אלי מיטב

בגרויות מתמטיקה

571 - פתרונות מלאים

מספר מילים לפנֵי

ספר זה מכיל מבחני בגרות לשאלון 571 לפי התכנית החדשה של משרד החינוך. בספר זה 20 מבחנים: 6 מבחני דוגמה ועוד 14 מבחנים שנערכו בפועל, החל מקיץ 2020 ועד קיץ 2023. לכל שאלה מוצגת תשובה סופית בעמוד השאלה ופתרון מלא בצמוד לכל מבחן.

ספר זה יעודכן מידי שנה במבחנים שייערכו מידי שנה. ספר זה הוא עוד ספר של מבחני בגרות שיצאו בהוצאת שורש בתכנית היוצאת: משאלון 382 ועד שאלון 582. לשאלונים 481 ועד 582 יש גם גרסה של תשובות סופיות בלבד, ויש עוד שני ספרים של שאלות ממבחני בגרות המתאימות לכיתות י - 4 יחידות (481) ו־5 יחידות (581). ראו פרטים באתר ההוצאה.

שאלון זה מקביל לשאלון 581. בתקופת החפיפה בין שתי התוכניות, היו שאלות שהופיעו בשני השאלונים. שאלות אלו אינן נכללות בספר זה, מתוך הנחה שתלמידי שאלון 571 משתמשים גם בספר של 581.

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

$\forall$ - לכל , $\in$ - שייך , $\nearrow$ - עליה , $\searrow$ - ירידה , even - זוגי , odd - לא זוגי

$\cup$ - איחוד: היחס 'או' , $\cap$ - חיתוך: היחס 'וגם' , $\emptyset$ - קבוצה ריקה (אין פתרון)

$\surd$ - אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח , ab. - מוחלט , ep. - נקודת קָצֶה (end point)

$\{x=0\}$ - ציר y , $\{y=0\}$ - ציר x , $\exists$ - קיים , $\nexists$ - לא קיים. .

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל.
כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: ל**עופר ילין** מפתח תקוה שפתרונותיו נתרמו לאתר של משרד החינוך וגם בהם נעזרתי,
ל**שריף אמארה** מכפר זָלָפָה שהאיר פתרונות שלא חשבתי עליהם ושעמל על ההגהה,
ול**שרון חיים** מפתח תקוה שהכין את סיווג השאלות לפי נושאים.

את החללים שבין השאלות והפתרונות לְחַלַּחְתִּי בהבזקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקודות בעלות אופי **לאומי או יהודי**.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על־ידי חברת 'קל־ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה

אלי מיטב

<u>מבחן דוגמה 1</u>

בחירה: שלושה סעיפים מתוך ארבע בשאלה 1. שתי שאלות מתוך השאלות 2-4.

שתי שאלות מהשאלות 5-7.

<u>פרק ראשון - שאלות קצרות</u>

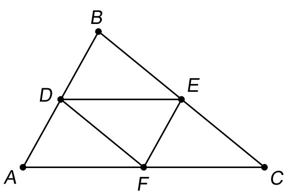
1. **א.** בסדרה מתקיים $a_{n+1} = a_n + 3n + 3n^2$.

(1) הוכח: אם עבור k טבעי מתקיים: $a_k = k^3 - k + 2$ אז $a_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) + 2$.

(2) האם מתשובתך לסעיף א(1) נובע שלכל n טבעי בסדרה מתקיים: $a_n = n^3 - n + 2$?

ב. טענה: אם זוויות α ו־ β במשולש מקיימות $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ אזי המשולש הוא שווה־שוקיים.

קבע 'נכון' או 'לא נכון'. אם קבעת 'נכון' - הוכח. אם קבעת 'לא נכון' - הבא דוגמה נגדית.



ג. בכל שלב במשחק מחשב מופיעה דמות במקום אקראי על

גבי משטח משולש. המשולש מחולק על־ידי שלושת

קטעי האמצעים לארבעה משולשים.

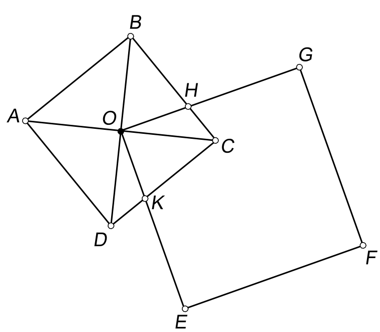
מה ההסתברות שהדמות תופיע בתוך המקבילית DFCE ?

ד. נתונות הפונקציות: $h(x) = \frac{x^3-1}{(x-2)(x+1)}$, $g(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}$

לאיזו פונקציה מהפונקציות הנתונות יש את התכונות הבאות:

שתי נקודות אי־הגדרה, אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת.

נמק על־ידי הסבר להתאמה ועל־ידי שלילת האחרות.



<u>פרק שני - גאומטריה, טריגונומטריה, הסתברות</u>

2. אלכסוני הריבוע ABCD נפגשים בנקודה O.

הנקודה O היא קדקוד הריבוע OEFG, ששתים מצלעותיו

חותכות את צלעות הריבוע ABCD בנקודות H ו־ K.

א. הוכח: $\triangle OKD \cong \triangle OHC$.

ב. מהו היחס בין שטח הריבוע ABCD לשטח המרובע OHCK ?

ג. הוכח כי המרובע OHCK ניתן לחסימה במעגל.

ד. שטח הריבוע ABCD הוא 64. $CH = 2$.

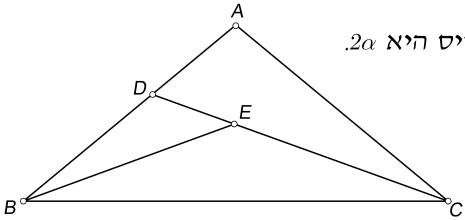
מצא את אורך רדיוס המעגל החוסם את המרובע OHCK.

תשובות

1. **א.** **(2)** לא **ב.** לא **ג.** $P = \frac{1}{2}$ **ד.** $f(x)$

2. **ב.** $S_{ABCD} : S_{OHCK} = 4 : 1$ **ג.** $R = \sqrt{10}$ (יחידות אורך)

3. (806 - חורף תשע״ו - 2016)



במשולש שווה־שוקיים ABC $(AB = AC)$ זווית הבסיס היא 2α.

הנקודה E היא מפגש חוצי־הזוויות במשולש ABC.

המשך CE חותך את הצלע AB בנקודה D.

$\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$, $\angle BAC > 90^\circ$.

א. מצא את α.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC

ובין רדיוס המעגל <u>החסום</u> במשולש ABC.

ג. נתון כי ההפרש בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC

ובין רדיוס המעגל <u>החסום</u> בו הוא 2_{cm}. מצא את אורך הקטע AE.

4. חלק מקבוצת תלמידים חובשים כובעים.

אם בוחרים באקראי 6 תלמידים, ההסתברות שבדיוק שלושה מהם חובשים כובעים,

מהווה $\frac{8}{9}$ מההסתברות שבדיוק שניים מהם חובשים כובעים.

א. בוחרים באקראי תלמיד. מהי ההסתברות שהוא חובש כובע?

ב. נבחרו באקראי 6 תלמידים.

(1) מהי ההסתברות שרוב התלמידים שנבחרו <u>אינם</u> חובשים כובעים?

(2) מהי ההסתברות שהתלמיד שנבחר שֵׁנִי חובש כובע,

אם ידוע שרוב התלמידים שנבחרו <u>אינם</u> חובשים כובעים?

(3) מהי ההסתברות שרוב התלמידים שנבחרו <u>אינם</u> חובשים כובעים,

אם ידוע שהתלמיד הראשון שנבחר חובש כובע?

השורה התחתונה בכל עמודה היא סכום שני המספרים שמעליה.

שלושת המספרים התלת־ספרתיים שבכל שמונת הטורים מכיל את כל הספרות מ־ 1 עד 9 .

הפרשם הסכומים בשורה התחתונה קבוע, והוא שווה ל־ 9 .

243	341	154	317	216	215	318	235
<u>675</u>	<u>586</u>	<u>782</u>	<u>628</u>	<u>738</u>	<u>748</u>	<u>654</u>	<u>746</u>
918	927	936	945	954	963	972	981

תשובות

3. **א.** $\alpha = 20^\circ$ **ב.** $\frac{R}{r} = 2.79$ **ג.** $AE = 1.46_{cm}$

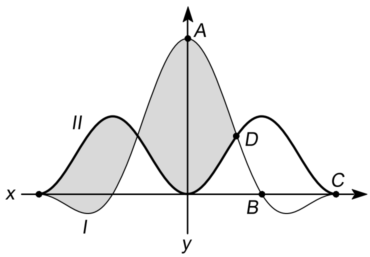
4. **א.** $P = \frac{2}{5}$ **ב.** **(1)** $P = \frac{1701}{3125} = 0.54432$ **(2)** $P = \frac{26}{105}$ **(3)** $P = \frac{1053}{3125}$

פרק שלישי - סדרות, חדו"א של פולינומים, של פונקציות שורש, רציונליות וטריגונומטריות

5. נתונות הפונקציות: $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ ו־ $g(x) = f(x - \frac{\pi}{2})$.

א. קבע עבור כל אחת מהפונקציות אם היא 'זוגית', 'לא־זוגית' או 'אחרת'

(לא 'זוגית ולא 'לא־זוגית'). נמק.



ב. בסרטוט שני גרפים: I ו־ II. אחד מהם מתאים

לפונקציה $g(x)$ והאחר לאחת משתי הפונקציות:

$h(x) = a \cdot \sin^2 x$ או $k(x) = a \cdot \cos^2 x$.

(1) קבע איזה גרף מתאים לאיזו פונקציה. נמק.

(2) $D\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$ היא נקודת חיתוך בין שני הגרפים,

הקרובה ביותר לציר y, מימינו. מצא את ערך הפרמטר a.

(3) A, B ו־ C בסרטוט הן נקודות החיתוך של גרף I עם הצירים בתחום $0 \le x \le \pi$.

מצא את שיעורי נקודות אלו.

ג. חשב את השטח האפור שבסרטוט.

6. (806 - חורף תשע"ט - 2019 (חוץ מסעיף ד))

נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+3}$ ובה $2n+3$ איברים (n מספר טבעי).

סכום הסדרה גדול פי 43 מן האיבר האמצעי. האיבר האמצעי שונה מ־ 0.

א. **(1)** הראה כי סכום הסדרה שווה ל־ $(2n+3) \cdot a_{n+2}$.

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה.

ב. ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים

גדול ב־40 מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(1) מצא את האיבר האמצעי. **(2)** מצא את סכום הסדרה.

נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא $-a_1$.

ג. קבע אם הסדרה עולה או יורדת.

מצא שלושה מספרים a , b ו־c כך ש: $a + b + c + ab + ac + bc + abc = 1000$
תשובה (בצופן א"ת ב"ש): בב באמי זבגצ זבג

תשובות

5. **א.** f - אחרת , g - זוגית **ב.** **(1)** $I = g$, $II = h$ **(2)** $a = 1$ **(3)** $A(0,2)$, $B(\frac{\pi}{2}, 0)$, $C(\pi, 0)$

ג. $S = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ (יחידות ריבועיות)

6. **א.** **(2)** $2n+3 = 43$ **ב.** **(1)** $a_{22} = 40$ **(2)** $S_{43} = 1720$ **ג.** עולה

7. א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x) = ax^3 - 1$ עבור: $a > 0$ ועבור $a < 0$.
היעזר בפונקציה $y = x^3$.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{ax^3 - 1}$, $a > 0$.

ענה על סעיף ב. אם יש צורך - הבע בעזרת a.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(3) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון: $a = 1$.

מהו נפח גוף הסיבוב הנוצר מסיבוב סביב ציר x של השטח המוגבל על־ידי גרף הפונקציה $f(x)$,
על־ידי ציר x ועל־ידי האנך לציר x בנקודת הקיצון של הפונקציה?

בהצלחה

לפניכם כל המספרים הטבעיים מ־1 עד 17 , מופע אחד לכל מספר, מסודרים כך שסכום כל שני מספרים סמוכים הוא ריבוע של מספר טבעי (ריבוע יכול להופיע יותר מפעם אחת).

$16\ ,\ 9\ ,\ 7\ ,\ 2\ ,\ 14\ ,\ 11\ ,\ 5\ ,\ 4\ ,\ 12\ ,\ 13\ ,\ 3\ ,\ 6\ ,\ 10\ ,\ 15\ ,\ 1\ ,\ 8\ ,\ 17$

Matt Parker, מתמטיקאי אוסטרלי, שמשלב בין מתמטיקה לבידור, הציג חידה זו עבור המספרים מ־1 עד 16,
אבל, כפי שאתם רואים - כשיש את הפתרון עבור 16 - אז עבור 17 ההצגה היא מיידית.
ישנן הצגות נוספות למחרוזות כאלו באורכים גדולים יותר.
ידידי, גדי וישנה, בדק עד אורך 40 ועצר בגלל התארכות המשך הבדיקה על־ידי המחשב.
הוא מצא גם שהמעגל הראשון שמקיים תכונה זו הוא באורך 32:

$1, 8, 28, 21, 4, 32, 17, 19, 30, 6, 3, 13, 12, 24, 25, 11, 5, 31, 18, 7, 29, 20, 16, 9, 27, 22, 14, 2, 23, 26, 10, 15, 1,\ \ldots$

תשובות

7. ב. (1) $(0,0)$ **(2)** $y = 0$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

(3) $\nearrow:\ x < -\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}$, $\searrow:\ (-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{a}}) \cup (x > \frac{1}{\sqrt[3]{a}})$

ג. $V = \frac{\pi}{9} = 0.3491$ (יחידות קוב)

פתרון מבחן דוגמה 1

1. א. (1)

$$a_{n+1}=a_n+3n+3n^2 \quad , \quad a_k=k^3-k+2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{a_{k+1}=(k+1)^3-(k+1)+2}_{\text{צריך להוכיח}}$$

$$a_{k+1}=(k+1)^3-(k+1)+2=k^3+3k^2+3k+1-k-1+2$$

$$=\underline{k^3-k+2}+3k^2+3k \iff \mathbf{a_{k+1}=\underline{a_k}+3k+3k^2} \quad (\checkmark)$$

(2) <u>לא</u>.

סעיף א(1) 'ביצע' את השלב השלישי בהוכחה אינדוקטיבית,

אבל לא נערכה בדיקה עבור המקרה הראשון שבו $n=1$.

ב. <u>לא</u>. דוגמה נגדית: $\alpha=20^\circ$, $\beta=70^\circ$, $\gamma=90^\circ$ מתקיים: $\sin 40^\circ=\sin 140^\circ$

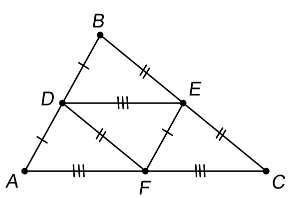
$$\sin 2\alpha=\sin 2\beta \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (1)\ \ 2\alpha=2\beta+360^\circ k \ \Rightarrow\ \alpha=\beta+180^\circ k \ \Rightarrow\ \alpha=\beta \\ (2)\ \ 2\alpha=180^\circ-2\beta+360^\circ k \ \Rightarrow\ \alpha=90^\circ-\beta+180^\circ k \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow\ \alpha=90^\circ-\beta \end{array}$$

ג. קטע אמצעים שווה למחצית הצלע השלישית.

לכן ארבעת המשולשים חופפים על־פי צלע־צלע־צלע.

שטח המקבילית הוא שטח שני משולשים מתוך ה־4.

לכן ההסתברות היא חצי: $\mathbf{P=\frac{1}{2}}$.



ד. ל־ $g(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ יש שתי אסימפטוטות אנכיות: $x=\pm 2 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to\pm 2} g(x)=\frac{4}{0}=\infty \ \Leftarrow\ \times$

ל־ $h(x)=\frac{x^3-1}{(x-2)(x+1)}$ אין אסימפטוטה אופקית:

דרגת פולינום המונה (3) גדולה מדרגת פולינום המכנה (2) $\Leftarrow\ \times$

ל־ $\boxed{\mathbf{f(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}}}$ יש את כל האיפיונים הנדרשים. $x\neq -1$, $x\neq -2$

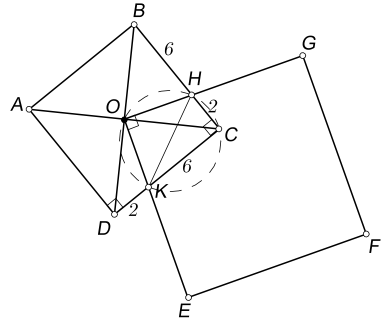
$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+2}=\frac{-2}{1}=-2 \quad \Rightarrow \quad (-1,-2)$$ אי־רציפות סליקה ('חור')

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{\to 3}{\to 0}=\infty \quad \Rightarrow \quad asym.:\ x=-2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{{}^{1}\cancel{x^2}(1-\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}=\frac{1-0}{1+0+0}=1 \quad \Rightarrow \quad asym.:\ \ y=1$$

> **לטעות זה אנושי.**
>
> **לתאוט זה דיסלקציה.**
>
> **לטאות זה כמו איגואנות, רק פחות מגניב.**

2. א.



$OD \overset{(1)}{=} OC \quad , \quad \angle ODK \overset{(1)}{=} OCH \; (=45^\circ)$

$\angle DOK + \underline{\angle KOC} = \angle COH + \underline{\angle KOC} \overset{(1)}{=} 90^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle DOK = \angle COH \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \boldsymbol{\triangle OKD \cong \triangle OHC} \;\; (\checkmark)$

ב.

$S_{\triangle OKD} = S_{\triangle OHC} \quad \Rightarrow \quad S_{OHCK} = S_{\triangle COD} \overset{(1)}{=} S_{\triangle COB} = S_{\triangle BOA} = S_{\triangle AOD}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S_{ABCD} : S_{OHCK} = 4:1}$

ג.

$(3) \;\; \angle HCK = \angle HOK = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle HCK + \angle HOK = 180^\circ \quad \overset{(4)}{\Rightarrow} \;\; \checkmark$

ד.

$BC^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad BC = 8 = DC \;\; , \;\; DK \overset{(5)}{=} CH = 2 \quad \Rightarrow \quad KC = 8-2 = 6$

$\underline{\triangle HCK:} \;\; HK \overset{(6)}{=} \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \overset{(7)}{=} 2R \quad \overset{(8)}{\Rightarrow} \;\boldsymbol{R = \sqrt{10}}$ **(יחידות אורך)**

---

(1) אלכסוני ריבוע שווים זה לזה, חוצים זה את זה, חוצים את זוויות הריבוע ומאונכים זה לזה

(2) משפט חפיפה זווית־צלע־זווית (3) זוויות ריבוע - ישרות

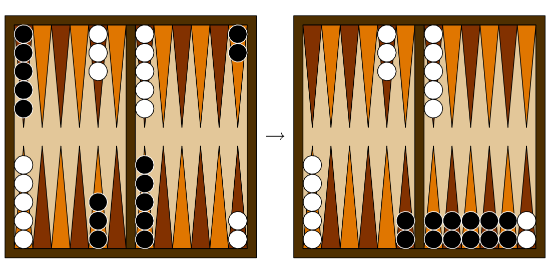
(4) זוויות נגדיות במרובע משלימות ל־ 180° - תנאי הכרחי ומספיק לחסימת מרובע במעגל

(5) צלעות מתאימות במשולשים חופפים (6) פיתגורס

(7) זווית היקפית ישרה במעגל נשענת על קוטר

(8) המעגל החוסם את המשולש הוא גם המעגל החוסם את המרובע

בציור השמאלי מתואר מצב הפתיחה בשש־בש.



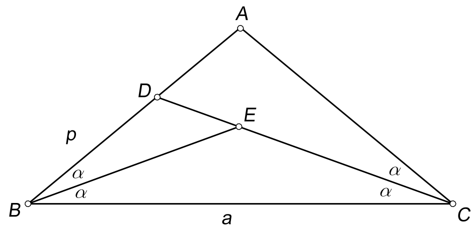
כיצד יכול השחור, על־ידי שלוש הטלות של קוביות לסגור את הלבן כמתואר בציור הימני.

השחור יכול לבחור כל תוצאת הטלה שירצה.

הלבן אינו מגיב.

שלושה כלים שחורים נגרעו מהציור הימני בכוונה, שלא לסייע בפתרון . . .

3. א. סימון: $BC = a\ ,\ BD = p$



$\underline{\triangle DBC:}$ $(1)\ \angle D = 180^\circ - 3\alpha$

$(2)\ \frac{p}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} \overset{(3)}{=} \frac{a}{\sin 3\alpha}$

$\Rightarrow\ \frac{a}{p} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$

$(4)\ \frac{a}{p} = \frac{CE}{DE} \overset{(5)}{=} \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$

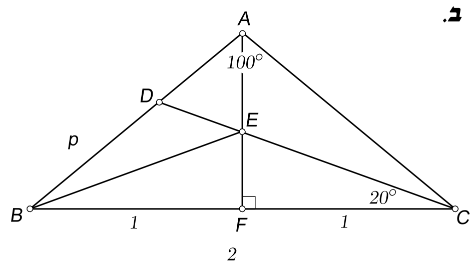
$(6)\ \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \sin 3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$

1. $3\alpha = 60^\circ + 360^\circ k \quad \Rightarrow \quad \alpha = 20^\circ + 120^\circ k \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \boldsymbol{\alpha = 20^\circ}$ ✓

2. $3\alpha = 180^\circ - 60^\circ + 360^\circ k \quad \Rightarrow \quad \alpha = 40^\circ + 120^\circ k \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \times$

$(*)\ \angle BAC \overset{(1)}{=} 180^\circ - 4\alpha \overset{(5)}{>} 90^\circ \quad \Rightarrow \quad 4\alpha < 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha < 22.5^\circ$

ב.



$(7)\ BC = 2\ ,\ (8)\ AF \perp BC$

$(9)\ BF = FC = 1\ ,\ (10)\ EF = r$

$\underline{\triangle EFC:}$ $\text{tg } 20^\circ = \frac{EF}{1} \quad \Rightarrow \quad EF = \text{tg } 20^\circ$

$\underline{\triangle ABC:}$ $(2)\ \frac{2}{\sin 100^\circ} = 2R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{\sin 100^\circ}$

$\frac{R}{r} = \frac{1}{\sin 100^\circ} : \text{tg } 20^\circ = \frac{1}{\sin 100^\circ\ \text{tg } 20^\circ} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{R}{r} = 2.79}$

ג.

$\frac{R}{r} = 2.79 \quad \Rightarrow \quad R = 2.79r \quad \Rightarrow \quad R - r = 2.79r - r = 1.79r \overset{(5)}{=} 2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{1.79} = 1.12$

$\underline{\triangle EFC:}$ $\text{tg } 20^\circ = \frac{EF}{FC} = \frac{1.12}{FC} \quad \Rightarrow \quad FC = \frac{1.12}{\text{tg } 20^\circ} = 3.08$

$\underline{\triangle AFC:}$ $\text{tg } 40^\circ = \frac{AF}{FC} = \frac{AF}{3.08} \quad \Rightarrow \quad AF = 3.08 \cdot \text{tg } 40^\circ = 2.58$

$AE = AF - EF = 2.58 - 1.12 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{AE = 1.46_{cm}}$

---

(1) השלמה ל־180° במשולש   (2) משפט הסינוסים   (3) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

(4) משפט חוצה זווית במשולש   (5) נתון   (6) כלל המעבר

(7) קביעה ללא הגבלת הכלליות

(8) בנית עזר. מפגש חוצי־זוויות במשולש שווה־שוקיים נמצא על הגובה לבסיס (הנקודה E)

(9) גובה לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם תיכון

(10) מפגש חוצי־זוויות במשולש הוא מרכז המעגל החסום בו

4. א. הגדרת מאורע: A - חובש כובע. סימון: $P(A)=x$

$$P_6(3)=\frac{8}{9}\cdot P_6(2) \quad\Rightarrow\quad \binom{6}{3}\cdot x^3\cdot(1-x)^3=\frac{8}{9}\cdot\binom{6}{2}\cdot x^2\cdot(1-x)^4 \quad\Rightarrow\quad 20\cdot x=\frac{8}{9}\cdot 15\cdot(1-x)$$

$$20x=\frac{8}{3}\cdot 5(1-x) \quad\Rightarrow\quad 60x=40-40x \quad\Rightarrow\quad 100x=40 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P(A)=\frac{2}{5}}$$

ב. (1) המאורע שקול לאיחוד המאורעות:

0 חובשים כובעים, 1 בדיוק חובש כובע, 2 בדיוק חובשים כובע

$$P=P_6(0)+P_6(1)+P_6(2)=\left(\frac{3}{5}\right)^6+\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^5+\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4$$

$$=\frac{729}{15{,}625}+6\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{243}{3125}+15\cdot\frac{4}{25}\cdot\frac{81}{625}=\frac{729}{15{,}625}+\frac{2916}{15{,}625}+\frac{972}{3125} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P=\frac{1701}{3125}=0.54432}$$

(2) ההסתברות שהשני חובש כובע היא $P(A_2)=\frac{2}{5}$.

אם הרוב <u>אינם</u> חובשים כובע, זה אומר שבדיוק 0 או אחד משאר ה־5 חובשים כובע:

$$P_5(0)+P_5(1)=\left(\frac{3}{5}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{243}{3125}+\frac{162}{625}=\frac{1053}{3125}$$

$$P=P(A_2/\text{most }\overline{A})=\frac{P(A_2\cap\text{most }\overline{A})}{P(\text{most }\overline{A})}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1053}{3125}}{\frac{1701}{3125}}=\frac{2\cdot 1053}{5\cdot 1701} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P=\frac{26}{105}}$$

(3) המאורע שקול לכך שמה־5 שנותרו:

בדיוק 0 מהם חובשים כובע או בדיוק 1 מהם חובש כובע

$$P_5(0)+P_5(1)=\left(\frac{3}{5}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{243}{3125}+\frac{162}{625} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P=\frac{1053}{3125}}$$

אז זהו, שלא

על השאלות שבהן אנו נדרשים למצוא את האיבר בסדרה שבה נתנוים איבריה הראשונים,
ניתן לענות תשובות רבות - כמעט ככל שנחפוץ.
הביטו למשל בסדרות הבאות. מהו האיבר הבא בכל אחת מהן?
לא ניתן לענות תשובה מהו האיבר החמישי בכל אחת מהסדרות להלן:

$$(1)\ \ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots \qquad (2)\ \ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots \qquad (3)\ \ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \qquad (4)\ \ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$$

ברור שהתשובות המצופות הן: $(1)\ 0 \quad (2)\ 1 \quad (3)\ 5 \quad (4)\ 16$

אבל זה ממש לא מוכרח. הנה לכם נימוק מדוע בכל אחת מהסדרות, האיבר הבא הוא π:

$$(1)\quad a_n=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\pi \quad\Rightarrow\quad 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \pi\ ,\ \ldots$$

$$(2)\quad a_n=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\pi-1)}{24}+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \quad\Rightarrow\quad 1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ \pi\ \ldots$$

$$(3)\quad a_n=\frac{n+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\pi-5)}{24} \quad\Rightarrow\quad 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ \pi\ ,\ \ldots$$

$$(4)\quad a_n=2^{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\pi-16)}{24} \quad\Rightarrow\quad 1\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ \pi\ ,\ \ldots$$

הנה עוד דוגמה: מה האיבר הבא בסדרה $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$. **אז זה ממש לא חייב להיות** 9 **(הצפוי).**
זה יכול להיות, למשל $217{,}341$. **איך? הנה, כך:**

$$a_n=\frac{18{,}111}{2}n^4-90{,}555n^3+\frac{633{,}885}{2}n^2-452{,}773n+217331 \quad\Rightarrow\quad 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 217341,\ \ldots$$

5. א.

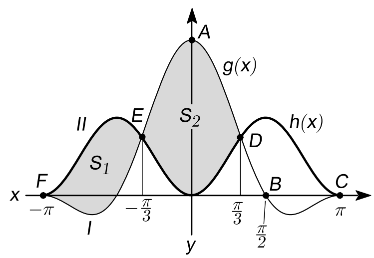
$f(x)=\sin^2 x-\sin x \quad , \quad g(x)=f(x-\frac{\pi}{2})$

$f(-x)=\sin^2(-x)-\sin(-x)=(-\sin x)^2-(-\sin x)=\sin^2 x+\sin x \neq \begin{matrix} f(x) \\ -f(x)\end{matrix} \quad \Rightarrow$ **f : 'אחרת'**

$\sin(x-\frac{\pi}{2})=-\sin(-(x-\frac{\pi}{2}))=-\sin(\frac{\pi}{2}-x)=-\cos x \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(x)=\cos^2 x+\cos x}$

$g(-x)=\cos^2(-x)+\cos(-x)=\cos^2 x+\cos x=g(x) \quad \Rightarrow$ **g : 'זוגית'**

ב. (1)



$h(x)=a\cdot\sin^2 x \quad , \quad k(x)=a\cdot\cos^2 x$

$g(0)=1+1=2=y_A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I=g}$

$h(0)=0 \ , \ k(0)=a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{II=h}$

(2)

$D\ (\frac{\pi}{3},\frac{3}{4}) \quad \Rightarrow \quad h(\frac{\pi}{3})=a\cdot\sin^2(\frac{\pi}{3})=a\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=a\cdot\frac{3}{4}\underset{\text{נתון}}{=}\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a=1}$

(3)

<u>A :</u> $x=0 \quad \Rightarrow \quad y=g(0)=1+1=2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A\ (0,2)}$

<u>B , C :</u> $y=0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x+\cos x=0 \quad \Rightarrow \quad \cos x\,(\cos x+1)=0$

$(1)\ \ \cos x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}$

$(2)\ \ \cos x=-1 \quad \Rightarrow \quad x=\pi+2k\pi \quad \Rightarrow \quad x=\pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B\ (\frac{\pi}{2},0)\ ,\ C(\pi,0)}$

ג.

$x_F=-x_C=-\pi \ , \ x_E=-x_D=-\frac{\pi}{3} \quad : g(x)\ ,\ h(x)$ זוגיות

$S_1=\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}}(h(x)-g(x))\,dx \overset{(*)}{=} (-\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x)\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}}$

$=(-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})-(-\frac{\sqrt{3}}{2}))-(-\frac{1}{2}\cdot 0-0)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$S_2=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(g(x)-h(x))\,dx=(\frac{1}{2}\sin 2x+\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})-(\frac{1}{2}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-\frac{\sqrt{3}}{2}))=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{6\sqrt{3}}{4}$

$S=S_1+S_2=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{6\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S=\frac{9\sqrt{3}}{4}=3.8971}$ **(יחידות ריבועיות)**

$(*)\ \ \int(\sin^2 x-(\cos^2 x+\cos x))\,dx=\int(-(\cos^2 x-\sin^2 x)-\cos x))\,dx$

$=\int(-\cos 2x-\cos x)\,dx=-\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x+c$

6. א. (1)

$a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{2n+3}$

אמצע של $2n+3$ איברים הוא המקום ה־ $n+2$: $(n+1)\ \overset{\downarrow}{\circ}\ (n+1)$

$$S_{2n+3}=\frac{2n+3}{2}(2a_1+d(2n+2))=\frac{2n+3}{2}\cdot 2(a_1+d(n+1))$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{S_{2n+3}=(2n+3)\cdot a_{n+2}}\quad (\checkmark)$$

(2)

$$S_{2n+3}=43\cdot a_{n+2}=(2n+3)\cdot a_{n+2}\quad /:a_{n+2}\neq 0\quad\Rightarrow\quad \mathbf{2n+3=43}$$

ב. (1) even - זוגי , odd - לא־זוגי

האיבר האמצעי הוא $a_{22}=a_1+21d$

$$2n+3=43\quad\Rightarrow\quad N_{even}=21\ ,\ N_{odd}=22$$

$$\underbrace{S_{even}+40=S_{odd}}_{\text{נתון}}\quad\Rightarrow\quad \frac{21}{2}(2a_2+2d\cdot 20)+40=\frac{22}{2}(2a_1+2d\cdot 21)$$

$$21(a_1+d+20d)+40=22(a_1+21d)\quad\Rightarrow\quad 21\cdot a_{22}+40=22\cdot a_{22}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{a_{22}=40}$$

(2)

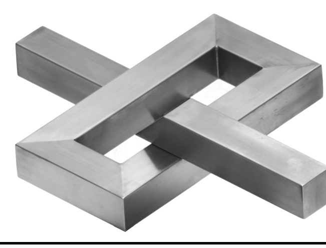
$$S=S_{43}=(2n+3)\cdot a_{n+2}=43\cdot a_{22}=43\cdot 40\quad\Rightarrow\quad \mathbf{S=1720}$$

ג.

$$a_{22}=40\quad\Rightarrow\quad a_1+21d=40$$

$$a_1+21d=40\ ,\ \underbrace{d=-a_1}_{\text{נתון}}\quad\Rightarrow\quad -20a_1=40\quad\Rightarrow\quad a_1=-2$$

$$d=-a_1=-(-2)=2\quad\Rightarrow\quad d>0\quad\Rightarrow\quad \nearrow$$ **(עולה)**



רק הוכחה היא הוכחה

עד כמה אין לסמוך על דוגמאות כדי להסיק מסקנות, ואפילו הן רבות מאוד, ניתן ללמוד מהתופעה שנתאר כעת.
פרט ל־ 2 , כל המספרים הראשוניים הינם פרדיים (לא־זוגיים, או 'פרטיים'). ואלה נחלקים לשתי קבוצות:
המספרים שגדולים ב־1 מכפולה של 4: $4n+1$ והמספרים שקטנים ב־1 מכפולה של 4 : $4n-1$.
בבדיקה של המספרים הראשונים הראשונים, נראה שיש יותר מספרים ראשוניים בקבוצה של 'קטנים ב־1' מאשר בקבוצה של 'גדולים ב־1'. כך נמשכת התופעה עד מיליארד. ואולם - האבחנה הזאת אינה נכונה!
אנשי תורת המספרים הראו בשיטות עקיפות כי כאשר המספרים הראשוניים נעשים גדולים דיָם, הרי שיש יותר מספרים ראשוניים בקבוצה של 'גדולים ב־1' מאשר בקבוצה האחרת.
ההוכחה לעובדה זו פעלה רק כאשר המספרים היו גדולים מ־ $10^{10^{10^{10^{46}}}}$. זהו מספר בלתי נתפס. לו כל החומר ביקום היה הופך לנייר והיינו רושמים על כל אלקטרון אפס אחד בלבד - לא היינו מכסים אפילו חלק קטן מהאפסים של מספר זה ! ! !

7. א.

x^3-1 מעתיק את גרף הפונקציה x^3 שֶׁנֶת אחת מטה.

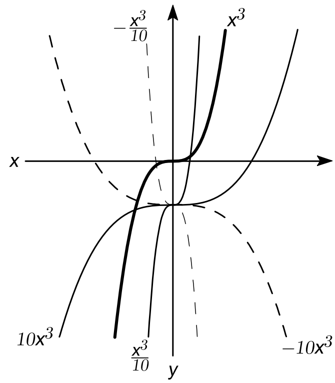
$0<a<1$ מֵצֵר (מכווץ) את רוחב הגרף.

$a>1$ ׳מותח׳ את בגרף לרוחב.

$a<0$ הופך את הגרף ב־ 180° סביב ציר x. בנוסף:

$-1<a<0$ מֵצֵר (מכווץ) את רוחב הגרף.

$a>-1$ ׳מותח׳ את הגרף לרוחב.



ב. (1)

$$f(x)=\frac{x}{ax^3-1}\ ,\ a>0\ ,\ x=0\ \Rightarrow\ y=0\ \Rightarrow\ \mathbf{(0,0)}$$

(2)

$$ax^3-1\neq 0\ \Rightarrow\ x\neq\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\ ,\ \lim_{x\to\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}\frac{x}{ax^3-1}=\to\frac{\neq 0}{0}=\infty\ \Rightarrow\ \mathbf{x=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{ax^3-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}^{\,1}}{\cancel{x}(ax^2-\frac{1}{x})}=\frac{1}{(\infty-0)}=\frac{1}{\infty}=0\ \Rightarrow\ \mathbf{y=0}$$

(3)

$$f'(x)=\frac{1\cdot(ax^3-1)-3ax^2\cdot x}{(ax^3-1)^2}=\frac{ax^3-1-3ax^3}{(ax^3-1)^2}=\boxed{\frac{-2ax^3-1}{(ax^3-1)^2}}\quad 0$$

$$\Rightarrow\ -2ax^3=1\ \Rightarrow\ x^3=-\frac{1}{2a}\ \Rightarrow\ x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}$$

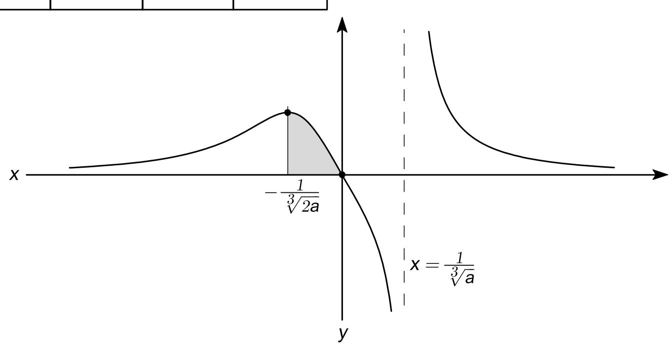
x		$-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}$		$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$	
f'	$\frac{+}{+}=+$	0	$\frac{-}{+}=-$	$\emptyset$	$\frac{-}{+}=-$
f	↗	max	↘	asym.	↘

$\Rightarrow$

$\nearrow$: $\mathbf{x<-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}}$

$\searrow$: $\mathbf{(-\frac{1}{\sqrt[3]{2a}}<x<\frac{1}{\sqrt[3]{a}})\cup(x>\frac{1}{\sqrt[3]{a}})}$

(4)



ג.

$$V=\pi\int_{-\sqrt[3]{0.5}}^{0}\frac{x^2}{(x^3-1)^2}dx\overset{(*)}{=}-\frac{\pi}{3(x^3-1)}\Bigg|_{-\sqrt[3]{0.5}}^{0}=\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{3(-0.5-1)})$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3\cdot(-1.5)}=\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{9}=\frac{3\pi-2\pi}{9}\ \Rightarrow\ \mathbf{V=\frac{\pi}{9}=0.3491}$$ **(יחידת קוב)**

$$(*)\ x^3-1=u\ \Rightarrow\ 3x^2dx=du\ \Rightarrow\ \int\frac{x^2}{(x^3-1)^2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{u^2}du=\frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{u})+c=-\frac{1}{3(x^3-1)}+c$$

מבחן 20 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד ב

בחירה: חמש שאלות מהשאלות 1-8. לפחות שאלה אחת מכל פרק.

בשאלה 1: שלושה סעיפים מתוך ארבעה.

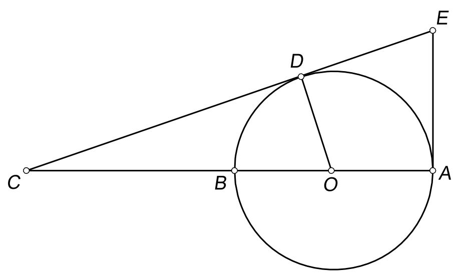
פרק ראשון - שאלות קצרות

מבחן זה זהה למבחן שנערך לשאלון 581 במועד זה למעט השאלה הראשונה שהוחלפה, להלן.

1. א. עבור כל n טבעי, הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת כי מתקיים:

$$\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+\ \dots\ +\frac{A}{2^n}=A\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

A הוא פרמטר.



ב. הנקודה B היא אמצע הקטע AC.

AB הוא קוטר במעגל

שמרכזו O ורדיוסו R.

מן הנקודה C מעבירים ישר

המשיק למעגל בנקודה D.

בנקודה A מעבירים משיק נוסף למעגל.

שני המשיקים נחתכים בנקודה E.

(1) הוכח כי המרובע $AODE$ הוא בר־חסימה במעגל.

(2) הבע באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המרובע $AODE$.

מגדלי האנוי

החידה אודות מגדלי האנוי היא אולי החידה המפורסמת ביותר במתמטיקה.

חיבר אותה מתמטיקאי צרפתי בשם **אדוארד לוקה** (Edouadrd Lucas , 1842–1891).

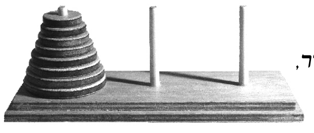
מציע לחפש אותה ברשת. במקור החידה על 64 טבעות. מספר הצעדים על מנת לפתור

את החידה הוא $2^{64}-1$. מספר זה הוא המספר: $18,446,744,073,709,551,615$.

בשניות זה למעלה מ־580 מיליארד שנים . . .

אם נניח מטבעות של 5 שקלים זה על גב זה - גובהם יהיה כארבע שנות אור,

הרחק הרחק ממערכת השמש שלנו . . .



תשובות

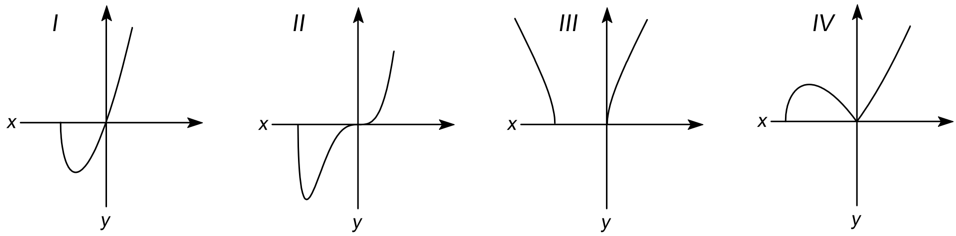
1. ב. (2) $r=\frac{\sqrt{3}}{2}R$

ג. לפניך שלוש פונקציות וארבעה גרפים.

כל אחת מהפונקציות מתוארת על־ידי אחד מן הגרפים.

$f(x)=\sqrt{x^2(x+2)}$, $h(x)=\sqrt{x(x+2)}$, $k(x)=x\sqrt{x+2}$

(1) עבור כל אחת מן הפונקציות, קבע איזה מן הגרפים מתאר אותה. נמק.



נתונה הפונקציה $g(x)=x^n\sqrt{x+2}$, n הוא פרמטר טבעי גדול מ־ 1.

(2) מצא עבור אילו ערכי n, הגרף הנותר מתאר את הפונקציה $g(x)$.

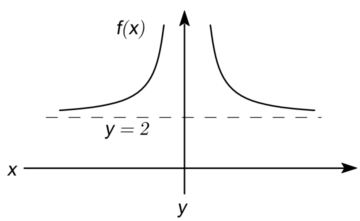
ד. לפניך גרף של הפונקציה $f(x)$,

המוגדרת לכל $x \neq 0$.

הישרים $y=2$ ו־ $x=0$ הם

אסימפטוטות של הפונקציה.

הפונקציה קעורה כלפי מעלה בכל תחום הגדרתה.



(1) סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$.

(2) רשום את תחומי העליה והירידה של פונקצית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

נתון: $a>0$ הוא פרמטר.

(3) סדר את הביטויים שלפניך לפי גודלם:

$(1)\ \int_a^{a+1} f(x)\,dx$, $(2)\ \int_{a+1}^{a+2} f(x)\,dx$, $(3)\ \int_a^{a+1} f'(x)\,dx$, (4) המספר 2

בהצלחה

תשובות

ג. **(1)** $k(x)=I$, $h(x)=III$, $f(x)=IV$ **(2)** $n \geq 3$ אי־זוגי

ד. **(2)** $\searrow$: $\emptyset$, $\nearrow$: $(x<0)\cup(x>0)$

(3) $\int_a^{a+1} f'(x)\,dx$ (3) $<$ 2 (4) $<$ $\int_{a+1}^{a+2} f(x)\,dx$ (2) $<$ $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ (1)

פתרון מבחן 20

1. א. טענה: לכל n טבעי מתקיים: $\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+\ ...\ +\frac{A}{2^n}=A(1-\frac{1}{2^n})$

בדיקה: עבור המקרה הראשון $n=1$:

$$\frac{A}{2^1}\overset{?}{=}A(1-\frac{1}{2^1}) \iff \frac{A}{2}=A\cdot\frac{1}{2} \quad (\checkmark)$$

הנחה: נניח נכונות הטענה עבור n.

הוכחה: נוכיח נכונות הטענה עבור $n+1$:

$$\underbrace{\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+\ ...\ +\frac{A}{2^n}}_{\text{צריך להוכיח}}+\frac{A}{2^{n+1}}=A(1-\frac{1}{2^{n+1}}) \iff \underbrace{A(1-\frac{1}{2^n})}_{\text{הנחת האינדוקציה}}+\frac{A}{2^{n+1}}=A(1-\frac{1}{2^{n+1}}) \quad /:A$$

$$\iff 1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^{n+1}} \quad /-1 \quad /\cdot 2^{n+1}$$

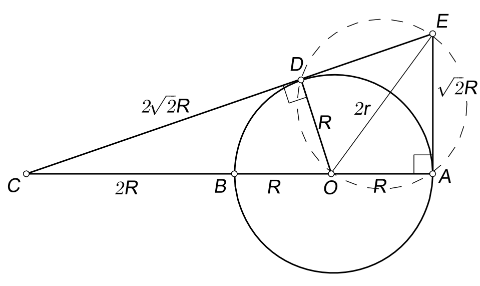
$$\iff -2+1=-1 \iff \mathbf{-1=-1}\ (\checkmark)$$

מסקנה: לכל n טבעי מתקיים: $\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+\ ...\ +\frac{A}{2^n}=A(1-\frac{1}{2^n})$

ב. (1)

$$\angle A=\angle D\overset{(1)}{=}90^\circ \Rightarrow \angle A+\angle D=180^\circ \overset{(2)}{\Rightarrow}$$ **AODE בר־חסימה**

(2)



$$CB\overset{(3)}{=}BA=2R \Rightarrow CA=4R$$

$\triangle ODC:$ $$CD\overset{(4)}{=}\sqrt{(3R)^2-R^2}=\sqrt{8R^2}=2\sqrt{2}R$$

$$\triangle EAC \overset{(5)}{\sim} \triangle ODC \overset{(6)}{\Rightarrow} \frac{EA}{OD}=\frac{AC}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{R}=\frac{4R}{2\sqrt{2}R}=\sqrt{2} \Rightarrow EA=\sqrt{2}R$$

$\triangle EAO:$ $$\angle A=90^\circ \overset{(7)}{\Rightarrow} OE=2r$$

$$2r\overset{(4)}{=}\sqrt{R^2+(\sqrt{2}R)^2}=\sqrt{R^2+2R^2}=\sqrt{3R^2}=R\sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{r=\frac{\sqrt{3}}{2}R}$$

---

(1) זווית בין משיק למעגל לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה - היא זווית ישרה

(2) מרובע שזוויות נגדיות שלו משלימות ל־ 180° הוא בר־חסימה במעגל

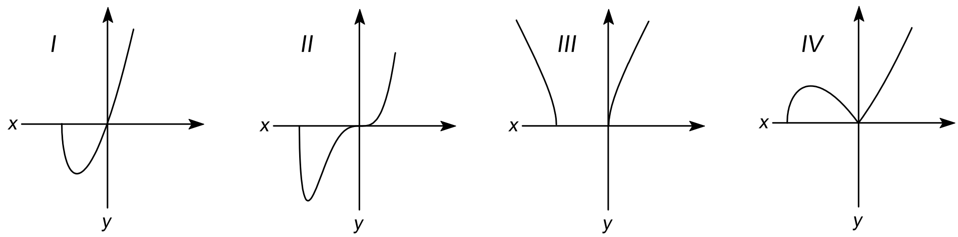
(3) נתון (4) פיתגורס (5) משפט דמיון זווית־זווית (6) יחס הדמיון

(7) זווית היקפית ישרה במעגל נשענת על קוטר

הערך המוחלט של הפולינום $3n^3-183n^2+3318n-18757$ **מציג מספר ראשוני לכל** $0\le n\le 46$

ג. (1)

$f(x)=\sqrt{x^2(x+2)}$, $h(x)=\sqrt{x(x+2)}$, $k(x)=x\sqrt{x+2}$



$f(x)>0$, תחום הגדרה: $x\ge -2$, חיתוך עם ציר x: $(-2,0)$, $(0,0)$ $\Leftarrow$ IV

$h(x)>0$, תחום הגדרה: $(x<-2)\cup(x>0)$ $\Leftarrow$ III

$k(x)$: תחום הגדרה: $x\ge -2$, אין פיתול בראשית הצירים:

$$k'(x)=1\cdot\sqrt{x+2}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+2}}=\frac{2(x+2)+x}{2\sqrt{x+2}}=\frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$$

$$k''(x)=\frac{3\cdot 2\sqrt{x+2}-(3x+4)\cdot\frac{1}{2\cdot 2\sqrt{x+2}}}{4(x+2)}\quad\Rightarrow\quad k''(0)=\frac{6\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{8}\neq 0$$

לכן גרף II אינו הגרף של $k(x)$ $\Leftarrow$ I

$\Rightarrow$ **$f(x)=IV$, $h(x)=III$, $k(x)=I$**

(2) $g(x)=x^n\sqrt{x+2}$ תחום הגדרה: $x\ge -2$.

חיובית עבור n זוגי ושלילית עבור n אי־זוגי בתחום $-2<x<0$.

עבור n אי־זוגי יופיע בנגזרת הראשונה הגורם x^{n-1} שחזקתו זוגית

ולכן הוא אינו מחליף סימנים ב־ $x=0$, מה שגורם לפיתול שם.

לכן: **$n\ge 3$ אי־זוגי.**

הקול המכריע

בכ"ב בכסלו התש"י הודיע ראש הממשלה, דוד בן גוריון, מעל במת הכנסת, כי ירושלים תחזור להיות בירת ישראל, הכנסת (שהיתה אז עדיין בתל־אביב) תחזור לירושלים וכן יעברו אליה משרדי הממשלה. הכנסת אישרה את הודעתו פה אחד. היתה זו תגובה להחלטת עצרת האו"ם ארבעה ימים קודם לכן כי יש לקיים את החלטת האו"ם מה־ 29.11.1947 לפיה ירושלים וסביבתה יהיו תחת משטר בינלאומי.

שגריר ארה"ב מיהר בתגובה להריץ איגרת לראש הממשלה ובה אולטימטום אמריקאי נוקשה נגד מדיניות ישראל בירושלים. משרד החוץ האמריקאי הזהיר מפני "מעשים פזיזים בשאלת ירושלים העלולים ללבות את האש".

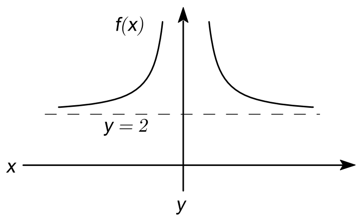
בן גוריון ישב בחדרו ועיין בספר התנ"ך כשמזכירו הביא לו את המברק עם האזהרה של משרד החוץ הישראלי שבישרה לו כי להצעה הישראלית בנושא ירושלים יש סיכוי לקבל קול אחד בלבד – הקול של משלחת ישראל. בן גוריון העיף מבט בספר התנ"ך הפתוח שמולו, ופלט: "כן, אבל זה הקול המכריע!".

ד. **(1)-(2)**

על־פי גרף הפונקציה, הנגזרת שואפת ל־ $-\infty$ מימין לציר y ול־ $+\infty$ משמאל לציר y.

כש־ $x \to \pm\infty$ הנגזרת שואפת ל־ 0.

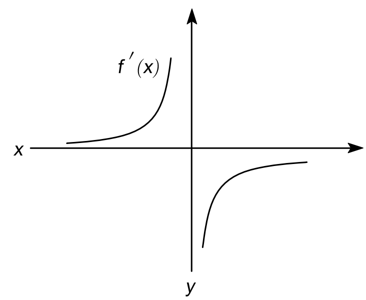
לכן ל־ $f'(x)$ יש שתי אסימפטוטות: $x = 0$ ו־ $y = 0$.



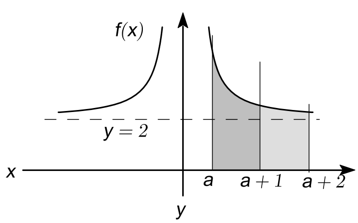
$\Rightarrow$

x		0	
f	↗ ‿	asym.	↘ ‿
f''	+		+
f'	↗ +	asym.	↗ −

$f'(x)$: ↗: $(x<0) \cup (x>0)$, ↘: $\emptyset$ $\Rightarrow$



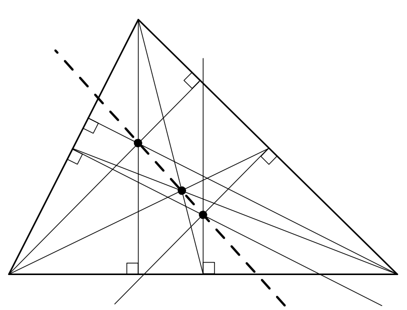
(3)



$$\Rightarrow \int_a^{a+1} f(x)\,dx > \int_{a+1}^{a+2} f(x)\,dx > 1\cdot 2$$

הביטוי השלישי $\int_a^{a+1} f'(x)\,dx$ מתאר שטח של גרף הנגזרת מתחת לציר x, שנותן ביטוי שלילי.

$$\Rightarrow (1) \int_a^{a+1} f(x)\,dx > (2) \int_{a+1}^{a+2} f(x)\,dx > (4)\ 2 > (3) \int_a^{a+1} f'(x)\,dx$$



קו אוילר

נקודת החיתוך של התיכונים במשולש,

נקודת החיתוך של הגבהים במשולש,

ונקודת החיתוך של האנכים האמצעיים במשולש

- נמצאים על קו אחד.

תכונה זו התגלתה על־ידי אחד המתמטיקאים הדגולים,

ליאונרד אוילר (Leonhard Euler , 1707–1783).

המשפטים בגאומטריה

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל־ 180°.
2. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

---

3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
4. במשולש שווה־שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה־שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה־שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה־צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה־זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא 180°.
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה צלע־זווית־צלע.
18. משפט חפיפה זווית־צלע־זווית.
19. משפט חפיפה צלע־צלע־צלע.
20. משפט חפיפה רביעי: שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות.

---

21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זווית הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

---

22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180° אז שני הישרים מקבילים.
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז: א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
ג. סכום כל זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180°.

---

26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

---

33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

בגרות אפשר להשלים. ילדות אי אפשר להשלים.

37. אלכסוני מלבן שווים זה לזה.

38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

---

39. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.

40. טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא שווה שוקיים.

41. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

42. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

43. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

44. בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השניה.

---

45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ (החלק הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהחלק האחר).

---

47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.

48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.

49. שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.

50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל.

---

51. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.

52. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.

53. כל משולש ניתן לחסום במעגל.

54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.

---

55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

---

56. ניתן לחסום מרובע במעגל, אם ורק אם, סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180°.

57. מרובע קמור חוסם מעגל, אם ורק אם, סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.

58. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.

59. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.

60. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.

---

61. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.

62. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.

63. במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.

64. מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.

65. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.

66. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.

67. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר, וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.

68. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.

69. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

70. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.

71. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.

72. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר, שוות זו לזו.

73. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).

74. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.

75. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

קשה – זאת אומרת: אפשר (זאב ז'בוטינסקי)

76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.

79. זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.

80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.

81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצא על קטע המרכזים או על המשכו.

---

84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.

86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

87. משולש, בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר זווית.

88. אם במשולש ישר־זווית, זווית חדה של 30°, אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.

89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה 30°.

---

90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

91. משפט תאלס המורחב:

ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש, חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.

92. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים.

93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.

95. משפט דמיון צלע־זווית־צלע.

96. משפט דמיון זווית־זווית.

97. משפט דמיון צלע־צלע־צלע.

98. במשולשים דומים: א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.

ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.

ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.

ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.

ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

---

99. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. **(99–101 לחמש יחידות בלבד)**

100. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

101. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

---

102. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.

103. הגובה ליתר במשולש ישר זווית, הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

104. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $(n-2)\,180^\circ$.

מה המשותף לשמות הבאים: אַיָּה , דִּקְלָה , הוֹדִיָּה , זְמִירָה , לְבָנָה , נֹגַהּ , עֲנָת , עָפְרָה , תִּקְוָה ?

תשובה (בצופן א"ת ב"ש): לפכי ביפא בכ רשגמי שאטל.

נוסחאון הבגרות לחמש יחידות

אלגברה

- נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$
האיבר ה־n־י	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

- לוגריתמים $(a, b, c > 0 \; ; \; a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

- מספרים מרוכבים: משפט דה־מואבר: $[R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

פתרונות המשוואה: $z^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ הם:

$$z_k = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right] \; , \quad k = 0, 1, 2, \; . \; . \; . \; , n-1$$

- וקטורים: אורך של וקטור: $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מישור דרך קצוות הוקטורים $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$: $\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) + s(\underline{c} - \underline{a})$

מכפלה סקלרית: $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cos\alpha$

מרחק בין נקודה $\underline{p}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\frac{|\underline{v} \cdot \underline{p} + e|}{|\underline{v}|}$

מציאת זווית בין הישר $\underline{a} + t\underline{b}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\sin\beta = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{b}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{b}|}$

מציאת זווית בין המישורים $\underline{v_1} \cdot \underline{x} + e_1 = 0$, $\underline{v_2} \cdot \underline{x} + e_2 = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\underline{v_1} \cdot \underline{v_2}|}{|\underline{v_1}| \cdot |\underline{v_2}|}$

גאומטריה אנליטית

קו ישר - שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו־(x_2, y_2) :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

משוואת ישר $y = mx + b$ עם שיפוע m העובר בנקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

הנקודה C המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע שקצותיו

הם $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$ ביחס $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{l}$ היא: $\left(\frac{lx_1 + kx_2}{k+l} \, , \, \frac{ly_1 + ky_2}{k+l} \right)$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו־m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $Ax + By + C = 0$:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

מעגל - משוואת משיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

בנקודה (x_0, y_0) שעל המעגל היא:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$$

פרבולה - משוואת משיק לפרבולה $y^2 = 2px$

בנקודה (x_0, y_0) שעל הפרבולה היא: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל־k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית,

  כאשר ההסתברות להצלחה היא p :

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad , \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

כשהשלמות היא סטנדרט: מפעל בארה"ב הזמין ברגים ממפעל ביפן. בטופס ההזמנה השגרתי של החברה המזמינה, צוין שהחברה תקבל עד 3% ברגים פגומים. כשהגיעה ההזמנה לארה"ב - הם קיבלו מכולה גדולה עם הברגים ועוד ארגז נפרד נוסף שעליו צוין: "3% ברגים פגומים" . . .

<u>טריגונומטריה</u>

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

- משפט הסינוסים: (R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
- משפט הקוסינוסים: (γ היא הזווית הכלואה בין a ל־b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$
- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$
- שטח משולש: $S = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל־c)
- גופים במרחב: פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B\cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס , h - גובה הגוף)

  חרוט: שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול , l - הקו היוצר)

<u>חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי</u>

- נגזרות: $(x^t)' = tx^{t-1}$ (t ממשי) , $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$

נגזרת של <u>מכפלת</u> פונקציות: $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

נגזרת של <u>מנת</u> פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקציה <u>מורכבת</u>: $[f(u(x))]' = f'(u)\cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית) ו־$f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c$ ($t \neq -1$ ממשי)

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז:

$\int f[u(x)]\cdot u'(x)\,dx = F[u(x)] + c$, $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + c$