

אלי מיטב

בגרויות מתמטיקה

472 - פתרונות מלאים

- 1 שאלות בסדרות _____
- 16 מבחן דוגמה _____
- 23 מבחן דוגמה _____
- 30 מבחן דוגמה _____
- 37 קיץ תשפ"א - 2021 - מועד א _____
- 45 קיץ תשפ"א - 2021 - מיוחד _____
- 53 קיץ תשפ"א - 2021 - מועד ב _____
- 61 חורף תשפ"ב - 2022 _____
- 66 חורף תשפ"ב - 2022 - נבצרים _____
- 72 קיץ תשפ"ב - 2022 - מועד א _____
- 77 קיץ תשפ"ב - 2022 - מועד ב _____
- 82 חורף תשפ"ג - 2023 _____
- 87 קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד א _____
- 91 קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד מיוחד _____
- 95 קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד ב _____
- 100 סיווג שאלות לפי נושאים _____
- 102 נוסחאון לארבע יחידות _____

מספר מילים לפני

ספר זה מכיל מבחני בגרות לשאלון 472 לפי התכנית החדשה של משרד החינוך. בספר זה 14 מבחנים: 3 מבחני דוגמה ועוד 11 מבחנים שנערכו בפועל, החל מקיץ 2021 ועד קיץ 2023. לכל שאלה מוצגת תשובה סופית בעמוד השאלה ופתרון מלא בצמוד לכל מבחן.

ספר זה יעודכן מידי שנה במבחנים שייערכו מידי שנה. ספר זה הוא עוד ספר של מבחני בגרות שיצאו בהוצאת שורש בתכנית היוצאת: משאלון 382 ועד שאלון 582. לשאלונים 481 ועד 582 יש גם גרסה של תשובות סופיות בלבד, ויש עוד שני ספרים של שאלות ממבחני בגרות המתאימות לכיתות י - 4 יחידות (481) ו-5 יחידות (581). ראו פרטים באתר ההוצאה.

שאלון זה מקביל לשאלון 482. בתקופת החפיפה בין שתי התוכניות, היו שאלות שהופיעו בשני השאלונים. שאלות אלו אינן נכללות בספר זה, מתוך הנחה שתלמידי שאלון 472 משתמשים גם בספר של 482.

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

\forall - לכל, \in - שייך, \nearrow - עליה, \searrow - ירידה, even - זוגי, odd - לא זוגי
 \cup - איחוד: היחס 'או', \cap - חיתוך: היחס 'וגם', \emptyset - קבוצה ריקה (אין פתרון)
 $\sqrt{\quad}$ - אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח, ab. - מוחלט, ep. - נקודת קצה (end point)
 $\{x=0\}$ - ציר x , $\{y=0\}$ - ציר y , \exists - קיים, \notin - לא קיים.

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואר. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: לעופר ילין מפתח תקוה שפתרונותיו נתרמו לאתר של משרד החינוך וגם בהם נעזרתי, לשריף אמארה מכפר זלפה שהאיר פתרונות שלא חשבתי עליהם ושעמל על ההגהה, ולשרון חיים מפתח תקוה שהכין את סיווג השאלות לפי נושאים.

את החללים שבין השאלות והפתרונות הִחַלְתִּי בהבוקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקדודות בעלות אופי לאומי או יהודי.

ב ה צ ל ח ה

אלי איטב

סדרות - שאלות

השאלות להלן הופיעו במבחני הבגרות של שאלון 471. נושא זה הועבר לשאלון 472.

1. (מבחן דוגמה 1)

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי כלל הנסיגה: $a_1 = 12$, $a_{n+1} = 3a_n - 2$.

א. חשב את a_2 ואת a_3 .

ב. נתונים המספרים: $a_1 - 2$, $a_2 - 4$, $a_3 - x$.

(1) מצא את ערכו של x שעבורו שלושת המספרים הם שלושה איברים ראשונים

בסדרה חשבונית עולה (האיבר הראשון הוא $a_1 - 2$).

(2) בסדרה החשבונית יש 40 איברים. חשב את סכום האיברים במקומות הזוגיים.

2. (מבחן דוגמה 2)

דנה מתחילה לרוץ מביתה, ובדקה הראשונה עוברת מרחק של 80 מטר.

בכל דקה נוספת היא עוברת מרחק הגדול פי 1.02 מן המרחק שעברה בדקה הקודמת.

אחרי 20 דקות היא מסתובבת, וחוזרת הביתה באותה דרך.

הפעם, בדקה הראשונה היא עוברת מרחק של 100 מטר,

ובכל דקה נוספת היא עוברת 5 מטר יותר מן המרחק שעברה בדקה הקודמת.

האם דנה תספיק לעבור את הדרך חזרה לביתה ב־10 דקות? נמק.

3. (מבחן דוגמה 3)

סדרה מוגדרת באמצעות כלל הנסיגה: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 5$ לכל n טבעי.

א. הסבר מדוע הסדרה היא סדרה חשבונית ומצא את נוסחת האיבר הכללי a_n שלה.

ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהאיבר הראשון) כדי שסכומם יהיה 9,090.

ג. בסדרה יש 80 איברים. מהו סכום 20 האיברים האחרונים?

אני מתפטר ומתפטר - עד שאני משיג את מה שאני רוצה.

(לוי אשכול 1895-1969)



1. **א.** $a_2 = 34$, $a_3 = 100$ **ב.** $x = 50$ **(1)** **ג.** $Seven = 8,200$ **(2)**

2. לא

3. **א.** $d = 5$, $a_n = 5n - 1$ **ב.** $n = 60$ **ג.** $S = 7,030$

4. (מבחן דוגמה 4)

- מחשב מוצע לרכישה ב־ 12 תשלומים המהווים סדרה חשבונית.
 התשלום כולו גדול ב־ 3,750 ש' מסכום ששת התשלומים האחרונים.
 התשלום האחרון קטן מהתשלום הראשון ב־ 330 ש'.
- א. מהו הפרש הסדרה?
 ב. מהו מחיר המחשב?
 ג. משפחה החליטה לרכוש את המחשב, אך ביקשה לשלם ב־ 6 תשלומים (במקום 12) המהווים סדרה חשבונית בעלת אותו הפרש כפי שהוצע בתחילה.
 מהו הסכום הראשון לתשלום?

5. (מבחן דוגמה 5)

- נתונה סדרה המקיימת את הכלל: $a_{n+2} = a_n + 4$. נתון: $a_2 = 4$, $a_3 = 5$.
- א. רשום את ששת האיברים הראשונים בסדרה. נמק.
 ב. (1) האם הסדרה חשבונית? נמק.
 (2) האם האיברים שבמקומות הזוגיים הם סדרה חשבונית? נמק.
 ג. חשב את סכום 80 האיברים הראשונים בסדרה. הסבר את חישובך.

6. (מבחן דוגמה 6)

- נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי על-ידי הכלל: $a_n = -3n + 80$.
- א. הוכח כי הסדרה היא סדרה חשבונית יורדת.
 ב. חשב כמה איברים חיוביים יש בסדרה.
 ג. חשב את ההפרש בין סכום האיברים החיוביים במקומות האי־זוגיים לבין סכום האיברים החיוביים במקומות הזוגיים.

365 הוא המספר הקטן ביותר הניתן להצגה כסכום של שלושה מספרים ריבועיים עוקבים.

וגם כסכום של שני מספרים ריבועיים עוקבים אחריהם:

$$365 = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

שאלות

4. א. $d = -30$ ב. 6,420 ג. 1,145 ש

5. א. 1, 4, 5, 8, 9, 12 ב. (1) לא (2) כן ג. $S_{80} = 6,440$

6. א. 26 ג. 39

7. (קיץ תש"פ - 2020 - מועד א)

בתצוגת חנות לטלפונים חכמים מוצגים מכשירים המסודרים בשורה, כשלכל מכשיר מוצמד מחיר. המכשירים מסודרים בסדר עולה של ערכם. מחיר כל מכשיר גדול בסכום קבוע משזה שלשמאלו. המכשיר הראשון משמאל הוא הזול ביותר. מחירים של שני המכשירים: הקיצוני מימין והקיצוני משמאל, ביחד, הוא 6,400 ש'. מחיר המכשיר היקר ביותר גדול פי שלושה ממחיר המכשיר הזול ביותר.

א. מצא את מחיר המכשיר הזול ביותר.

ב. סכום מחירי המכשירים המוצגים הוא 54,400 ש'. כמה מכשירים היו בתצוגה?

8. (קיץ תש"פ - 2020 - מועד ב)

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי הכלל: $a_n = 2n + 3$.

א. הוכח כי הסדרה חשבונית, ומצא את הפרש הסדרה.

כסאות באולם קולנוע סודרו בשורות, כך שהכלל a_n מתאר את מספר הכסאות בשורה n .

ב. באיזו שורה יש 19 כסאות?

בעקבות מגבלות הקורונה מותר להושיב צופים כאשר יש ביניהם רווח של כסא אחד. לכן בשורה הראשונה אפשר להושיב 3 צופים, ובכל שורה נוספת אפשר להושיב צופה אחד יותר מאשר בשורה הקודמת. מתברר שבאופן זה מספר הצופים הכולל שאפשר להושיב באולם קטן ב- 90 ממספר הצופים בתפוסה מלאה לפני מגבלות הקורונה.

ג. מצא את מספר השורות באולם.

מספר ריבועי הקסם

יש רק ריבוע קסם בסיסי אחד מסדר 3×3 .

'בסיסי' - שאינו תוצאה של שיקוף או סיבוב של ריבוע קסם אחר - אלה ריבועי קסם שקולים ונחשבים כאחד. יש 880 ריבועי קסם בסיסיים מסדר 4×4 ו- 275,305,224 ריבועי קסם בסיסיים מסדר 5×5 .

מספר ריבועי הקסם הבסיסיים מסדר 6×6 אינו ידוע, אבל מוערך ב- 1.77×10^{19} .



7. א. 1,600 ש' ב. 17 (מכשירים)

8. א. $d = 2$ ב. $n = 8$ ג. $n = 12$

9. (חורף תשפ"א - 2021)

נתונה סדרה חשבונית: $-70, \dots, 78, 82, 86$.

א. מצא את מספר האיברים בסדרה.

ב. (1) כמה איברים חיוביים יש בסדרה?

(2) מהו האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה?

(3) חשב את סכום האיברים החיוביים.

בסדרה הנתונה החליפו את הסימנים של כל איברי הסדרה.

באופן זה התקבלה סדרה חדשה: $70, \dots, -78, -82, -86$.

ג. חשב את סכום הסדרה החדשה.

10. (קיץ תשפ"א - 2021 - מועד א)

סרטון הועלה לאתר העיריה במרשתת ביום ראשון.

כל יום היה מספר הצופים בו גדול פי מספר קבוע ממספר הצופים ביום הקודם.

ביום רביעי היה מספר הצופים גדול פי 8 ממספר הצופים ביום ראשון.

ביום ששי היה מספר הצופים בסרטון גדול ב-480 ממספר הצופים ביום שלפניו.

א. (1) פי כמה גדל מספר הצופים מידי יום?

(2) כמה צופים היו לסרטון ביום ראשון?

כדי לעודד קניות בעיר, החליטה העיריה לממן קופון הנחות לכל הצופים בסרטון בשבוע זה.

שווי הקופון הוא 50 שקלים.

ב. כמה עלו לעיריה כל הקופונים שחילקה לצופים בסרטון בשבעת הימים?

ג. העיריה מעוניינת להמשיך לחלק קופוני הנחה לצופים גם אחרי שבעת הימים הראשונים.

התקציב הכולל של העיריה למימון כל הקופונים (החל מהיום הראשון של העלאת הסרטון)

הוא 766,500 שקלים.

לכמה ימים נוספים (אחרי שבעת הימים הראשונים) יספיק תקציב העיריה למימון הקופונים?

מספר מינכהוזן

$$3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$$

זהו המספר היחיד עם התכונה הזו (מלבד 1 הטריטוריאלי)



9. א. $n = 40$ ב. (1) $n = 22$ (2) $a_{22} = 2$ (3) $S_{22} = 968$ ג. $S_{40} = -320$

10. א. (1) $q = 2$ (2) 30 (צופים) ב. 190,500 ש ג. יומיים

11. (קיץ תשפ"א - 2021 - מועד מיוחד)

נתונה סדרה המוגדרת על-ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = 3a_n - 2$, $a_1 = 2$, לכל n טבעי.

א. מצא את a_2 ואת a_3 .

שלושת המספרים $a_1, a_2, a_3 + x$ הם שלושה איברים ראשונים בסדרה הנדסית עולה.

ב. מצא את x .

ג. בסדרה ההנדסית יש 25 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

12. (קיץ תשפ"א - 2021 - מועד ב)

שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית a_n הם (משמאל לימין): $1, 6 - k, k$ (k הוא פרמטר).

א. מצא ערך הפרמטר k (מצא את שתי האפשרויות).

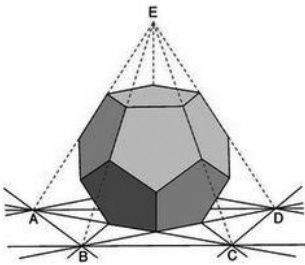
נתון שכל איברי הסדרה חיוביים.

ב. מצא את האיבר השביעי בסדרה.

נתון כי האיבר השביעי הוא האיבר האמצעי בסדרה.

ג. כמה איברים בסדרה?

ד. חשב את סכום איברי הסדרה.



איך עושה כלב?

אווז - מגעגע, אות - נאנח, אָיל - צוהל, אָיל - עורג, אפרוח - מצייץ, אריה - שואג, ברווז - מגעגע, גמל - מחרחר, דבורה - מזומזמת, דב - נוהם, דוכיפת - מהדהדת, זאב - מיילל, זבוב - מזומזם, זמיר - מסתלסל, זרזיר - מפפפט, חרגול - מנסר, חזיר - נוחר, חמור - נוער (גם: נוהק), חסידה - מלקלקת, חתול - מיילל (וגם: מגרגר), יונה - הומה, ינשוף - נושף, יתוש - מזומזם, כבשה - פועה, כלב - נובח, נחש - לוחש, נמר - שואג, נץ - מצפצף, סוס - צוהל, עגור - מצפצף, עורב - קורא, עז - פועה, עיט - צועק, עכבר - מצייץ, עפרוני - מסלסל, פיל - מריע (וגם: תוקע, נוהם, מחצצר), פרא - נוהק, פרה - גועה, צבוע - צוחק (גם מיילל), צבי - מפרט, ציפור - מצייצת, צפרדע - מקרקרת, צרצר - מצרצר, קוף - לוהג, ראם - מצלצל, שועל - מיילל, שור - גועה, שרקן - שורק, תוכי - מדבר (גם: שורק, מפפפט, מקשקש), תן - מיילל, תנשמת - נושמת, תרנגול - קורא, תרנגול-הודו - מהלצר,



11. א. $a_2 = 4, a_3 = 10$ ב. $x = -2$ ג. $S_{\text{odd}} = 44,739,242$

12. א. $k_1 = 9, k_2 = 4$ ב. $a_7 = \frac{1}{16}$ ג. $n = 13$ ד. $S = 7\frac{1023}{1024}$

13. (חורף תשפ"ב - 2022)

- יוסי רוצה לקנות אופנוע. מחיר האופנוע הוא 43,650 שקלים.
הוא מתלבט בין שתי הצעות שהוצעו לו לשלם עבור האופנוע בתשלומים.
הצעה ראשונה: התשלומים שונים זה מזה.
כל תשלום (חוץ מהתשלום הראשון) גבוה מן התשלום הקודם לו במספר שקלים קבוע.
על פי ההצעה הזאת:
ההפרש בין התשלום השני לבין התשלום השני הוא 200 שקלים.
התשלום התשיעי גבוה פי 1.2 מן התשלום הראשון.
א. מצא את התשלום הראשון.
ב. מצא את מספר התשלומים שישלם יוסי עבור האופנוע לפי ההצעה הראשונה.
הצעה שנייה: התשלומים שווים זה לזה.
מספר התשלומים שיהיה על יוסי לשלם עבור האופנוע זהה בשתי ההצעות
(מספר התשלומים שמצאת בסעיף ב).
ג. מצא כמה מן התשלומים שעל יוסי לשלם לפי ההצעה הראשונה נמוכים
מן התשלום הקבוע שעליו לשלם לפני ההצעה השנייה.

14. (חורף תשפ"ב - נבצרים)

- עדי מתאמנת לקראת מרוץ של 42 km .
לפי תכנית האימונים, היא תרוץ בשבוע הראשון 6 km .
בכל שבוע תרוץ 1.5 km יותר מאשר בשבוע שקדם לו, ובשבוע האחרון תרוץ 42 km .
א. כמה שבועות תימשך תוכנית האימונים של עדי?
ב. כמה קילומטרים תרוץ עדי בשבוע ה-20 של האימונים?
לאחר שעדי רצה 20 שבועות התברר לה כי המרוץ המתוכנן הוקדם בשבועיים,
ולכן שינתה את תוכנית האימונים:
אחרי השבוע ה-20 היא תרוץ בכל שבוע km יותר מאשר בשבוע שקדם לו.
ג. האם לפי התוכנית לאחר השינוי עדי תרוץ 42 km בשבוע האחרון? נמק.
ד. כמה קילומטרים סך הכל תרוץ עדי במהלך כל האימונים?



13. א. $a_1 = 2,000$ ב. $n = 18$ ג. $n = 9$

14. א. $n = 25$ ב. 34.5 km ג. לא ד. 520.5 km

15. (קיץ תשפ"ב - 2022 - מועד א)

- נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי על-ידי כלל הנסיגה: $a_1 = 84$, $a_{n+1} = a_n - 2$.
- א. (1) האם הסדרה הנתונה היא חשבונית או הנדסית? נמק.
- (2) כתוב את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה.
- ב. (1) כמה איברים חיוביים יש בסדרה?
- (2) כתוב את ערכו של האיבר השלישי הראשון בסדרה.
- ג. נתון כי סכום האיברים השליליים בסדרה הוא -552 .
- כמה איברים סך הכל יש בסדרה הנתונה?

16. (קיץ תשפ"ב - 2022 - מועד ב)

- נועם התאמן לקראת תחרות שחיה.
- בכל אימון, החל מן האימון השני, שחה נועם 50 מטר יותר מביאמון שקדם לו.
- המרחק ששחה נועם באימון השמיני גדול פי 2 מן המרחק ששחה באימון הראשון.
- א. מצא כמה מטרים שחה נועם באימון הראשון.
- ב. (1) האם יתכן שבאחד האימונים שחה נועם 830 מטרים בדיוק? נמק.
- (2) מצא באיזה אימון שחה נועם 1,000 מטר בדיוק.
- אחרי האימון שבו שחה נועם 1,000 מטר בפעם הראשונה, החליט נועם לשנות את שיטת האימון שלו ולשחות בכל אחד מן האימונים שבאו אחריו 1,000 מטר בדיוק.
- עד לתחרות שחה נועם 25,450 מטר בסך הכל.
- ג. כמה אימונים סך הכל התאמן נועם לקראת התחרות?

תשובה של חיים ויצמן

חיים ויצמן (1874-1952), איש התנועה הציונית ונשיאה הראשון של מדינת ישראל. מספר שנים לפני הצהרת בלפור שאל אותו חבר בית הלורדים האנגלי: מדוע אתם היהודים מתעקשים על פלשתינה, כאשר ישנן כל-כך הרבה מדינות לא-מפותחות בהן אתם יכולים להתיישב בנוחות רבה יותר?

ענה לו ויצמן: "זה כמו שאני אשאל אותך מדוע נסעת בסוף השבוע שלושים קילומטר כדי לבקר את אמא שלך, כשיש כל כך הרבה זקנות מגרות ממש ברחוב שלך" . . .



15. א. (1) חשבונית (2) $a_n = 86 - 2n$ ב. (1) 42 (2) $a_{44} = -2$ ג. $N = 66$

16. א. $a_1 = 350_m$ ב. (1) לא (2) $n = 14$ ג. $30_{trainings}$

17. (חורף תשפ"ג - 2023)

- יוסי רץ במסלול מסוים. בדקה הראשונה הוא רץ 75 מטרים.
 בכל דקה, החל מהדקה השנייה, הוא רץ מרחק הגדול פי 1.02 מן המרחק שרץ בדקה שקדמה לה.
- א. (1)** מהו המרחק שרץ יוסי במשך הדקה הרביעית?
- (2)** מהו המרחק הכולל שרץ יוסי במשך 4 הדקות הראשונות של הריצה?
- ב.** כתוב נוסחה לחישוב המרחק הכולל שרץ יוסי במשך n הדקות הראשונות של הריצה.
- ג.** יוסי רוצה לרוץ 2,500 מטרים סך הכל, אך לרשותו עומדות 25 דקות בלבד לעשות זאת.
 הסבר מדוע לא יצליח יוסי לעבור 2,500 מטרים ב־ 25 דקות.
- ד.** דני רץ באותו המסלול. בדקה הראשונה הוא רץ מרחק מסוים.
 גם הוא רץ בכל דקה, החל מן הדקה השנייה, מרחק הגדול פי 1.02 מהמרחק שרץ בדקה הקודמת.
 מהו המרחק הקצר ביותר שעליו לרוץ בדקה הראשונה כדי לעבור 2,500 מטרים ב־ 25 דקות?

10958

במִרְשָׁתָּת יש אתר המציג את כל המספרים השלמים מ־0 עד 11,111 על ידי שימוש בכל הספרות מ־1 עד 9 פעם אחת. בשתי הצגות: בסדר עולה מ־1 עד 9 ובסדר יורד מ־9 עד 1. הפעולות המותרות הן חיבור, חיסור, כפל וחוקה. רק למספר 10,958 טרם נמצא ביטוי בסדר עולה. חפשו: crazy sequential representation. כך זה מתחיל:

$$\begin{aligned}
 0 &= 12 + 34 - 56 - 7 + 8 + 9 &= 98 - 7 - 6 - 54 - 32 + 1 \\
 1 &= 1^{23456789} &= 98 - 76 - 54 + 32 + 1 \\
 2 &= 123 + 4 - 56 - 78 + 9 &= 9 + 87 - 65 + 4 - 32 - 1 \\
 3 &= 123 - 45 - 6 - 78 + 9 &= 98 - 76 - 5 + 4 + 3 - 21 \\
 4 &= 12 - 34 - 56 - 7 + 89 &= 98 - 7 - 65 - 43 + 21 \\
 5 &= 12 - 34 + 5 - 67 + 89 &= 98 - 76 + 5 - 43 + 21 \\
 6 &= 12 + 34 + 56 - 7 - 89 &= 98 - 7 - 65 + 4 - 3 - 21 \\
 7 &= 1 + 23 - 4 + 56 - 78 + 9 &= 98 - 7 - 6 - 54 - 3 - 21 \\
 8 &= 1 - 23 - 45 + 6 + 78 - 9 &= 9 - 8 + 76 - 5 - 43 - 21 \\
 9 &= 1^{2345678} \times 9 &= 9 + 87 - 65 - 43 + 21 \\
 10 &= 1^{2345678} + 9 &= 98 - 7 + 6 - 54 - 32 - 1 \\
 11 &= 1 + 23 + 4 + 5 + 67 - 89 &= 9 + 8 - 7 + 65 - 43 - 21 \\
 12 &= 123 + 45 - 67 - 89 &= 987 - 654 - 321 \\
 13 &= 1 - 23 + 4 - 56 + 78 + 9 &= 98 - 7 - 6 - 54 + 3 - 21 \\
 14 &= 12 - 3 - 45 + 67 - 8 - 9 &= 98 + 7 - 6 - 54 - 32 + 1 \\
 15 &= 123 - 45 + 6 - 78 + 9 &= 98 - 76 - 5 - 4 + 3 - 2 + 1
 \end{aligned}$$

שאלות

17. **א. (1)** $a_4 = 79.59_m$ **(2)** $S_4 = 309.12_m$ **ב.** $S_n = 3,750 \cdot (1.02^n - 1)_m$

ג. $S_{25} = 2,402.27 < 2,500$ **ד.** $b_1 = 78.05_m$

סדרות - פתרונות

1. א.

$$a_1 = 12, a_{n+1} = 3a_n - 2 \Rightarrow a_2 = 3a_1 - 2 = 3 \cdot 12 - 2 \Rightarrow a_2 = 34$$

$$\Rightarrow a_3 = 3a_2 - 2 = 3 \cdot 34 - 2 \Rightarrow a_3 = 100$$

ב. (1)

$$b_1 = a_1 - 2 = 12 - 2 = 10, b_2 = a_2 - 4 = 34 - 4 = 30, b_3 = a_3 - x = 100 - x$$

$$b_3 - b_2 = b_2 - b_1 \Rightarrow 100 - x - 30 = 30 - 10 \Rightarrow 70 - x = 20 \Rightarrow x = 50$$

(2)

$$b_1 = 10, b_2 = 30, b_3 = 100 - 50 = 50 \Rightarrow d = 20$$

$$S_{\text{seven}} = b_2 + b_4 + \dots + b_{40} = \frac{20}{2} \cdot (2 \cdot b_2 + 2d \cdot 19) = 10 \cdot (60 + 40 \cdot 19) \Rightarrow S_{\text{seven}} = 8,200$$

2. המרחק שעברה דנה בכיוון הלוך (סדרה הנדסית):

$$a_1 = 80, q = 1.02, n = 20 \Rightarrow S = 80 \cdot \frac{1.02^{20} - 1}{1.02 - 1} = 1943.79$$

המרחק שעברה דנה בכיוון חוזר (סדרה חשבונית):

$$a_1 = 100, d = 5, n = 10 \Rightarrow S = \frac{10}{2} \cdot (2 \cdot 100 + 5 \cdot 9) = 5 \cdot 245 = 1225$$

1225 < 1943 ולכן התשובה היא: לא.

3. א.

הפרש קבוע בין כל שני איברים סמוכים: $d = 5$ (✓)

$$a_n = a_1 + d(n - 1) = 4 + 5(n - 1) \Rightarrow a_n = 4 + 5n - 5 \Rightarrow a_n = 5n - 1$$

ב.

$$S_n = \frac{n}{2} (2 \cdot 4 + 5(n - 1)) = 9090 / 2 \Rightarrow n(5n + 3) = 18,180 \Rightarrow 5n^2 + 3n - 18,180 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 363,600}}{10} = \frac{-3 \pm 603}{10}, n > 0 \Rightarrow n = \frac{600}{10} \Rightarrow n = 60$$

ג.

$$S = S_{80} - S_{60} = \frac{80}{2} (2 \cdot 4 + 5 \cdot 79) - 9,090 = 40 \cdot 403 - 9,090 \Rightarrow S = 7,030$$

200 הוא המספר הקטן ביותר שלא ניתן להפוך אותו לראשוני על-ידי שינוי של אחת מספרותיו.

תכונה זו מתקיימת גם בארבעת המספרים הווגיים העוקבים.

שביחד עם 200 מהווים סדרה חשבונית בת חמשה איברים: 200, 202, 204, 206, 208

4. א.

$$a_{12} + 330 = a_1 \Rightarrow a_1 + 11d + 330 = a_1 \Rightarrow 11d = -330 \Rightarrow d = -30$$

ב. סכום 12 התשלומים פחות 6 התשלומים האחרונים הוא סכום 6 התשלומים הראשונים:

$$S_6 = 3,750 \Rightarrow \frac{6}{2}(2a_1 - 30 \cdot 5) = 3,750$$

$$\Rightarrow 6a_1 - 450 = 3,750 \Rightarrow 6a_1 = 4,200 \Rightarrow a_1 = 700$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}(2 \cdot 700 - 30 \cdot 11) = 6 \cdot (1400 - 330) = 6 \cdot 1,070 \Rightarrow S_{12} = 6,420 \text{ ש}$$

ג. נסמן את הסדרה של סעיף זה: b_n

$$d = -30, S_6 = 6,420 \Rightarrow \frac{6}{2}(2b_1 - 30 \cdot 5) = 6,420 \Rightarrow 6b_1 - 450 = 6,420$$

$$\Rightarrow 6b_1 = 6,870 \Rightarrow b_1 = 1,145 \text{ ש}$$

5. א.

$$a_{n+2} = a_n + 4, a_2 = 4, a_3 = 5$$

$$a_3 = a_1 + 4 = 5 \Rightarrow a_1 = 1, a_4 = a_2 + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$a_5 = a_3 + 4 = 5 + 4 = 9, a_6 = a_4 + 4 = 8 + 4 = 12 \Rightarrow \underline{1, 4, 5, 8, 9, 12}$$

ב. (1)

$$a_3 - a_2 \stackrel{?}{=} a_2 - a_1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 3 \Rightarrow \underline{\text{לא}}$$

(2) כן. גם האיברים במקומות הלא-זוגיים הם סדרה חשבונית ($d = 4$). כי:

$$a_{n+2} = a_n + 4 \Rightarrow a_{n+2} - a_n = 4 \forall n (\checkmark) \Rightarrow \underline{\text{כן}}$$

ג. האיבר הראשון בסדרת המקומות הלא-זוגיים (odd) הוא $a_1 = 1$

האיבר הראשון בסדרת המקומות הזוגיים (even) הוא $a_2 = 4$

$$S_{80} = S_{\text{odd}} + S_{\text{even}} = \frac{40}{2}(2 \cdot 1 + 4 \cdot 39) + \frac{40}{2}(2 \cdot 4 + 4 \cdot 39) = 20 \cdot 158 + 20 \cdot 164 \Rightarrow S = 6,440$$

6. א.

$$a_n = -3n + 80$$

$$a_{n+1} - a_n = (-3(n+1) + 80) - (-3n + 80) = -3n - 3 + 80 + 3n - 80 \Rightarrow d = -3 (\checkmark)$$

ב.

$$a_n > 0 \Rightarrow -3n + 80 > 0 \Rightarrow -3n > -80 \Rightarrow n < \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3} \Rightarrow n = 26$$

ג.

$$a_1 = -3 + 80 = 77, a_2 = -6 + 80 = 74$$

$$S_{\text{odd}} - S_{\text{even}} = \frac{13}{2}(2 \cdot 77 - 6 \cdot 12) - \frac{13}{2}(2 \cdot 74 - 6 \cdot 12) = 533 - 494 \Rightarrow S_{\text{odd}} - S_{\text{even}} = 39$$

.א .7

$$(I) a_1 + a_n = 6,400, \quad (II) a_n = 3a_1$$

$$(I) a_1 + 3a_1 = 6,400 \Rightarrow 4a_1 = 6400 \Rightarrow a_1 = 1,600_{sh}$$

.ב

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow 54,400 = \frac{n}{2} \cdot 6,400 = n \cdot 3,200 \quad / : 3,200 \Rightarrow n = 17$$

.א .8

$$a_n = 2n + 3 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = (2(n+1) + 3) - (2n + 3)$$

$$= 2n + 2 + 3 - 2n - 3 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 2 = d$$

.ב

$$a_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \Rightarrow a_n = 5 + 2 \cdot (n - 1) = 19 \quad 3 + 2n = 19 \Rightarrow 2n = 16 \Rightarrow n = 8$$

.ג

$$S_{corona} + 90 = S_{normal} \Rightarrow \frac{n}{2}(2 \cdot 3 + 1 \cdot (n - 1)) + 90 = \frac{n}{2}(2 \cdot 5 + 2(n - 1)) \quad / \cdot 2$$

$$n(5 + n) + 180 = n(8 + 2n) \Rightarrow 5n + n^2 + 180 = 8n + 2n^2 \Rightarrow n^2 + 3n - 180 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 720}}{2} = \frac{-3 \pm 27}{2}, \quad n > 0 \Rightarrow n = \frac{24}{2} \Rightarrow n = 12$$

.א .9

$$86, 82, 78, \dots, -70 \Rightarrow a_1 = 86, \quad d = -4, \quad a_n = -70$$

$$-70 = 86 - 4(n - 1) \Rightarrow -70 = 86 - 4n + 4 \Rightarrow -160 = -4n \Rightarrow n = 40$$

(1) .ב

$$a_n > 0 \Rightarrow 86 - 4(n - 1) > 0 \Rightarrow 86 > 4(n - 1) \Rightarrow 21\frac{1}{2} > n - 1$$

$$\Rightarrow n < 22\frac{1}{2} \Rightarrow n = 22$$

(2)

$$a_{22} = 86 - 4 \cdot 21 = 86 - 84 \Rightarrow a_{22} = 2$$

(3)

$$S_{22} = \frac{22}{2}(86 + 2) = 11 \cdot 88 \Rightarrow S_{22} = 968$$

.ג

$$S_{40} = \frac{40}{2}(-86 + 70) = 20 \cdot (-16) \Rightarrow S_{40} = -320$$

10. א. (1) זה מקרה של סדרה הנדסית (כמובן)

$$(I) a_4 = 8a_1 \Rightarrow a_1 q^3 = 8a_1 \Rightarrow q^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow q = 2$$

(2)

$$(II) a_6 = a_5 + 480 \Rightarrow a_1 \cdot 2^5 = a_1 \cdot 2^4 + 480 \Rightarrow 16a_1 = 480 \Rightarrow a_1 = 30$$

ב.

$$S_7 = 30 \cdot \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 30 \cdot 127 = 3,810 \Rightarrow 50 \cdot S_7 = 190,500_{sh}$$

ג.

$$S_n = \frac{766,500}{50} = 15,330 \text{ מספר הקופונים הכולל}$$

$$15,330 = 30 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} / : 30 / + 1 \Rightarrow 2^n = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9 \Rightarrow 9 - 7 = 2_{days}$$

11. א.

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n - 2 \Rightarrow a_2 = 3a_1 - 2 = 3 \cdot 2 - 2 \Rightarrow a_2 = 4$$

$$a_3 = 3a_2 - 2 = 3 \cdot 4 - 2 \Rightarrow a_3 = 10$$

ב.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow a_3 + x = a_2 \cdot 2 \Rightarrow 10 + x = 4 \cdot 2 / - 10 \Rightarrow x = -2$$

ג.

$$S_{odd} = a_1 \cdot \frac{(q^2)^{13} - 1}{q^2 - 1} = 2 \cdot \frac{4^{13} - 1}{4 - 1} = 2 \cdot \frac{67,108,863}{3} \Rightarrow S_{odd} = 44,739,242$$

12. א.

$$k, 6 - k, 1 \Rightarrow \frac{6 - k}{k} = \frac{1}{6 - k} \Rightarrow (6 - k)^2 = k \Rightarrow 36 - 12k + k^2 = k$$

$$k^2 - 13k + 36 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow k_1 = 9, k_2 = 4$$

ב.

$$k_1 = 9 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{6 - 9} = -\frac{1}{3}, k_2 = 4 \Rightarrow q_2 = \frac{1}{6 - 4} = \frac{1}{2}, a_i > 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = k = 4 \Rightarrow a_7 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{4}{64} \Rightarrow a_7 = \frac{1}{16}$$

ג.

$$n_{middle} = 7 \Rightarrow n_{last} = 6 + 1 + 6 \Rightarrow n = 13$$

ד.

$$S_{13} = 4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{13}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{1 - \frac{1}{8192}}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 2 \cdot \frac{8191}{8192} = \frac{8191}{1024} \Rightarrow S = 7 \frac{1023}{1024}$$

13. א. סדרה חשבונית

$$(I) a_6 - a_2 = 200 \Rightarrow (a_1 + 5d) - (a_1 + d) = 200 \Rightarrow 4d = 200 \Rightarrow d = 50$$

$$(II) a_9 = 1.2 a_1 \Rightarrow a_1 + 8 \cdot 50 = 1.2 a_1 \Rightarrow 400 = 0.2 a_1 \Rightarrow a_1 = 2,000$$

ב.

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \cdot 2000 + 50(n-1)) = 43,650 \Rightarrow n(2000 + 25(n-1)) = 43,650$$

$$2000n + 25n^2 - 25n = 43,650 \Rightarrow 25n^2 + 1975n - 43,650 = 0 \quad / : 25$$

$$n^2 + 79n - 1746 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-79 \pm 115}{2}, n > 0 \Rightarrow n = \frac{36}{2} \Rightarrow n = 18$$

ג.

$$n = 18 \Rightarrow \frac{43,650}{18} = 2,425 \Rightarrow a_n < 2425 \Rightarrow 2000 + 50(n-1) < 2425$$

התשלום הקבוע

$$\Rightarrow 50(n-1) < 425 \Rightarrow n-1 < 8.5 \Rightarrow n < 9.5 \Rightarrow n = 9$$

14. א. סדרה חשבונית

$$a_1 = 6, d = 1.5, a_n = 42 \Rightarrow 6 + 1.5(n-1) = 42 \Rightarrow n-1 = 24 \Rightarrow n = 25$$

ב.

$$a_{20} = 6 + 1.5 \cdot 19 \Rightarrow a_{20} = 34.5 \text{ km}$$

ג. נותרו לה השבועות: 20, 21, 22, 23. בשבוע ה-20 היא רצה 34.5.

בסדרה החדשה יש 4 איברים, לכן בשבוע ה-23 היא רצה: $42 < 34.5 + 2 \cdot 3 = 40.5 < 42$ לכן לא

ד.

$$S_a = a_1 + a_2 + \dots + a_{19} = \frac{19}{2} \cdot (2 \cdot 6 + 1.5 \cdot 18) = 370.5$$

$$S_b = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = \frac{4}{2} \cdot (2 \cdot 34.5 + 2 \cdot 3) = 150 \Rightarrow S = 370.5 + 150 = 520.5 \text{ km}$$

"Britain and France had to choose between war and dishonour.

They chose dishonour. They will have war"

(”בריטניה וצרפת צריכות היו לבחור בין מלחמה לבין חרפה. הם בחרו בחרפה. הם יקבלו מלחמה.”)

וינסטון צ'רצ'יל (1874-1965), על הסכם מינכן (1938). זה באמת מה שהיה.

את ההסכם 'השיג' מהיטלר יש"ו ראש ממשלת בריטניה בזמנו נוויל צ'מברליין (1869-1940).

חצי שנה לאחר פרוץ מלחמת העולם השנייה נאלץ להתפטר.

צ'רצ'יל החליף אותו בתפקיד וניהל את המלחמה עד למיגורה של החיה הנאצית.

15. א. (1)

$$a_1 = 84, a_{n+1} = a_n - 2 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = -2 \Rightarrow d = -2 \quad \text{חשבונית:}$$

(2)

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 84 + (-2)(n-1) = 84 - 2n + 2 \Rightarrow a_n = 86 - 2n$$

ב. (1)

$$a_n > 0 \Leftrightarrow 86 - 2n > 0 \Leftrightarrow 86 > 2n \Leftrightarrow 43 > n \Rightarrow n = 42$$

(2)

$$a_{43} = 86 - 2 \cdot 43 = 86 - 86 = 0 < 0, a_{44} = 86 - 2 \cdot 44 = 86 - 88 \Rightarrow a_{44} = -2$$

ג. נסמן את סדרת המספרים השליליים בסדרה ב- b_i

$$b_1 = -2, d = -2 \Rightarrow S_b = \frac{n}{2}(2 \cdot (-2) - 2(n-1)) = -552 \quad / \cdot 2$$

נתון

$$= n(-4 - 2n + 2) = -1104 \Rightarrow n(-2n - 2) = -1104 \quad / + 1104$$

$$-2n^2 - 2n + 1104 = 0 \quad / : (-2) \Rightarrow n^2 + n - 552 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-1 \pm 47}{2} \Rightarrow n = 23$$

$n > 0$

בסדרה יש 42 איברים חיוביים, איבר אחד שהוא 0 ו- 23 איברים שליליים:

$$N = 42 + 1 + 23 \Rightarrow N = 66$$

16. א. הסדרה היא סדרה חשבונית (הפרש קבוע)

$$d = 50, a_8 = 2 \cdot a_1 \Rightarrow a_1 + 7 \cdot 50 = 2 a_1 \quad / - a_1 \Rightarrow a_1 = 350m$$

ב. (1)

$$a_n = 830 \Rightarrow 350 + 50(n-1) = 830 \quad / - 350 \Rightarrow 50(n-1) = 480 \quad / : 50$$

$$n-1 = 9\frac{3}{5} \Rightarrow n = 10\frac{3}{5} \Rightarrow \text{לא}$$

(2)

$$a_n = 1,000 \Rightarrow 1,000 = 350 + 50(n-1) \quad / - 350 \Rightarrow 50(n-1) = 650 \quad / : 50$$

$$n-1 = 13 \Rightarrow n = 14$$

ג.

$$S_{14} = \frac{14}{2}(2 \cdot 350 + 50 \cdot 13) = 7 \cdot (700 + 650) = 7 \cdot 1,350 = 9,450$$

$$25,450 - 9,450 = 16,000 \Rightarrow + 16_{\text{trainings}} \Rightarrow 14 + 16 = 30_{\text{trainings}}$$

good men must not obey the laws too well

(ראלף וולדו אמרסון. פילוסוף, הוגה דעות, סופר ומשורר אמריקאי. 1803-1882)

17. א. (1) סדרה הנדסית: $a_1 = 75$, $q = 1.02$

$$a_4 = 75 \cdot 1.02^3 \Rightarrow a_4 = 79.59m$$

(2)

$$S_4 = 75 \cdot \frac{1.02^4 - 1}{1.02 - 1} \Rightarrow S_4 = 309.12m$$

ב.

$$S_n = 75 \cdot \frac{1.02^n - 1}{1.02 - 1} \Rightarrow S_n = 3,750 \cdot (1.02^n - 1)m$$

ג.

$$S_{25} = 3,750 \cdot (1.02^{25} - 1) = 2,402.27 < 2,500$$

ד.

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1.02^{25} - 1}{1.02 - 1} \geq 2,500 \Rightarrow b_1 \cdot 32.03 \geq 2,500$$

$$\Rightarrow b_1 = 78.05m$$



אלוף ריבועי הקסם

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

ישנם 880 ריבועי קסם יסודיים מסדר 4×4 .

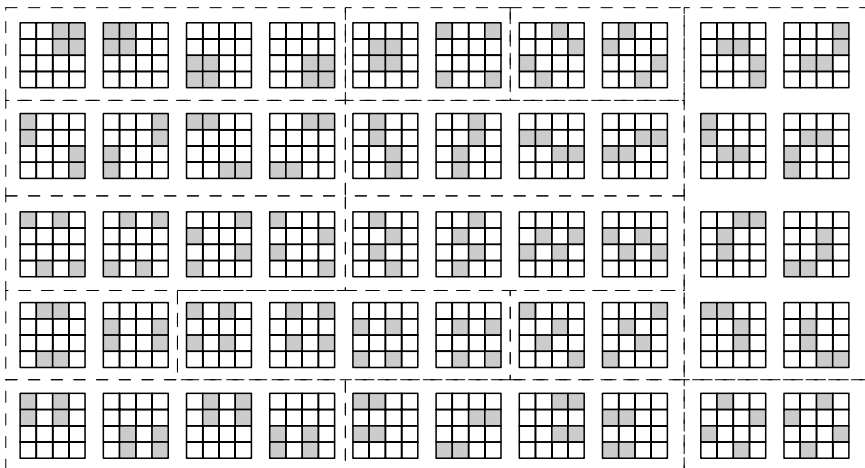
כלומר שאף לא אחד מהם הינו שיקוף או סיבוב של ריבוע קסם אחר.

ריבוע הקסם המתואר משמאל הוא כנראה ריבוע הקסם היפה ביותר.

לא רק שסכום כל שורה, כל טור וכל אלכון שווה ל-34.

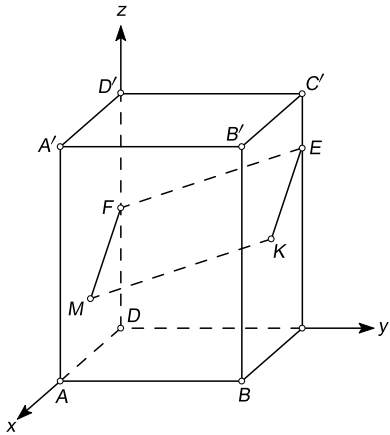
אלא עוד 50 וריאציות סימטריות נוספות, ובסה"כ: 60 צירפים סימטריים של 34!

להלן פירוט הצירופים (למעט שורות, טורים ואלכסונים):



מבחן 14 - קיץ תשפ"ג - 2023 - מועד ב

בחירה: שלוש שאלות מתוך חמש. לפחות שאלה אחת מכל פרק.



פרק ראשון - גאומטריה במרחב, סטטיסטיקה

1.

תיבה ממוקמת במערכת צירים,

כך שהקודקוד D נמצא בראשית הצירים.

הקודקודים D' , C , A ,

על החלקים החיוביים של ציר x ,

של ציר y ושל ציר z בהתאמה.

נתון: $DC = 5$, $AD = 2$.

נפח התיבה הוא 80.

א. (1) מצא את שיעורי הקודקוד D' .

(2) כתוב את שיעורי הקודקודים A , B , C , C' .

נתון: הנקודה E נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\vec{CE} = \frac{3}{4} \vec{CC'}$.

הנקודה F היא אמצע המקצוע DD' .

הנקודה K היא נקודת החיתוך של אלכסוני הפאה $BB'C'C$.

הנקודה M נמצאת על הפאה $AA'D'D$ ומקיימת:

המרובע $FEKM$ הוא מקבילית.

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודות E , F , K .

(2) חשב את גודל הזווית $\angle FEK$.

(3) חשב את שטח המקבילית $FEKM$.

ד. (1) מצא את שיעורי הנקודה M .

(2) הסבר מדוע הנקודות A , M , F נמצאות על אותו ישר.

(3) חשב פי כמה גדול שטח המקבילית $FEKM$ משטח המשולש AMK .

2. רגרסיה. נושא זה הועבר לשאלון 471.



1. א. (1) $D'(0, 0, 8)$ **(2)** $A(2, 0, 0)$, $B(2, 5, 0)$, $C(0, 5, 0)$, $C'(0, 5, 8)$

ב. $E(0, 5, 6)$, $F(0, 0, 4)$, $K(1, 5, 4)$

ג. (1) $\angle FEK = 70.6^\circ$ **(2)** $S_{FEKM} = 11.36$ (יחידות ריבועיות)

ד. (1) $M(1, 0, 2)$ **(3)** $S_{FEKM} : S_{\triangle AMK} = 2$

פרק שני - גדילה ודעיכה, חדו"א של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

3. אחד הבנקים מלווה כסף לגופים מסחריים בריבית קבועה.

א. הנהלת הבנק קבעה ריבית של 1.45% לשנה.

(1) חברת 'היי־טק' לוותה 1,000,000 שקלים לשנתיים.

מהו גובה הסכום שהיה על החברה להחזיר לבנק בתום השנתיים?

(2) חברת 'התעשייה' לוותה 1,000,000 שקלים ל- 3 חודשים.

מהו גובה הסכום שהיה עליה להחזיר לבנק בתום 3 החודשים?

(3) חברת 'הבניה' לוותה 2,000,000 שקלים,

והחזירה לבנק בתום תקופת ההלוואה סכום של 2,103,353.05 שקלים.

מה היה משך תקופת ההלוואה?

הנהלת הבנק התחלפה,

ואז הציע הבנק ללקוחותיו המסחריים שני מסלולי הלוואה חדשים לשנתיים:

מסלול 1 - מסלול בריבית משתנה: 1% ריבית לשנה הראשונה, ו- 2.2% ריבית לשנה השנייה.

מסלול 2 - מסלול בריבית שנתית קבועה לשנתיים.

ב. חברה לווה סכום מסוים.

מה צריכה להיות הריבית השנתית במסלול 2,

כדי שבתום השנתיים יקבל הבנק מן החברה את אותו סכום החזר בשני המסלולים?

פרט את חישוביך.

4.5. זהות לשאלות 4-5 בשאלון 482 במועד זה.

בהצלחה

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

ההבדל בין זכויות, שדרכה אדם רואה אנשים מצידה האחר,

לבין מְרָאָה, שבה אדם רואה רק את עצמו.

הוא - שהמְרָאָה מצופה בכסף . . .



3. א. (1) 1,029,210.25_{sh} (2) 1,003,605.45_{sh} (3) t = 3.5 years ב. p = 1.6%

פתרון מבחן 14

א. (1)

$$V = 2 \cdot 5 \cdot DD' = 80 \Rightarrow DD' = 8 = z_{D'}$$

$$x_{D'} = y_{D'} = 0 \Rightarrow D'(0, 0, 8)$$

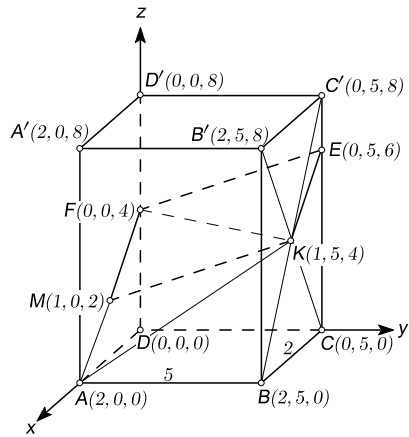
(2)

$$A(2, 0, 0), B(2, 5, 0), C(0, 5, 0), C'(0, 5, 8)$$

ב.

$$CE = \frac{3}{4} CC' = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6 = z_E \Rightarrow E(0, 5, 6)$$

$$DF = FD' \Rightarrow DF = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \Rightarrow F(0, 0, 4)$$



1.

אלכסוני מלבן שווים זה לזה וחוצים זה את זה:

$$BK = KC' \Rightarrow K\left(\frac{x_B+x_{C'}}{2}, \frac{y_B+y_{C'}}{2}, \frac{z_B+z_{C'}}{2}\right) \Rightarrow K\left(\frac{0+2}{2}, \frac{5+5}{2}, \frac{8+0}{2}\right) \Rightarrow K(1, 5, 4)$$

ג. (1) משפט הקוסינוסים:

$$EF = \sqrt{(0-0)^2 + (0-5)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{29}$$

$$EK = \sqrt{(0-1)^2 + (5-5)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{5}$$

$$FK = \sqrt{(0-1)^2 + (0-5)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{26}$$

$$\triangle FEK: 26 = 29 + 5 - 2 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \angle E \Rightarrow \cos \angle E = 0.3322 \Rightarrow \angle FEK = 70.6^\circ$$

(2)

$$S_{FEKM} = 2 \cdot S_{\triangle FEK} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot EF \cdot EK \cdot \sin 70.6^\circ = \sqrt{29} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin 70.6^\circ \Rightarrow S_{FEKM} = 11.36$$

ד. (1) צלעות נגדיות במקבילית מקבילות זו לזו ושוות זו לזו:

$$\vec{MF} = \vec{KE} \Rightarrow F - M = E - K = (0, 0, 4) - (x_M, y_M, z_M) = (0, 5, 6) - (1, 5, 4)$$

$$(-x_M, -y_M, 4 - z_M) = (-1, 0, 2) \Rightarrow x_M = 1, y_M = 0, z_M = 2 \Rightarrow M(1, 0, 2)$$

(2)

$$\vec{AM} = M - A = (1, 0, 2) - (2, 0, 0) = (-1, 0, 2), \vec{AF} = F - A = (0, 0, 4) - (2, 0, 0) = (-2, 0, 4)$$

$$\Rightarrow \vec{AF} = 2 \cdot \vec{AM} \Rightarrow \text{על קו ישר אחד } A, F, M$$

(3) למשולשים AMK ו־FMK גובה משותף, מאחר שבסיסיהם על אותו ישר,

לכן יחס שטחיהם שווה ליחס בסיסיהם:

$$\frac{AM}{MF} = \frac{\sqrt{1+4}}{\sqrt{5}} = 1 \Rightarrow AM = MF \Rightarrow S_{\triangle AMK} = S_{\triangle FMK} = \frac{1}{2} S_{FEKM}$$

$$\Rightarrow S_{FEKM} : S_{\triangle AMK} = 2$$

3. א. (1)

$$m_0 = 1,000,000, \quad q = 1.0145, \quad t = 2$$

$$\Rightarrow m_2 = 1,000,000 \cdot 1.0145^2 = 1,029,210.25_{sh}$$

(2)

$$m_0 = 1,000,000, \quad q = 1.0145, \quad t = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow m_{0.25} = 1,000,000 \cdot 1.0145^{0.25} = 1,003,605.45_{sh}$$

(3)

$$m_0 = 2,000,000, \quad q = 1.0145, \quad m_t = 2,103,353.05, \quad t = ?$$

$$2,103,353.05 = 2,000,000 \cdot 1.0145^t \quad / : 2,000,000$$

$$1.0145^t = 1.05168 \quad \Rightarrow \quad \ln 1.0145^t = \ln 1.05168 \quad \Rightarrow \quad t \ln 1.0145 = \ln 1.05168$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\ln 1.05168}{\ln 1.0145} \quad \Rightarrow \quad t = 3.5 \text{ years}$$

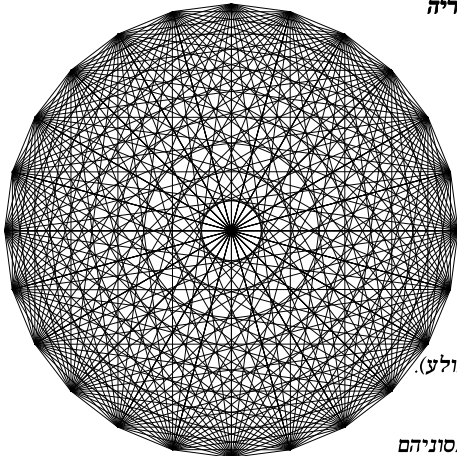
ב.

$$m_0 = k, \quad q_{\text{first year}} = 1.01, \quad q_{\text{second year}} = 1.022, \quad q_2 = 1 + \frac{p}{100}, \quad t = 2$$

$$k \cdot 1.01 \cdot 1.022 = k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 1.03222 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$1 + \frac{p}{100} = 1.01598 \quad / - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{100} = 0.01598 \quad / \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad p = 1.598 \quad \Rightarrow \quad 1.6\%$$

יופי של גאומטריה



בציור מתואר מצולע משוכלל בעל 24 צלעות, וכל אלכסוניו. מספר נקודות המפגש הפנימיות של אלכסוניו, הוא 7297 - שהוא מספר ראשוני. במספר זה כלולים:

- 6144 נקודות מפגש משותפות לשני אלכסונים,
- 864 נקודות מפגש משותפות לשלושה אלכסונים,
- 264 נקודות מפגש משותפות לארבעה אלכסונים,
- 24 נקודות מפגש משותפות לחמישה אלכסונים,

ונקודת מפגש אחת משותפת ל-12 אלכסונים (מרכז המצולע).

$$\text{סה"כ: } 6144 + 864 + 264 + 24 + 1 = 7297.$$

מצולעים משוכללים נוספים שמספר נקודות המפגש של אלכסוניהם הוא מספר ראשוני, אלו המצולעים שמספר צלעותיהם הוא:

$$5, 6, 14, 44, 58, 72, 76, 80, 84, 86, 104, 128, 134, 138, 180,$$

$$360 \text{ ו- } 186, 188, 218, 228, 246, 256, 266, 280, 300, 320, 352$$

מספר נקודות החיתוך הפנימיות של אלכסוני המצולע האחרון (360 צלעות), הוא 677, 630, 881 - מספר ראשוני.

(Prime curios, Chris K. Caldwell and G. L. Honaker, Jr.)

נוסחאון הנגרות לארבע יחידות

אלגברה

נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

סדרות:

סדרה הנרסית	סדרה חשבונית	
$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$	כלל נסיגה
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	האיבר ה-n
$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	סכום
$S = \frac{a_1}{1 - q}$: סכום אינסופי	$S_n = \frac{n \cdot [2a_1 + (n - 1)d]}{2}$	

חוקות: $(a \neq 0, b \neq 0)$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$, $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

לוגריתמים $(a, b, c > 0 ; a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

גאומטריה אנליטית

שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר $y = mx + b$ העובר בנקודה (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי נקודת האמצע $M(x_M, y_M)$ של קטע שקצותיו

הם $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הם: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו- m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

משוואת מעגל שמרכזו (a, b) , ורדיוסו R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

סטטיסטיקה

$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{N}$, $s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot f_n}{N}}$, $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל- k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית, כאשר

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{כאשר } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, - נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

טריגונומטריה

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

- משפט הסינוסים: (R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

- משפט הקוסינוסים: (γ היא הזווית הכלואה בין a ל- b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$

- שטח משולש: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל- c)

- גופים במרחב: מנסרה ישרה וגליל: נפח: $V = B \cdot h$ (B - שטח הבסיס, h - גובה הגוף)

שטח מעטפת: $M = P \cdot h$ (P - היקף הבסיס, h - גובה הגוף)

פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס, h - גובה הגוף)

שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול, l - הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות:

$$(x^t)' = t x^{t-1}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

נגזרת של מכפלת פונקציות: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

נגזרת של מנת פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקציה מורכבת: $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת

של u לפי x (נגזרת פנימית) ו- $f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז: $\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + c$

כשאתה מגיע למסקנה שהוריד צדקו, יש לך כבר ילדים שחושבים שאתה טועה...