

מבחן - 382

בשאלון שש שאלות. תשובה מלאה מזכה ב־30 נקודות.
מותר לך לענות, באופן מלא או חלקי, על מספר שאלות כרצונך,
אך סך הנקודות שתוכל לצבור בשאלון זה לא יעלה על 100.

אלגברה

1. בעל חנות קנה מארזי שוקולד משני סוגים: מארזים פשוטים ומארזים מיוחדים.

עבור כל מארז פשוט שילם בעל החנות 40 שקלים,

ועבור כל מארז מיוחד שילם 70% יותר ממה ששילם עבור מארז פשוט.

בעל החנות קנה 200 מארזים, ושילם עבורם 11,752 שקלים סך הכל.

א. (1) כמה שילם בעל החנות עבור מארז מיוחד?

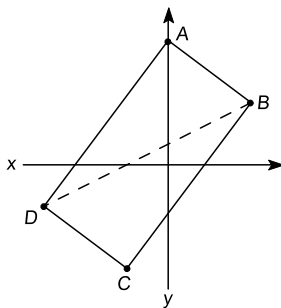
(2) כמה מארזים פשוטים קנה בעל החנות?

בעל החנות מכר כל אחד מן המארזים הפשוטים ברווח של 80%,

ומכר כל אחד מן המארזים המיוחדים ברווח של 75%.

ב. (1) בכמה שקלים סך הכל מכר בעל החנות את כל 200 המארזים?

(2) מהו אחוז הרווח של בעל החנות ממכירת כל 200 המארזים?



2. שני קדקודים סמוכים במלבן ABCD הם $A(0, 6)$ ו- $B(4, 3)$.

א. מצא את השיפוע של הצלע AB.

ב. מצא את משוואת הצלע AD.

משוואת האלכסון BD היא $y = \frac{1}{2}x + 1$.

ג. מצא את שיעורי הקדקוד D.

ד. חשב את שטח המלבן ABCD.

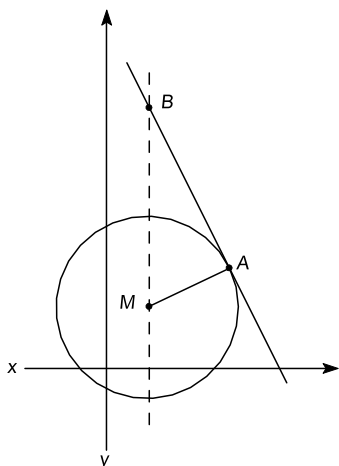
מונחים מתמטיים מעוברתים

אינטגרל - אִסְקָמַת , אינטגרציה - אִסְכּוּם , דיפרנציאלי - הִפְרָשִׁי, הִבְדָּלִי, מִבְדִּיל
מינימום / מינימלי - מִזְעָר / מִזְעָרִי , מקסימום / מקסימלי - מִרְבֵּ / מִרְבִּי , פולינום - רֶב־אֵיבָר

השאלות

1. א. (1) 68 ש (2) 66 ב. (1) 20,698 ש (2) 76.12%

2. א. $m_{AB} = -\frac{3}{4}$ ב. $y = 1\frac{1}{3}x + 6$ ג. $D(-6, -2)$ ד. $S_{ABCD} = 50$ (יחידות ריבועיות)



3. נתון מעגל שמרכזו $M(2, 3)$.

הישר $y = -2x + 17$ משיק למעגל בנקודה A.

א. מצא את משוואת הישר AM.

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודה A.

(2) מצא את משוואת המעגל.

הישר $x = 2$ חותך את המשיק בנקודה B.

ג. מצא את שיעורי הנקודה B.

ד. חשב את שטח המשולש AMB.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

4. נתונה הפונקציה $f(x) = -4x - \frac{1}{x} + 3$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

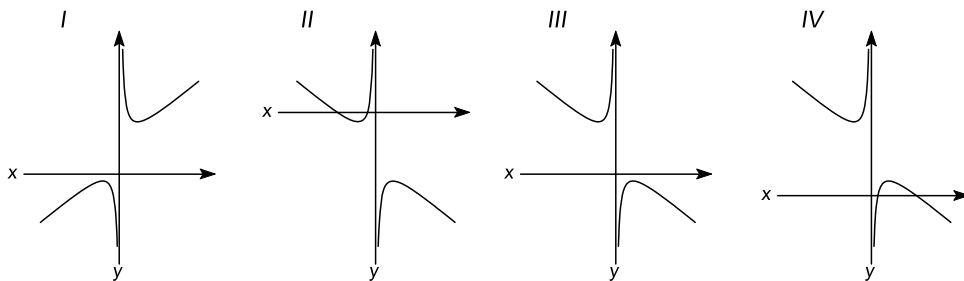
ב. מצא את האסימפטוטה המאונכת לציר x של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר x ?

אם כן - מצא את שיעורי נקודת החיתוך, אם לא - נמק.

ה. איזה מהגרפים שלפניך הוא גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.



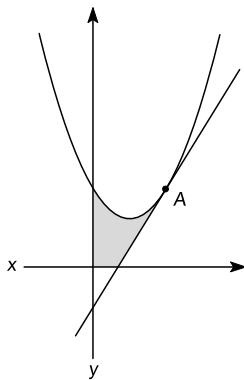
מאורעות נדירים שומרים לעצמם את הזכות להתרחש (מרטין גרדנר)

תהליך

3. א. $y = \frac{1}{2}x + 2$ ב. (1) $A(6, 5)$ (2) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 20$

ג. $B(2, 13)$ ד. $S_{\triangle AMB} = 20$ (יחידות ריבועיות)

4. א. $x \neq 0$ ב. $x = 0$ ג. $\min(-\frac{1}{2}, 7), \max(\frac{1}{2}, -1)$ ד. לא ה. III



5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 3x + 6$.

ונתון ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A שבה $x = 3$.

א. (1) מצא את שיפוע המשיק.

(2) מצא את משוואת המשיק.

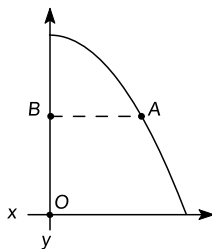
(3) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של המשיק עם ציר x.

ב. חשב את השטח האפור בציר:

השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $f(x)$,

על-ידי המשיק שאת משוואתו מצאת בסעיף א,

על-ידי ציר x ועל-ידי ציר y.



6. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$ ברביע הראשון.

ישר המקביל לציר x חותך את גרף הפונקציה

בנקודה A שנמצאת ברביע הראשון,

ואת ציר y בנקודה B.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מהו שיעור x של הנקודה A שעבורו המכפלה $AB \cdot BO$ היא מקסימלית?

ב. מצא את ערך המכפלה $AB \cdot BO$ עבור שיעור x שמצאת בסעיף א.

בהצלחה

זכות היצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

$$16^3 + 50^3 + 33^3 = 165,033$$

$$166^3 + 500^3 + 333^3 = 166,500,333$$

$$1,666^3 + 5,000^3 + 3,333^3 = 166,650,003,333$$

⋮

השאלות

5. א. (1) $m = 3$ (2) $y = 3x - 3$ (3) $(1, 0)$ ב. $S = 7\frac{1}{2}$ (יחידות ריבועיות)

6. א. $x_A = 2$ ב. $\max AB \cdot BO = 8$

פתרון - 382

1. א. (1) מחיר מארז פשוט היה 40 ש'. מארז מיוחד היה גבוה ב-70% ממחיר מארז פשוט.

$$\text{לכן מחירו היה } 170\% \text{ ממחיר מארז פשוט: } 68 \text{ ש'} = 40 \cdot \frac{170}{100} = 40 \cdot 170\%$$

(2) x - מספר המארזים הפשוטים $\Leftarrow x - 200$ - מספר המארזים המיוחדים

מחיר x מארזים פשוטים היה $40 \cdot x$ ומחיר $(200 - x)$ מיוחדים היה $68 \cdot (200 - x)$. לכן:

$$40x + 68(200 - x) = 11,752 \Rightarrow 40x + 13,600 - 68x = 11,752 \quad / -13,600$$

$$-28x = -1,848 \quad / : (-28) \Rightarrow x = 66 \text{ (מארזים פשוטים)}$$

ב. (1) מחיר המכירה של מארז פשוט היה 180% ממחיר הקניה שלו.

$$\text{לכן מחירו היה: } 72 \text{ ש'} = 40 \cdot \frac{180}{100} = 40 \cdot 180\%$$

מחיר המכירה של מארז מיוחד היה 175% ממחיר הקניה שלו.

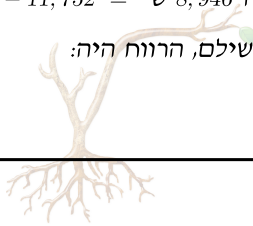
$$\text{לכן מחירו היה: } 119 \text{ ש'} = 68 \cdot \frac{175}{100} = 68 \cdot 175\%$$

$$66 \cdot 72 + 119 \cdot (200 - 66) = 4,752 + 119 \cdot 134 = 4,752 + 15,946 = 20,698 \text{ (שקלים).}$$

(2) הרווח של בעל החנות היה 8,946 ש' $= 20,698 - 11,752$

באחוזים, ביחס למחיר ששילם, הרווח היה:

$$\frac{8,946}{11,752} \cdot 100 = 76.12\%$$



2. א.

$$m_{AB} = \frac{6-3}{0-4} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{3}{4}$$

$$AD \perp AB \Rightarrow m_{AD} = \frac{4}{3}$$

$$A(0, 6) \Rightarrow y - 6 = \frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow y = 1\frac{1}{3}x + 6$$

$$\frac{1}{2}x + 1 = 1\frac{1}{3}x + 6 \quad / \cdot 6 \Rightarrow 3x + 6 = 8x + 36$$

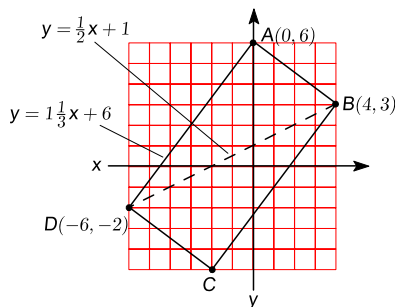
$$\Rightarrow 5x = -30 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot (-6) + 1 = -2 \Rightarrow D(-6, -2)$$

ד.

$$AB = \sqrt{(0-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$AD = \sqrt{(0-(-6))^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$S = AB \cdot AD = 5 \cdot 10 \Rightarrow S_{ABCD} = 50 \text{ (יחידות ריבועיות)}$$



3. א. tangent - משיק $m_{\text{tangent}} = -2$, $MA \perp \text{tangent} \Rightarrow m_{MA} = \frac{1}{2}$

$M(2, 3) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$

$y - 3 = \frac{1}{2}x - 1 \quad / + 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

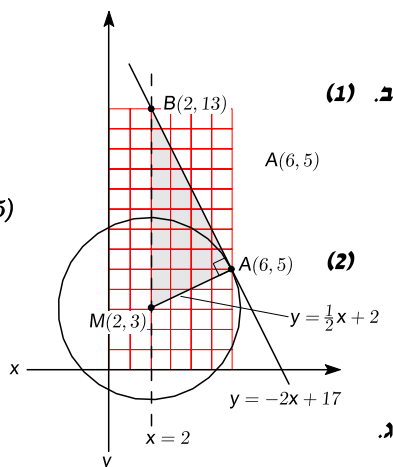
$-2x + 17 = \frac{1}{2}x + 2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow -4x + 34 = x + 4$

$5x = 30 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 6 + 2 = 5 \Rightarrow A(6, 5)$

$R^2 = (2 - 6)^2 + (3 - 5)^2 = 16 + 4 = 20$

$M(2, 3) \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 20$

$x = 2 \Rightarrow y = -2 \cdot 2 + 17 = 13 \Rightarrow B(2, 13)$



$AB = \sqrt{(2 - 6)^2 + (13 - 5)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$, $MA = R = \sqrt{20}$

$S_{\triangle AMB} = \frac{MA \cdot AB}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{80}}{2} \Rightarrow S_{\triangle AMB} = 20$ (יחידות ריבועיות)

4. א. $f(x) = -4x - \frac{1}{x} + 3$, $\frac{1}{x} \Rightarrow x \neq 0$

$f(0) = -4 \cdot 0 - \frac{1}{0} + 3 = 0 - \infty + 3 = \infty \Rightarrow x = 0$

$f'(x) = -4 - (-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2} - 4 = 0 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$

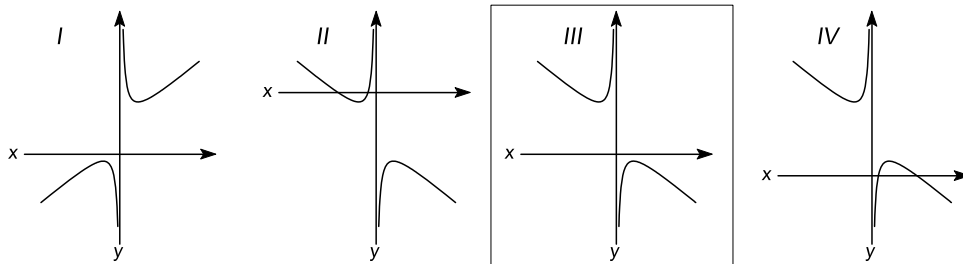
x		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
f'	-	0	+	∅	+	0	-
f	\	min	/	asym.	/	max	\

$f(-\frac{1}{2}) = 2 + 2 + 3 = 7 \Rightarrow \min(-\frac{1}{2}, 7)$
 $f(\frac{1}{2}) = -2 - 2 + 3 = -1 \Rightarrow \max(\frac{1}{2}, -1)$

ד. לא. ערך y מינימלי חיובי - הגרף ממשיך למעלה - אינו חותך את ציר x,

ערך y מקסימלי שלילי - הגרף ממשיך מטה - אינו חותך את ציר x. ראה להלן גרף III.

ה. $\min(-\frac{1}{2}, 7)$ ברביע השני, ו- $\max(\frac{1}{2}, -1)$ ברביע הרביעי - מתאים רק ל-III.



5. א. (1)

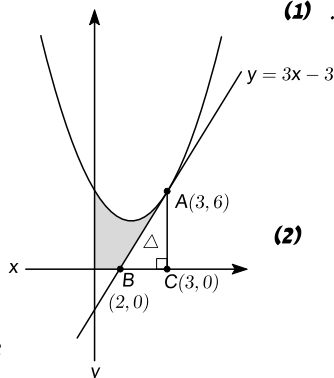
$$f(x) = x^2 - 3x + 6$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$m = f'(3) = 2 \cdot 3 - 3 \Rightarrow m = 3$$

$$f(3) = 9 - 9 + 6 = 6 \Rightarrow A(3, 6)$$

$$y - 6 = 3(x - 3) \Rightarrow y - 6 = 3x - 9 \quad / + 6 \Rightarrow y = 3x - 3$$



(2)

(3)

$$\underline{B}: y = 0 \Rightarrow 3x - 3 = 0 \Rightarrow x_B = 1 \Rightarrow B(1, 0)$$

ב. נחשב את כל השטח מ־ $x = 0$ עד $x = 3$ ונוריד משטח זה את שטח המשולש:

$$x_C = x_A = 3 \Rightarrow BC = x_C - x_B = 3 - 1 = 2, \quad AC = y_A = 6$$

$$S_{\Delta} = \frac{BC \cdot AC}{2} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$$

$$S = \int_0^3 (x^2 - 3x + 6) dx - S_{\Delta} = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x \right) \Big|_0^3 - 6$$

$$= (9 - \frac{27}{2} + 18) - 0 - 6 = 13\frac{1}{2} - 6 \Rightarrow S = 7\frac{1}{2} \quad (\text{יחידות ריבועיות})$$

6. א.

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 6 \Rightarrow A(x, -\frac{1}{2}x^2 + 6), \quad B(0, -\frac{1}{2}x^2 + 6)$$

$$AB = x_A = x, \quad BO = y_B = -\frac{1}{2}x^2 + 6$$

$$AB \cdot BO = x \cdot (-\frac{1}{2}x^2 + 6)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 6x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 3x^2 + 6 = -\frac{3}{2}x^2 + 6 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = 6 \quad / \cdot \frac{2}{3}$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2, \quad x > 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f''(x) = (-\frac{3}{2}x^2 + 6)' = -3x \Rightarrow f''(2) = -3 \cdot 2 < 0 \Rightarrow \max (\checkmark) \Rightarrow x_A = 2$$

ב.

$$\max AB \cdot BO = f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^3 + 6 \cdot 2 = -4 + 12 \Rightarrow \max AB \cdot BO = 8$$

