יעקב רזניק

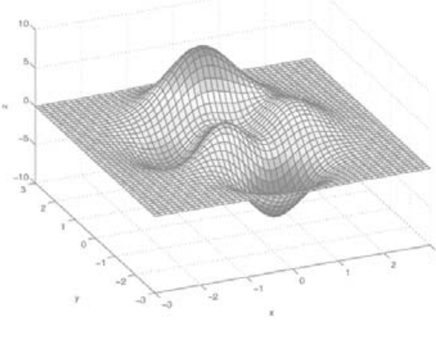
חשבון אינפיניטסימלי-2
(חדו"א-2)

למעלה מ-700 תרגילים עם פתרונות מלאים

+

הגדרות, משפטים ונוסחאות

מהדורה חמישית - 2022



הוצאת שורש

הוצאת שורש (אלי מיטב) - 052-2671210

email: **elmtv@017.net.il** web: **http://www.shoresh1.co.il**

הקדמה

ספר זה מיועד לסטודנטים שלומדים קורס אינפי-2 (חדו"א-2) בפקולטות שונות של אוניברסיטאות ומכללות. מחבר הספר לימד את הקורס במשך שנים רבות במוסדות להשכלה גבוהה ותמיד, כחלק של הקורס, הציע לסטודנטים להשתמש בחוברת תרגילים פתורים שפותחה על ידיו. הניסיון מראה באופן חד משמעי כי שימוש בחוברת מאפשר לסטודנט להבין ולהפנים ביתר קלות את החומר הנלמד. בדרך זאת יעילות החוברת עברה בדיקה לאורך שנים. החומר של החוברת בצורה מורחבת מהווה בסיס של הספר הזה.

הספר כולל יותר מ- 700 תרגילים עם פתרונות מלאים והסברים. בספר 25 פרקים. כל פרק הוא נושא מסוים של תוכנית הלימודים והוא כולל תרגילים, חומר תיאורטי נחוץ (הגדרות, משפטים, נוסחאות) והפתרונות. התרגילים והחומר התיאורטי מאוחדים בחלק הראשון של הספר. פתרונות התרגילים נמצאים בחלק השני (שנקרא "פתרונות"). תרגילים שמיועדים להעמקת הידע מסומנים בכוכבית (*). אחד מפרקי הספר מוקדש לשימוש בסימטריה בחישובי אינטגרלים רב-ממדיים. נושא זה מיועד לסטודנטים שלומדים פיזיקה ולפי דרישות הקורס צריכים לדעת להשתמש בסימטריה של בעיה כדי לכתוב אינטגרל חד-ממדי במקום אינטגרל משולש. הספר, בנוסף לתרגילים מקוריים, כולל גם שאלות המופיעות באוספי תרגילים ידועים. הרשימה הביבליוגרפית הובאה בסוף הספר.

המחבר מקווה שהספר יעזור לסטודנטים בלימודי אינפי-2 (חדו"א-2) ויהיה יעיל גם למרצים ומתרגלים.

כל ההערות ותגובות יתקבלו בתודה בכתובת דוא"ל jacobr@hit.ac.il .

תוכן עניינים

תרגילים

פתרונות

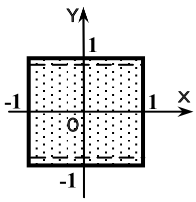
תרגילים,

הגדרות, משפטים ונוסחאות

1. מושגים יסודיים

הגדרה: פונקציה של n משתנים $y=f\left(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)$ היא כלל, שמתאים לכל נקודה $\left(x_1,x_2,x_3,\ \ldots,\ x_n\right)$ בתחום D של המרחב ה-n- ממדי R^n ערך ממשי אחד של המשתנה y.
במקרה הזה: קואורדינטות הנקודה $x_1,x_2,x_3,\ \ldots,\ x_n$ הן משתנים בלתי תלויים, y- הוא משתנה תלוי (ערך הפונקציה), D הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
במקרה פרטי, כאשר z היא פונקציה של שני משתנים $z=f(x,y)$, תחום ההגדרה D הוא חלק של המישור XY.

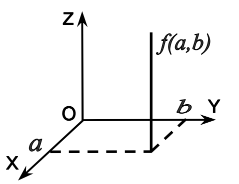
דוגמה 1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $z=\sqrt{1-|x|}+\ln\left(1-|y|\right)$ ושרטט אותו במישור XY.



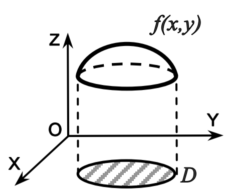
פתרון: $z=\sqrt{1-|x|}+\ln\left(1-|y|\right)\ \Rightarrow$

$$\begin{cases}1-|x|\ge 0 \ \Rightarrow\ |x|\le 1 \ \Rightarrow\ -1\le x\le 1 \\ 1-|y|>0 \ \Rightarrow\ |y|<1 \ \Rightarrow\ -1<y<1\end{cases}$$ וגם

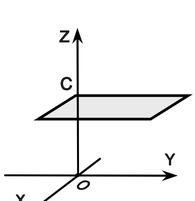
תחום ההגדרה של הפונקציה: $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,-1\le x\le 1\ ,\ -1<y<1\right\}$. מבחינה גיאומטרית D הוא תחום ריבועי במישור XY כך, שעבור כל הנקודות מתקיים: $-1\le x\le 1\ ,\ -1<y<1$ (לא כולל הצלעות $y=-1\ ,\ y=1$).



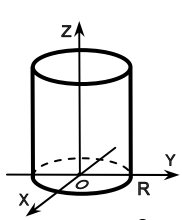
ערך הפונקציה $z=f(x,y)$ בנקודה (a,b) $\left(z=f(a,b)\right)$ הוא קטע שמאונך למישור XY (מקביל לציר ה-Z). אם הפונקציה $z=f(x,y)$ מוגדרת בתחום D, אז אוסף של כל הנקודות בעלות הקואורדינטות $\left(x,y,f(x,y)\right)$ הוא גרף הפונקציה (משטח במרחב תלת-מימדי R^3).



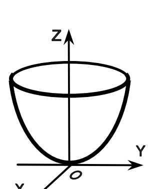
משוואות המשטחים השימושיים ביותר: משוואת המישור (משוואה לינארית): $Ax+By+Cz+D=0$. למשל: $6x-3y+2z-12=0$ או בצורה $z=-3x+\frac{3}{2}y+6$. משוואה של מישור שמאונך לציר ה-Z: $z=C$.
משוואה של גליל ישר: $x^2+y^2=R^2$, משוואה של פרבולואיד: $z=x^2+y^2$, משוואה של חרוט $z^2=x^2+y^2$, משוואה של ספרה (sphere, מעטפת של כדור): $x^2+y^2+z^2=R^2$.



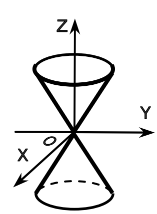
$z=C$



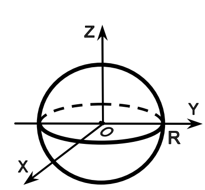
$x^2+y^2=R^2$



$z=x^2+y^2$



$z^2=x^2+y^2$



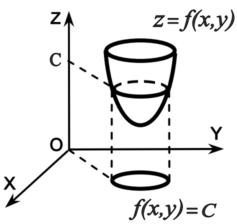
$x^2+y^2+z^2=R^2$

כאשר נחתכים שני משטחים, למשל מישור $Ax+By+Cz+D=0$ עם גרף הפונקציה $z=f(x,y)$, מתקבל קו החיתוך (במרחב תלת-מימדי). אם נציב $z=-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y-\frac{D}{C}$ במשוואה $z=f(x,y)$, נקבל משוואה בלי z, ז"א משוואת ההיטל של קו החיתוך על המישור XY. לדוגמה: אם המישור $z=1-2x-2y$ חותך את גרף הפונקציה $z=3-x^2-y^2$ (פרבולואיד), אז מתקבל קו החיתוך

במרחב תלת ממדי ומשוואת ההיטל של הקו על המישור XY נוכל למצוא על ידי ההצבה:

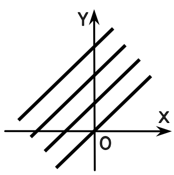
$$1-2x-2y=3-x^2-y^2 \Rightarrow x^2-2x+y^2-2y=2 \Rightarrow \left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)=4 \Rightarrow$$

$(x-1)^2+(y-1)^2=4 \Rightarrow$ (מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(1,1)$)



הגדרה: העקום $f(x,y)=C$ נקרא קו הגובה של הפונקציה $z=f(x,y)$ המתאים לערך של C. מבחינה גיאומטרית קו הגובה הוא קו החיתוך של גרף הפונקציה $z=f(x,y)$ עם המישור $z=C$, ו- $f(x,y)=C$ היא משוואת ההיטל של קו החיתוך הנ"ל על המישור XY.

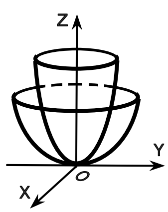
באופן דומה: אם u היא פונקציה של שלושה משתנים $u=f(x,y,z)$ אז המשטח $f(x,y,z)=C$ נקרא משטח הרמה של הפונקציה u המתאים לערך של C (משטח, שבכל נקודה שלו ערך הפונקציה שווה ל-C).



דוגמה 2. מצא את קווי הגובה של הפונקציה $z=\sqrt{y-x}$.

פתרון: $z=\sqrt{y-x} \Rightarrow C=\sqrt{y-x} \Rightarrow y-x=C^2 \Rightarrow y=x+C^2$

קווי הגובה הם ישרים מקבילים (החל מ- $y=x$ "ומעלה").



דוגמה 3. מצא את משטחי הרמה של הפונקציה $(z>0)$ $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

פתרון: $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}\ (z>0) \Rightarrow C=\dfrac{z}{x^2+y^2}\ (C>0),\ z=C\left(x^2+y^2\right)$

כל משטח רמה הוא פרבולואיד (לא כולל הנקודה $(0,0,0)$).

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ושרטט אותו במערכת צירים:

1) $z=\sqrt{y-5}\,e^{x/(y-5)}$

2) $z=\begin{cases}\dfrac{\arctan(x-y)}{\sqrt{4-y^2}}, & y\neq -2\\ 0, & y=-2\end{cases}$

3) $z=\dfrac{\left(x^2+y^2-9\right)^{xy}}{x^2+y^2}$

4) $z=\dfrac{\sqrt{y}}{x^2+1}\sqrt[6]{36-4x^2-9y^2}$

5) $z=\sqrt{\dfrac{9-x^2-y^2}{x}}+\ln x$

6) $z=\dfrac{\sqrt{16-x^2-4y^2}}{1+|\arcsin y|}$

7) $z=\ln\ln(x-y)$

8) $z=\sqrt{-\left|x^2-y^2-4\right|}$

מצא את קווי הגובה (משטחי הרמה) של הפונקציה:

9) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$

10) $z=\sqrt{xy}$

11) $z=e^{y-x^2}$

12) $z=\arctan(y-x)$

13) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

14) $u=z-x^2-y^2$

15) $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ (z>0)$

2. גבול ורציפות של פונקציה של משתנים אחדים

תהי $z=f(x,y)$ פונקציה שמוגדרת בתחום D ו- $M_0(a,b)$ היא נקודה שבכל סביבה שלה, קטנה ככל שיהיה, קיימת לפחות נקודה אחת השייכת לתחום D (ז"א M_0 היא "נקודת הצטברות").

הגדרה (בלשון ε-δ): המספר L הוא גבול של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(a,b)$, אם עבור כל $\varepsilon>0$, קטן ככל שיהיה, קיים $\delta>0$ כך, שמתקיים $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ כאשר $|x-a|<\delta$, $|y-b|<\delta$.

ההגדרה האקוויוולנטית של גבול הפונקציה **בלשון הסדרות**:

המספר L הוא גבול של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(a,b)$, אם עבור כל סדרת הנקודות $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ $(M_i \in D)$ המתכנסת לנקודה M_0, הסדרה המתאימה של ערכי הפונקציה $f(M_1), f(M_2), f(M_3), \dots, f(M_n), \dots$ מתכנסת ל- L. ורושמים:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=L \quad \text{או} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \quad \text{או} \quad f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} L$$

נדגיש שגבול הפונקציה בנקודה M_0 קיים רק אם הוא **לא תלוי** במסלול ההתקרבות ל- M_0.

דוגמה 1. הוכח שהגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$ לא קיים.

פתרון: נבחר בתור מסלול ההתקרבות לנקודה $(0,0)$ את הישר $y=kx$ ונקבל אחרי ההצבה:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}=\Big|y=kx\Big|=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+kx}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1+k)}=\frac{1}{1+k}$$

הגבול לא קיים כי הוא תלוי בפרמטר k ז"א במסלול ההתקרבות לנקודה $(0,0)$.

כדי לחשב גבול של פונקציה אפשר להשתמש בהערכת ערכי הפונקציה בסביבת נקודת הצטברות:

דוגמה 2. חשב את הגבול: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^2+y^2}$.

פתרון: $0\le\left|\dfrac{x^5}{x^2+y^2}\right|\le\left|\dfrac{x^5}{x^2}\right|=|x|^3\xrightarrow[x\to 0]{} 0$. לפי משפט "סנדוויץ'" מגיעים למסקנה שהגבול המבוקש שווה ל-0. ניתן לחשב את הגבול גם באמצעות המעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^5}{x^2+y^2}=\left|\begin{matrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{matrix}\right|=\lim_{r\to 0}\frac{r^5\cos^5\varphi}{r^2}=\lim_{r\to 0} r^3\cos^5\varphi \;,\; 0\le\left|r^3\cos^5\varphi\right|\le\left|r^3\right|\xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

משתמשים בחישוב גבולות כדי לבדוק רציפות של פונקציה בנקודה.

הגדרה: תהי $z=f(x,y)$ פונקציה, שמוגדרת בתחום D ו- $M_0(a,b)\in D$. הפונקציה $f(x,y)$ רציפה בנקודה $M_0(a,b)$, אם מתקיים $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$.

א. חישוב גבול של פונקציה

חשב את הגבול הנתון או הוכח שהוא לא קיים:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+2y^2-3xy}{x^2+3y^2}$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to \infty}} \left(1+\dfrac{x}{y}\right)^y$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)\cos\dfrac{1}{xy}$ **5)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(2xy)}{y}$ **6)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **8)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3+y^2}{x^3+y^3}$ **9)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln\left(1+3y^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$ **11)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ **12)** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 3}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

13) $\lim\limits_{\substack{x\to +0\\ y\to +0}} \dfrac{x^3+2y^3-x}{\sqrt{y^6+x^2}}$ **14)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **15)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}$

16) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\tan\left(x^3+y^3\right)}{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}$ **17)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\tan xy}{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}$

18) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^5-\cos\left(2x^2+2y^2\right)+1}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ **19)** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

20*) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^5-x^2y^3}{x^4+y^4}$ **21*)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4-x^3y-xy^3+y^4}{\sqrt{x^6+y^6}}$ **22*)** $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

ב. רציפות של פונקציה

בדוק את רציפות הפונקציה הנתונה $z=f(x,y)$ בנקודה $(0,0)$:

1) $z=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^5}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **2)** $z=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{y}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

3) $z=\begin{cases}\dfrac{2x+y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **4)** $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^6+y^3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

5) $z=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{y}\sin\left(x^2\right)}{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **6)** $z=\begin{cases}\dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

7) בדוק את רציפות הפונקציה הנתונה $f(x,y)$ בנקודה $(1,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}, & (x,y)\neq(1,0)\\ 2, & (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

b) $\mathrm{Si}(0.2)=\int_0^{0.2}\frac{\sin t}{t}\,dt=\left(x-\frac{x^3}{3!\cdot 3}+\frac{x^5}{5!\cdot 5}-\dots\right)_{x=1/5}=\frac{1}{5}-\frac{1}{3!\cdot 3\cdot 5^3}+\frac{1}{5!\cdot 5\cdot 5^5}-\dots$

$\frac{1}{5!\cdot 5\cdot 5^5}=\frac{1}{1\,875\,000}<\frac{1}{100\,000}\quad\Rightarrow\quad \mathrm{Si}(0.2)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3!\cdot 3\cdot 5^3}=0.19955$

24) a) $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, b) $A=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(0.5)$, $\varepsilon=0.00001$

a) $\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}\right]dt=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^x\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\,dt\right]=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)}\Bigg|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\frac{x^9}{4!\cdot 9}-\dots$

$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)}$, $R=\infty$

b) $A=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1/2)^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8\cdot 3}+\frac{1}{32\cdot 10}-\frac{1}{128\cdot 42}+\frac{1}{512\cdot 216}-\dots$

$\frac{1}{512\cdot 216}=\frac{1}{110\,592}<\frac{1}{100\,000}\quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{320}-\frac{1}{5376}=0.46127$

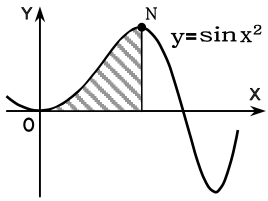
25*) a) $S(x)=\int_0^x\sin t^2\,dt$, $C(x)=\int_0^x\cos t^2\,dt$, b) $\varepsilon=0.001$

a) $S(x)=\int_0^x\sin t^2\,dt=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(t^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^x(-1)^n\frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!}\right]=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{4n+3}}{(2n+1)!\cdot(4n+3)}\Bigg|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!\cdot(4n+3)}=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^{11}}{1320}-\dots$, $R=\infty$

$C(x)=\int_0^x\cos t^2\,dt=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(t^2)^{2n}}{(2n)!}\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^x(-1)^n\frac{t^{4n}}{(2n)!}\right]=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{4n+1}}{(2n)!\cdot(4n+1)}\Bigg|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n)!\cdot(4n+1)}=x-\frac{x^5}{10}+\frac{x^9}{216}-\dots$, $R=\infty$



b) נמצא את הקואורדינאטה x_N של הנקודה N:

$$y=\sin x^2 \;\Rightarrow\; y'=2x\cos x^2 \;,\; x\cos x^2=0 \;\Rightarrow$$

$$x=0 \;,\; x^2=\frac{\pi}{2} \;,\; x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1.2533141$$

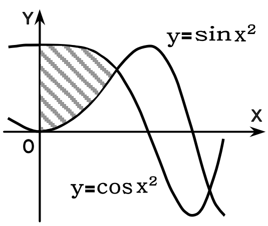
נחשב את השטח המקווקו (נסמן אותו A):

$$A=\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\sin x^2\,dx=S\left(\sqrt{\pi/2}\right)=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{42}x^7+\frac{1}{1320}x^{11}-\frac{1}{7!\cdot 15}x^{15}+\dots\right)\Bigg|_{\sqrt{\pi/2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{\pi/2}\right)^3-\frac{1}{42}\left(\sqrt{\pi/2}\right)^7+\frac{1}{1320}\left(\sqrt{\pi/2}\right)^{11}-\frac{1}{7!\cdot 15}\left(\sqrt{\pi/2}\right)^{15}+\dots$$

$$\frac{\left(\sqrt{\pi/2}\right)^{15}}{7!\cdot 15}\approx 0.0004<0.001 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{\left(\sqrt{\pi/2}\right)^3}{3}-\frac{\left(\sqrt{\pi/2}\right)^7}{42}+\frac{\left(\sqrt{\pi/2}\right)^{11}}{1320}=0.549$$

26*) $y=\sin x^2 \;,\; y=\cos x^2 \;,\; \varepsilon=0.0001$



$$\sin x^2=\cos x^2 \;\Rightarrow\; \tan x^2=1 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; x=\sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

$$A=\int_0^{\sqrt{\pi/4}}\left(\cos x^2-\sin x^2\right)dx=C\left(\sqrt{\pi/4}\right)-S\left(\sqrt{\pi/4}\right)$$

$$C\left(\sqrt{\pi/4}\right)=\left(x-\frac{x^5}{10}+\frac{x^9}{216}-\frac{x^{13}}{6!\cdot 13}+\dots\right)\Bigg|_{\sqrt{\pi/4}}=$$

$$=\sqrt{\pi/4}-\frac{\left(\sqrt{\pi/4}\right)^5}{10}+\frac{\left(\sqrt{\pi/4}\right)^9}{216}-\frac{\left(\sqrt{\pi/4}\right)^{13}}{6!\cdot 13} \quad,\quad \frac{1}{6!\cdot 13}\left(\sqrt{\pi/4}\right)^{13}\approx 0.00002<\frac{1}{2}\cdot 0.0001$$

$$C\left(\sqrt{\pi/4}\right)=\sqrt{\pi/4}-\frac{1}{10}\left(\sqrt{\pi/4}\right)^5+\frac{1}{216}\left(\sqrt{\pi/4}\right)^9=0.8331$$

$$S\left(\sqrt{\pi/4}\right)=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{42}x^7+\frac{1}{1320}x^{11}-\frac{1}{7!\cdot 15}x^{15}+\dots\right)\Bigg|_{\sqrt{\pi/4}}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{\pi/4}\right)^3-\frac{1}{42}\left(\sqrt{\pi/4}\right)^7+\frac{1}{1320}\left(\sqrt{\pi/4}\right)^{11}-\frac{1}{7!\cdot 15}\left(\sqrt{\pi/4}\right)^{15}+\dots$$

$$\frac{1}{7!\cdot 15}\left(\sqrt{\pi/4}\right)^{15}\approx 0.000002<\frac{1}{2}\cdot 0.0001$$

$$S\left(\sqrt{\pi/4}\right)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{\pi/4}\right)^3-\frac{1}{42}\left(\sqrt{\pi/4}\right)^7+\frac{1}{1320}\left(\sqrt{\pi/4}\right)^{11}=0.2220$$

$$C\left(\sqrt{\pi/4}\right)-S\left(\sqrt{\pi/4}\right)=0.8331-0.22200=0.6111 \quad\Rightarrow\quad A=0.6111$$

27) $\left(1+x^3\right)y'=y \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad n=4$

נחפש את פתרון המשוואה $y(x)$ בצורת טור טיילור בסביבת הנקודה $x_0=0$ (כי נתון $y(0)$):

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4+\frac{y^{V}(0)}{5!}x^5+\ldots$$

נתון $\boxed{y(0)=1}$. מציבים את $x=0$ למשוואה הנתונה $\left(1+x^3\right)y'=y$ ומקבלים $\boxed{y'(0)=1}$.
את המקדמים הבאים של הטור נמצא באמצעות גזירת המשוואה הנתונה והצבת $x=0$.

$$\left(\left(1+x^3\right)y'\right)'=y' \quad\Rightarrow\quad 3x^2y'+\left(1+x^3\right)y''=y' \quad\Rightarrow\quad y''(0)=y'(0) \quad\Rightarrow\quad \boxed{y''(0)=1}$$

$$\left(3x^2y'+\left(1+x^3\right)y''\right)'=y'' \quad\Rightarrow\quad 6xy'+6x^2y''+\left(1+x^3\right)y'''=y'' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y'''(0)=1}$$

$$\left(6xy'+6x^2y''+\left(1+x^3\right)y'''\right)'=y''' \quad\Rightarrow\quad 6y'+18xy''+9x^2y'''+\left(1+x^3\right)y^{IV}=y''' \quad\Rightarrow$$

$$6y'(0)+y^{IV}(0)=y'''(0) \quad\Rightarrow\quad y^{IV}(0)=y'''(0)-6y'(0) \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^{IV}(0)=-5} \quad\Rightarrow$$

$$y(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{-5}{4!}x^4+\ldots \quad\Rightarrow\quad y(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{5x^4}{24}+\ldots$$

אפשר למצוא את פתרון המשוואה הנ"ל גם באמצעות "שיטת המקדמים הלא מוגדרים":
נחפש את פתרון המשוואה $y(x)$ בצורת טור חזקות בסביבת הנקודה $x_0=0$:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

מהתנאי $y(0)=1$ מקבלים $\boxed{a_0=1}$. מציבים את הנגזרת $y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots$
למשוואה $\left(1+x^3\right)y'=y$ ומקבלים שוויון, שבו מקדמי חזקות זהות בשני האגפים שווים:

$$\left(1+x^3\right)\left(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots\right)=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

מהשוואת מקדמי החזקות מוצאים את המקדמים הלא ידועים:

$$x^0 \mid \boxed{a_1=1}$$

$$x^1 \mid 2a_2=a_1 \quad\Rightarrow\quad 2a_2=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_2=1/2}$$

$$x^2 \mid 3a_3=a_2 \quad\Rightarrow\quad 3a_3=1/2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_3=1/6}$$

$$x^3 \mid 4a_4+a_1=a_3 \quad\Rightarrow\quad 4a_4+1=1/6 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_4=-5/24} \quad\Rightarrow$$

$$y=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{24}x^4+\ldots$$

28) $y'+y^2=1+x \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad n=4$

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4+\ldots \quad , \quad \boxed{y(0)=1}$$

$$y'=-y^2+x+1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y'(0)=0} \quad , \quad \left(y'\right)'=\left(-y^2+x+1\right)' \quad\Rightarrow$$

$$y''=-2yy'+1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y''(0)=1} \quad , \quad y'''=\left(-2yy'+1\right)' \quad\Rightarrow\quad y'''=-2\left(y'^2+yy''\right) \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{y'''(0)=-2} \quad , \quad y^{IV}=-2\left(y'^2+yy''\right)' \quad\Rightarrow\quad y^{IV}=-2\left(3y'y''+yy'''\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^{IV}(0)=4}$$

$$y(x)=1+0x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{-2}{3!}x^3+\frac{4}{4!}x^4+\ldots \quad\Rightarrow\quad y(x)=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\ldots$$

29) $y' = \sin xy \ , \ y(0) = 1 \ , \ n = 4$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4 + \dots \ , \quad \boxed{y(0)=1}$$

$$y' = \sin xy \ \Rightarrow \ \boxed{y'(0)=0} \ , \ (y')' = (\sin xy)' \ \Rightarrow \ y'' = \cos xy(y + xy') \ \Rightarrow$$

$$\boxed{y''(0)=1} \ , \ y''' = -\sin xy(y+xy')^2 + \cos xy(2y' + xy'') \ \Rightarrow \ \boxed{y'''(0)=0}$$

$$y^{IV} = -\cos xy(y+xy')^3 - \sin xy\left((y+xy')^2\right)' - \sin xy \cdot (xy)' \cdot (2y' + xy'') +$$

$$+\cos xy(3y'' + xy''') \ \Rightarrow \ \boxed{y^{IV}(0)=2}$$

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{4!}x^4 + \dots \ \Rightarrow \ y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \dots$$

30) $y' - xy = e^y \ , \ y(0) = 0 \ , \ n = 4$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4 + \dots \ , \quad \boxed{y(0)=0}$$

$$y' = e^y + xy \ \Rightarrow \ \boxed{y'(0)=1} \ , \ (y')' = (e^y + xy)' \ \Rightarrow \ y'' = e^y y' + y + xy' \ \Rightarrow$$

$$\boxed{y''(0)=1} \ , \ y''' = e^y\left(y'^2 + y''\right) + 2y' + xy'' \ \Rightarrow \ \boxed{y'''(0)=4}$$

$$y^{IV} = e^y\left(y'^3 + y'y''\right) + e^y\left(2y'y'' + y'''\right) + 3y'' + xy''' \ \Rightarrow$$

$$y^{IV} = e^y\left(y'^3 + 3y'y'' + y'''\right) + 3y'' + xy''' \ \Rightarrow \ \boxed{y^{IV}(0)=11}$$

$$y(x) = x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \frac{11}{4!}x^4 + \dots \ \Rightarrow \ y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{24}x^4 + \dots$$

31) $y'' = x^2 y \ , \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1 \ , \ n = 5$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4 + \dots \ , \quad \boxed{y(0)=1} , \boxed{y'(0)=1}$$

$$y'' = x^2 y \ \Rightarrow \ \boxed{y''(0)=0} \ , \ (y'')' = (x^2 y)' \ \Rightarrow \ y''' = 2xy + x^2 y' \ \Rightarrow \ \boxed{y'''(0)=0}$$

$$y^{IV} = 2y + 2xy' + 2xy' + x^2 y'' = 2y + 4xy' + x^2 y'' \ \Rightarrow \ \boxed{y^{IV}(0)=2}$$

$$y^{V} = 2y' + 4y' + 4xy'' + 2xy'' + x^2 y''' = 6y' + 6xy'' + x^2 y''' \ \Rightarrow \ \boxed{y^{V}(0)=6}$$

$$y(x) = 1 + x + 0x^2 + 0x^3 + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{6}{5!}x^5 + \dots \ \Rightarrow \ y(x) = 1 + x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + \dots$$

פתרון המשוואה באמצעות "שיטת המקדמים הלא מוגדרים":

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots \ , \quad y(0) = 1 \ \Rightarrow \ \boxed{a_0 = 1}$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots \ , \quad y'(0) = 1 \ \Rightarrow \ \boxed{a_1 = 1}$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$$

נציב למשוואה הנתונה את y'' ו-y ונשווה את מקדמי החזקות בשני אגפי השוויון המתקבל:

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\ldots=x^2\left(1+x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots\right)$$

$$x^0 \mid 2a_2=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_2=0}$$

$$x^1 \mid 6a_3=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_3=0}$$

$$x^2 \mid 12a_4=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_4=1/12}$$

$$x^3 \mid 20a_5=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_5=1/20} \qquad\Rightarrow\qquad y=1+x+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{20}x^5+\ldots$$

32) $y''+\frac{1}{1-x}y=0 \ ,\ y(0)=0 \ ,\ y'(0)=1 \ ,\ n=5$

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4+\ldots \ ,\quad \boxed{y(0)=0}\ ,\boxed{y'(0)=1}$$

$$y''+\frac{1}{1-x}y=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)y''=y \quad\Rightarrow\quad \boxed{y''(0)=0} \quad , \quad \left((x-1)y''\right)'=y' \quad\Rightarrow$$

$$y''+(x-1)y'''=y' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y'''(0)=-1} \quad , \quad \left(y''+(x-1)y'''\right)'=y'' \quad\Rightarrow$$

$$2y'''+(x-1)y^{IV}=y'' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^{IV}(0)=-2} \quad , \quad \left(2y'''+(x-1)y^{IV}\right)'=y''' \quad\Rightarrow$$

$$3y^{IV}+(x-1)y^{V}=y''' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^{V}(0)=-5}$$

$$y(x)=x+0x^2-\frac{1}{3!}x^3-\frac{2}{4!}x^4-\frac{5}{5!}x^5+\ldots \qquad\Rightarrow\qquad y(x)=x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^5}{24}+\ldots$$

33) $y''-xy=0 \ ,\ y(0)=1 \ ,\ y'(0)=0 \ ,\ n=6$

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4+\ldots \ ,\quad \boxed{y(0)=1}\ ,\boxed{y'(0)=0}$$

$$y''-xy=0 \quad\Rightarrow\quad y''=xy \quad\Rightarrow\quad \boxed{y''(0)=0} \quad , \quad y'''=y+xy' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y'''(0)=1}$$

$$y^{IV}=\left(y+xy'\right)' \quad\Rightarrow\quad y^{IV}=2y'+xy'' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^{IV}(0)=0}$$

$$y^{V}=\left(2y'+xy''\right)' \quad\Rightarrow\quad y^{V}=3y''+xy''' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^{V}(0)=0}$$

$$y^{VI}=\left(3y''+xy'''\right)' \quad\Rightarrow\quad y^{VI}=4y'''+xy^{IV} \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^{VI}(0)=4}$$

$$y(x)=1+0x+0x^2+\frac{1}{3!}x^3+0x^4+0x^5+\frac{4}{6!}x^6+\ldots \qquad\Rightarrow\qquad y(x)=1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{180}+\ldots$$

34) $yy''-y'^2=0 \ ,\ y(0)=1 \ ,\ y'(0)=2 \ ,\ n=4$

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4+\ldots \ ,\quad \boxed{y(0)=1}\ ,\boxed{y'(0)=2}$$

$$yy''=y'^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y''(0)=4} \quad , \quad \left(yy''\right)'=\left(y'^2\right)' \quad\Rightarrow\quad y'y''+yy'''=2y'y'' \quad\Rightarrow$$

$$yy'''=y'y'' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y'''(0)=8} \quad , \quad \left(yy'''\right)'=\left(y'y''\right)' \quad\Rightarrow\quad y'y'''+yy^{IV}=y''^2+y'y''' \quad\Rightarrow$$

$$yy^{IV} = y''^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^{IV}(0)=16}$$

$$y(x)=1+2x+\frac{4}{2!}x^2+\frac{8}{3!}x^3+\frac{16}{4!}x^4+\ldots \quad \Rightarrow \quad y(x)=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+\ldots$$

35) $y''+y'^2=2e^{-y}$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $n=4$

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4+\ldots, \quad \boxed{y(0)=0}, \boxed{y'(0)=2}$$

$$y''=2e^{-y}-y'^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y''(0)=-2} \quad , \; y'''=\left(2e^{-y}-y'^2\right)' \quad \Rightarrow$$

$$y'''=-2\left(e^{-y}y'+y'y''\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'''(0)=4} \quad , \; y^{IV}=-2\left(e^{-y}y'+y'y''\right)' \; \Rightarrow$$

$$y^{IV}=-2\left(-e^{-y}y'^2+e^{-y}y''+y''^2+y'y'''\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^{IV}(0)=-12}$$

$$y(x)=0+2x-\frac{2}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^3-\frac{12}{4!}x^4+\ldots \quad \Rightarrow \quad y(x)=2x-x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4+\ldots$$

ספרות

1. Berman G.N. A Problems Book in Mathematical Analysis. CBS Publishers & Distributors Pvt. Ltd., 2008

2. Demidovich B. Problems in Mathematical Analysis. Mir Publishers , 1989

3. Erdman J.M. Exercises and Problems in Calculus. Portland State University, 2010

4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, часть 1. Изд. МГУ, 2004

5. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, часть 2. Изд. МГУ, 2004