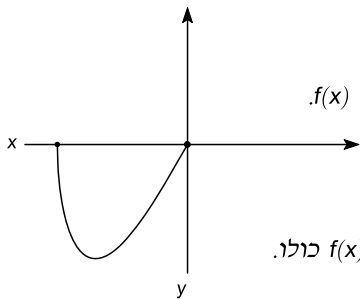
$$(1) a > 0 \quad (2) a < 0 \quad (3) a = 0$$

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - b$. פרמטר b .

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר x בשתי נקודות.

ד. (1) מצא את התחום של הפרמטר a . נמק.

(2) הבע את התחום של הפרמטר b באמצעות a . נמק.



8. נתונה הפונקציה $f(x) = x \cdot \sqrt{a - x^2}$. פרמטר $a > 0$.

א. (1) הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הוכח שהפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

(3) בסרטוט מתואר חלק מגרף הפונקציה $f(x)$.

השלם את הסרטוט, כך שיתאר את גרף הפונקציה $f(x)$ כולו.

דרך הנקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון

מעבירים אנך לציר x . האנך חותך את ציר x בנקודה B .

ישר העובר דרך נקודה A ודרך ראשית הצירים, O ,

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת, C .

דרך הנקודה C מעבירים אנך לציר x .

האנך חותך את ציר x בנקודה D .

הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים AOB ו- COD הוא $4\sqrt{2}$.

ב. מצא את a .

בהצלחה

זכות היצרים שמונה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט



$$7. \text{ א. } x > 0 \quad \text{ב. } a \leq 0 \quad (1) \quad \text{ד. } a > 0 \quad (2) \quad \min(a, 2\sqrt{a}) \quad \text{ז. } a > 0 \quad (1) \quad \text{ב. } a > 2\sqrt{a}$$

$$8. \text{ א. } -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a} \quad (1) \quad \text{ב. } a = 6$$

פתרון - 581

1. א. x - מהירות יואב, y - מהירות דני, C - נקודת מפגש

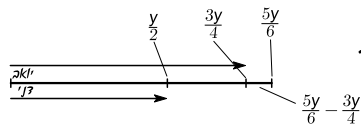
$$S_{Yoav} = 1.5 AB, S_{Dani} = AB, t_{Yoav} = t_{Dani}$$

$$t_{Yoav} = \frac{1.5 AB}{x}, t_{Dani} = \frac{AB}{y} \Rightarrow \frac{1.5 AB}{x} = \frac{AB}{y} \cdot \frac{x}{AB} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3y}{2}$$

		V	T	S
Yoav	A → B C ← B	$\frac{3y}{2}$	$40 \text{ min.} = \frac{2}{3}h$	$\frac{3y}{2} \cdot \frac{2}{3} = y$
Dani	A → C	y	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}y$

$$\Rightarrow 2 AB = y + \frac{2}{3}y = \frac{5y}{3} \Rightarrow AB = \frac{5y}{6} \text{ km}$$



	V	T	S
Yoav	$\frac{3y}{2}$	$30 \text{ min} = \frac{1}{2}h$	$\frac{3y}{4}$
Dani	y	$\frac{1}{2}$	$\frac{y}{2}$

$$\frac{y}{2} - 5 = \frac{5y}{6} - \frac{3y}{4} \quad / \cdot 12 \Rightarrow 6y - 60 = 10y - 9y$$

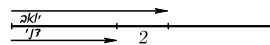
$$5y = 60 \Rightarrow y = 12$$

$$AB = \frac{5 \cdot 12}{6} \Rightarrow AB = 10 \text{ km}$$

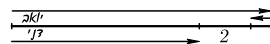
ד. שלושת המקרים להלן: (1) מרגע היציאה (2) לפני הפגישה (3) אחרי הפגישה

$$x = \frac{3y}{2} = \frac{3 \cdot 12}{2} = 18$$

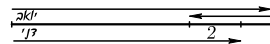
$$(1) 18t - 12t = 2 \Rightarrow 6t = 2 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{3}h = 20 \text{ min.}$$



$$(2) 18t + 12t = 2 \cdot 10 - 2 \Rightarrow 30t = 18 \Rightarrow t_2 = \frac{3}{5}h = 36 \text{ min.}$$



$$(3) 18t + 12t = 2 \cdot 10 + 2 \Rightarrow 30t = 22 \Rightarrow t_3 = \frac{11}{15}h = 44 \text{ min.}$$



2. א.

$$3a_{n+2} + 5a_{n+1} - 2a_n = 0 \Rightarrow 3a_1 q^{n+1} + 5a_1 q^n - 2a_1 q^{n-1} = 0 \quad / : a_1 q^{n-1}$$

$$3q^2 + 5q - 2 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{3}, q_2 = -2$$

ב.

$$q_b = -2, q_c = \frac{1}{3} \Rightarrow q_{bc} = -2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow |q_{bc}| < 1 \quad (\checkmark)$$

ג.

$$S = \frac{b_1 c_1}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{m^2}{\frac{1}{3}} = 15 \Rightarrow m^2 = 15 \cdot \frac{5}{3} = 25 \Rightarrow m_{1,2} = \pm 5$$

ד.

$$m = -5 = b_1, q_b = -2 \Rightarrow b_1 + b_2 + \dots + b_k = (-5) \cdot \frac{1 - (-2)^k}{1 - (-2)} = -\frac{5}{3}(1 - (-2)^k) = 1705$$

$$-1 + (-2)^k = 1705 \cdot \frac{3}{5} = 1023 \Rightarrow (-2)^k = 1024 = (\pm 2)^{10} \Rightarrow k = 10$$

3. סימון מאורעות: R - אדום, Y - צהוב, B - כחול, T - מחוספס

	R	Y	B	Σ
T	$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$	$\frac{8}{9} \cdot \frac{9}{32} = \frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
\bar{T}	$\frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	$\frac{9}{32} - \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$	$\frac{3}{32} - 0 = \frac{3}{32}$	$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
Σ	$\frac{5}{8}$	$3x = \frac{9}{32}$	$(1) x = \frac{3}{32}$	1

$$(1) \quad \frac{5}{8} + 4x = 1 \Rightarrow 4x = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{32}$$

א.

$$P = P_8(3) = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 56 \cdot \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{1024} \Rightarrow P = \frac{189}{8192} = 0.0231$$

ב. (1)

$$N = 32 \Rightarrow N(R) = \frac{5}{8} \cdot 32 = 20, \quad N(Y) = \frac{9}{32} \cdot 32 = 9, \quad n(B) = \frac{3}{32} \cdot 32 = 3$$

$$P = 1 - P(RR \cup YY \cup BB) = 1 - \left(\frac{20}{32} \cdot \frac{19}{31} + \frac{9}{32} \cdot \frac{8}{31} + \frac{3}{32} \cdot \frac{2}{31}\right) = 1 - \frac{458}{32 \cdot 31}$$

$$\Rightarrow P = \frac{267}{496} = 0.5383$$

(2)

$$P = P(\text{red first} / \text{different colors}) = \frac{P(\text{red first} \cap \text{different colors})}{P(\text{different colors})}$$

$$= \frac{P(R_1 \cap Y_2) + P(R_1 \cap B_2)}{\frac{367}{496}} = \frac{\frac{20}{32} \cdot \frac{9}{31} + \frac{20}{32} \cdot \frac{3}{31}}{\frac{267}{496}} = \frac{496(180+60)}{32 \cdot 31 \cdot 267} = \frac{119,040}{264,864} \Rightarrow P = \frac{40}{89} = 0.4494$$

ג. מספר הכדורים הינו מספר טבעי.

מהממצאים הוא כפולה של 32 (וממילא גם של 2, 4 ו-8).

בתחום המספרים הנתון ($50 < n < 100$) האפשרויות הן: $n_1 = 64, n_2 = 96$

איך עושה כלב?

אוזן - מגעגע, אוח - נאנח, אָיל - צוהל, אָייל - עורג, אפרוח - מצייץ, אריה - שואג, ברווז - מגעגע, גמל - מחרחר, דבורה - מזומזמת, דב - נוהם, דוכיפת - מהדהדת, זאב - מיילל, זנב - מזומזם, זמיר - מסתלסל, זרזיר - מפטפט, חריגול - מנסר, חזיר - נוחר, חמור - נוער (גם: נוהק), חסידה - מלקלקת, חתול - מיילל (וגם: מגרגר), יונה - הומה, ינשוף - נושף, יתוש - מזומזם, כבשה - פועה, כלב - נובח, נחש - לוחש, נמר - שואג, נץ - מצפצף, סוס - צוהל, עגור - מצפצף, עורב - קורא, עז - פועה, עיט - צועק, עכבר - מצייץ, עפרוני - מסלסל, פיל - מריע (וגם: תוקע, נוהם, מחצצר), פרא - נוהק, פרה - גועה, צבוע - צוחק (גם מיילל), צבי - מפרט, ציפור - מצייצת, צפרדע - מקרקרת, צרצר - מצרצר, קוף - לוחג, ראם - מצלצל, שועל - מיילל, שור - גועה, שרקן - שורק, תוכי - מדבר (גם: שורק, מפטפט, מקשקש), תן - מיילל, תנשמת - נושמת, תרנגול - קורא, תרנגול-הודו - מהלצר,

4. א.

$$(1) MA = MB, MD = MC \Rightarrow^{(2)} AD = BC \quad (\checkmark_1)$$

$$\angle MAB =^{(3)} \angle MBA =^{(4)} \frac{180^\circ - \angle M}{2}$$

$$\angle MDC =^{(3)} \angle MCD =^{(4)} \frac{180^\circ - \angle M}{2}$$

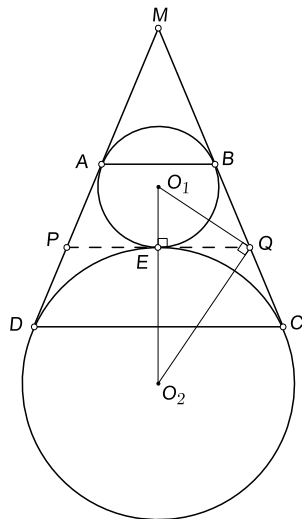
$$\angle MAB =^{(5)} \angle MDC \Rightarrow^{(6)} AB \parallel DC \quad (\checkmark_2)$$

$$AD \in MD, BC \in MC \Rightarrow AD \parallel BC \quad (\checkmark_3)$$

$$(1) QB = QE = QC = x, PA = PE = PD = y$$

$$AD = BC \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow PQ = 2x, BC = 2x \Rightarrow PQ = BC \quad (\checkmark)$$



ב.

$$(7) \angle EQO_1 = \angle BQO_1, \angle EQO_2 = \angle CQO_2$$

$$\angle O_1QO_2 = \angle EQO_1 + \angle EQO_2 = \frac{1}{2} \angle BQC = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ \Rightarrow \angle O_1QO_2 = 90^\circ \quad (\checkmark)$$

ג.

$$\angle O_1EO_2 =^{(8)} 180^\circ, QE \perp^{(9)} O_1O_2 \Rightarrow^{(10)} QE = \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \Rightarrow PQ = 12 \quad (\text{יחידות אורך})$$

ד.

(1) שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת (2) הפרש קטעים שווים

(3) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים (4) השלמה ל- 180° במשולש (5) כלל המעבר

(6) אם זוויות מתאימות שוות בישרים הנחתכים על-ידי ישר שלישי - הישרים מקבילים

(7) קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל,

חוצה את הזווית שבין המשיקים

(8) נקודת השקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצאת על קטע המרכזים או על המשכו

(9) זווית בין משיק לרדיוס

(10) גובה ליתר במשולש ישר-זווית שווה למוצעת הגאומטרי של היטלי ניצבי המשולש על היתר

160, 225

עוד משהו מאיש החידות האנגלי, הנרי ארנסט דורני (1857-1930):

דורני מצא כי המספר 160, 225 הוא הקטן ביותר שניתן להציג כסכום של שני ריבועים ב-12 הצגות שונות:

$$\begin{aligned} 160, 225 &= 400^2 + 15^2 = 399^2 + 32^2 = 393^2 + 76^2 = 392^2 + 81^2 \\ &= 384^2 + 113^2 = 375^2 + 140^2 = 360^2 + 175^2 = 356^2 + 183^2 \\ &= 337^2 + 216^2 = 329^2 + 228^2 = 311^2 + 252^2 = 300^2 + 265^2 \end{aligned}$$

5. א.

$$\angle BCD = {}^{(1)} \angle BAC = \alpha$$

$$\triangle ABC: \frac{BC}{\sin \alpha} = {}^{(2)} 2R \Rightarrow BC = 2R \sin \alpha$$

$$\triangle ACD: \frac{CD}{\sin \alpha} = {}^{(2)} 2R_{\triangle ACD} = 2 \cdot 2R$$

$$\Rightarrow CD = 4R \sin \alpha$$

$$\triangle BCD: BD^2 = {}^{(3)} BC^2 + CD^2 + BC \cdot CD \cdot \cos \alpha$$

$$= 4R^2 \sin^2 \alpha + 16R^2 \sin^2 \alpha - 2 \cdot 2R \sin \alpha \cdot 4R \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$= 20R^2 \sin^2 \alpha - 16R^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = 4R^2 \sin^2 \alpha (5 - 4 \cos \alpha) / \sqrt{}$$

$$\Rightarrow BD = 2R \sin \alpha \sqrt{5 - 4 \cos \alpha} \quad (\text{יחידות אורך})$$

ב.

$$\frac{CD}{BD} = \frac{4R \sin \alpha}{2R \sin \alpha \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}} = {}^{(4)} \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{5 - 4 \cos \alpha} = \frac{4}{3} / ()^2$$

$$5 - 4 \cos \alpha = \frac{16}{9} \Rightarrow -4 \cos \alpha = -\frac{29}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{29}{9 \cdot 4} = 0.8056 \Rightarrow \alpha = 36.34^\circ$$

ג.

$$S_{\triangle CBD} = \frac{BC \cdot CD \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{2R \sin \alpha \cdot 4R \sin \alpha \cdot \sin \alpha}{2} = 4R^2 \cdot \sin^3 \alpha = {}^{(4)} 27$$

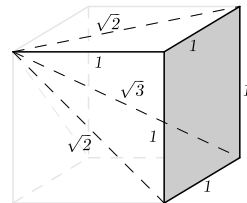
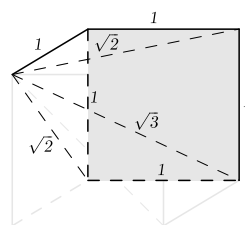
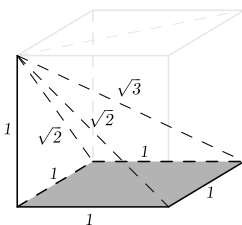
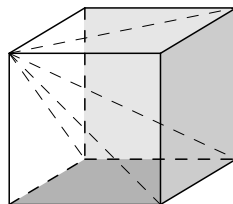
$$R^2 = \frac{27}{4 \sin^3 \alpha} = \frac{27}{4 \cdot 0.208} = 32.4485 \Rightarrow R = 5.6964 \quad (\text{יחידות אורך})$$

(1) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על אותו מיתר מצידו האחר

(2) משפט הסינוסים (5) משפט הקוסינוסים (4) נתון

ניתן לחלק קוביה לשלוש פירמידות זהות.

בציור מודגמת החלוקה על קוביה שאורך צלעה הוא יחידת אורך אחת.



א. 6

$$f(x) = \cos^3 x \cdot \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$f'(x) = 3 \cos^2 x (-\sin x) \cdot \sin x + \cos^3 x \cdot \cos x = -3 \cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x \stackrel{?}{=} 0$$

$$-3 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) + \cos^4 x = \cos^2 x (-3 + 3 \cos^2 x + \cos^2 x) = \boxed{\cos^2 x (4 \cos^2 x - 3)} = 0$$

$$(1) \cos^2 x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$$

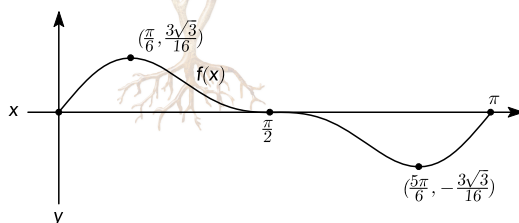
$$(2) 4 \cos^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k & x_2 &= \frac{\pi}{6} \\ x &= \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k & x_3 &= \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f'		++=+	0	+--=	0	+--=	0	++=+	
f	min _{ep.}	↗	max	↘	infl.	↘	min	↗	max _{ep.}

$$f(0) = 1 \cdot 0 = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{16}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{16}, \quad f(\pi) = -1 \cdot 0 = 0$$

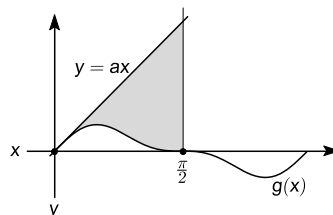
$$\Rightarrow \min_{ep.}(0, 0), \quad \max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right), \quad \min\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right), \quad \max_{ep.}(\pi, 0)$$



$$g(x) = a \cdot f(x), \quad g'(x) = a \cdot f'(x) = a \cdot \cos^2 x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$g'(0) = a \cdot 1^2 \cdot (4 \cdot 1^2 - 3) = a \Rightarrow m = a$$

$$g(0) = a \cdot f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0) \Rightarrow y = ax$$



$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax - a \cos^3 x \sin x) dx = \left(\frac{ax^2}{2} + \frac{a \cos^4 x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{a\pi^2}{8} + 0 \right) - \left(0 + \frac{a}{4} \right) = \frac{a\pi^2}{8} - \frac{a}{4} = \frac{\pi^2}{2} - 1 \quad / \cdot 8 \Rightarrow a\pi^2 - 2a = 4\pi^2 - 8 \Rightarrow a = 4$$

נתון

7. א.

$$f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

ב. (1)

$$f'(x) = \frac{1\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+a)}{x} = \frac{2x-x-a}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-a}{2x^{1.5}} \stackrel{?}{\neq} 0 \Rightarrow x-a \neq 0, \quad x > 0 \Rightarrow a \leq 0$$

(2)

$$a > 0: f'(x) = 0 \Rightarrow x-a=0 \Rightarrow x=a, \quad f(a) = \frac{2a}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}$$

x	0		a	
f'		$\frac{-}{+} = -$	0	$\frac{+}{+} = +$
f		\searrow	min	\nearrow

$$\Rightarrow \min(a, 2\sqrt{a})$$

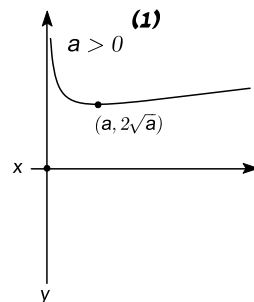
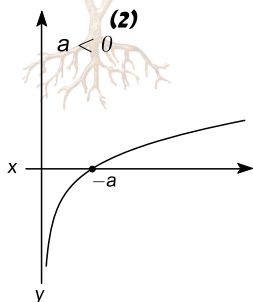
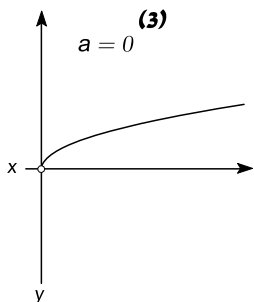
ג.

$$(1) \underline{a > 0}: \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x+a}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (\sqrt{x} + \frac{a}{\sqrt{x}}) = \rightarrow 0 + \rightarrow \infty = \infty \Rightarrow \text{asym.: } x_{\infty} = 0$$

$$(2) \underline{a < 0}: f'(x) = \frac{x-a}{2x^{1.5}} > 0 \Rightarrow f \nearrow, \quad y=0 \Rightarrow x=-a \Rightarrow (-a, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x+a}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (\sqrt{x} + \frac{a}{\sqrt{x}}) = \rightarrow 0 + \rightarrow \infty = \infty \Rightarrow \text{asym.: } x_{\infty} = 0$$

$$(3) \underline{a = 0}: f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, \quad x > 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ (חור)}$$



$$\text{ד. (1)} \quad g(x) = f(x) - b \text{ מעתיקה את } f(x) \text{ מטה ב-} b \text{ שְׁנִתוֹת עֲבוּר } b > 0 \Leftrightarrow -b < 0$$

$$\text{ומעתיקה את } f(x) \text{ כלפי מעלה ב-} b \text{ שְׁנִתוֹת עֲבוּר } b < 0 \Leftrightarrow -b > 0$$

$$\text{קו אופקי חותך את } f(x) \text{ בשתי נקודות, רק עבור } a > 0 \text{ (ראה ג(1)). ולכן: } a > 0.$$

(2)

כדי ש- $f(x)$ יחתוך את ציר x בשתי נקודות יש להעתיק אותו למטה ביותר מערך המינימום.

$$g(x) = f(x) - b \Rightarrow b > 2\sqrt{a}$$

אתה יכול להיות סוציאליסט עד שנגמר לך הכסף של אחרים

(מרגרט תאצ'ר, ראש ממשלת בריטניה, 1925-2013)

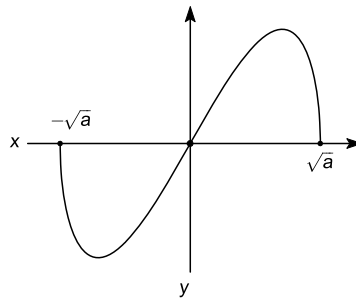
8. א. (1)

$$f(x) = x \cdot \sqrt{a - x^2}, \quad a > 0, \quad a - x^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$$

(2)

$$f(-x) = (-x) \cdot \sqrt{a - (-x)^2} = -x \sqrt{a - x^2} = -f(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad (\checkmark)$$

(3)

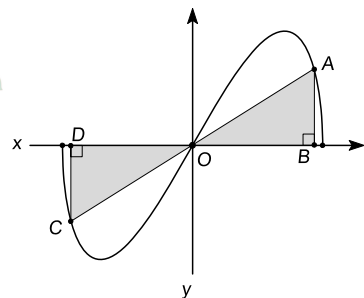


ב. בגלל הסימטריה של אי־זוגיות הפונקציה, שטחי שני המשולשים שווים זה לזה.

$$A(x, x \cdot \sqrt{a - x^2}) \Rightarrow OB = x, \quad AB = x \cdot \sqrt{a - x^2}$$

$$S = 2 \cdot S_{\triangle AOB} = 2 \cdot \frac{OB \cdot AB}{2} = x^2 \cdot \sqrt{a - x^2} = S(x)$$

$$S'(x) = 2x \cdot \sqrt{a - x^2} + x^2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a - x^2}} = \frac{2x(a - x^2) - x^3}{\sqrt{a - x^2}} = \frac{x(2a - 2x^2 - x^2)}{\sqrt{a - x^2}} = \frac{x(2a - 3x^2)}{\sqrt{a - x^2}} \stackrel{?}{=} 0$$



$$(1) \quad x_1 = 0$$

$$(2) \quad 2a - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2a}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2a}{3}}$$

x	0		$\sqrt{\frac{2a}{3}}$		\sqrt{a}
S'	0	$\frac{++}{+} = +$	0	$\frac{+-}{+} = -$	
S	min _{ep.}	\nearrow	max	\searrow	min _{ep.}

$$\Rightarrow S_{\max} = S\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) = \frac{2a}{3} \cdot \sqrt{a - \frac{2a}{3}} = 4\sqrt{2} \quad / ()^2$$

$$\frac{4a^2}{9} \left(a - \frac{2a}{3}\right) = 16 \cdot 2 \quad / \cdot \frac{9}{4} \Rightarrow a^2 \left(a - \frac{2a}{3}\right) = 72$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot \frac{1}{3}a = 72 \Rightarrow a^3 = 216 = 6^3 \Rightarrow a = 6$$

מספר המשפטים המתמטיים החדשים שמתחברים מידי שנה נאמד בלמעלה מ־200,000 (מאתים אלף!).