בע"ה אלול התשפ"א *אוגוסט 2021 למנינם*

מספר מילים לפנַי

ספר זה הוא השני משני ספרים המכילים שאלות ממבחני הבגרות במתמטיקה לשאלון 582 בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. חלק זה מכיל את כל 44 המבחנים שנערכו לשאלון זה בין השנים 2009–2021, במתכונת המבחן הנוכחי. לכל שאלה תשובה סופית בעמוד השאלה ופתרון מלא בצמוד לאותו מבחן.
בספר הראשון שאלות מהשנים 2004–2013, מחולקות לפי נושאים.

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעִתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ־2012 עד 2017 (מועד א), כפי שהם בספר, נמצאים באתר ההוצאה במִרְשֶׁתֶת (internet), בחינם.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל.
כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

*שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת ל**שריף אמארה** מכפר זָלָפָה ול**שרון חיים** מפתח תקוה.*

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התשפ"ב - 2022), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים.
המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

*את החללים שבין השאלות והפתרונות לְחַלַּחְתִּי בהבזקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקודות בעלות אופי **לאומי או יהודי**.*

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על־ידי חברת 'קל־ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה

אלי מיטב

***ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יָצאו גם לשאלונים** 581-482-481-382*

***ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יָצאו לשאלונים** 582-581-482-481*

582

בגרויות מתמטיקה - פתרונות מלאים - חלק שני

מבנה מבחן הבגרות לשאלון 582

שאלון ו' (35806) מהווה 60% מהציון הסופי.

שאלון ז' (35807) מהווה 40% מהציון הסופי.

משך זמן המבחן: שעתיים .

פרק א - בחירה: 2 שאלות מתוך 3 שאלות.

וקטורים, טריגונומטריה במרחב, גיאומטריה אנליטית, מספרים מרוכבים.

פרק ב - בחירה: שאלה אחת מתוך 2 שאלות.

בעיות גדילה ודעיכה

חדו"א של פונקציות חזקה (עם מעריך רציונלי), פונקציות מעריכיות, פונקציות לוגריתמיות (כולל שילוב עם פונקציות פולינום, פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות)

מעגל תשע הנקודות

בשנת 1765 גילה **אוילר** שתשע הנקודות הבאות במשולש: אמצעי הצלעות, עקבי גבהי המשולש, ונקודות האמצע שבין קדקודי המשולש לנקודת מפגש גבהיו - נמצאים על מעגל אחד.

ב־1822 גילה **קרל וילהלם פיירבך** שמעגל זה משיק גם לשלושת המעגלים המשיקים למשולש מבחוץ.

מעגל זה נקרא גם '**מעגל אוילר**' וגם '**מעגל פיינבך**'.

יש נקודות שמתלכדות בחלק מהמשולשים:

במשולש שווה־שוקיים יש שמונה נקודות (הגובה לבסיס הוא גם תיכון).

במשולש שווה־צלעות - שש נקודות, במשולש ישר־זווית - חמש נקודות

ובמשולש ישר־זווית ושווה־שוקיים - ארבע נקודות.

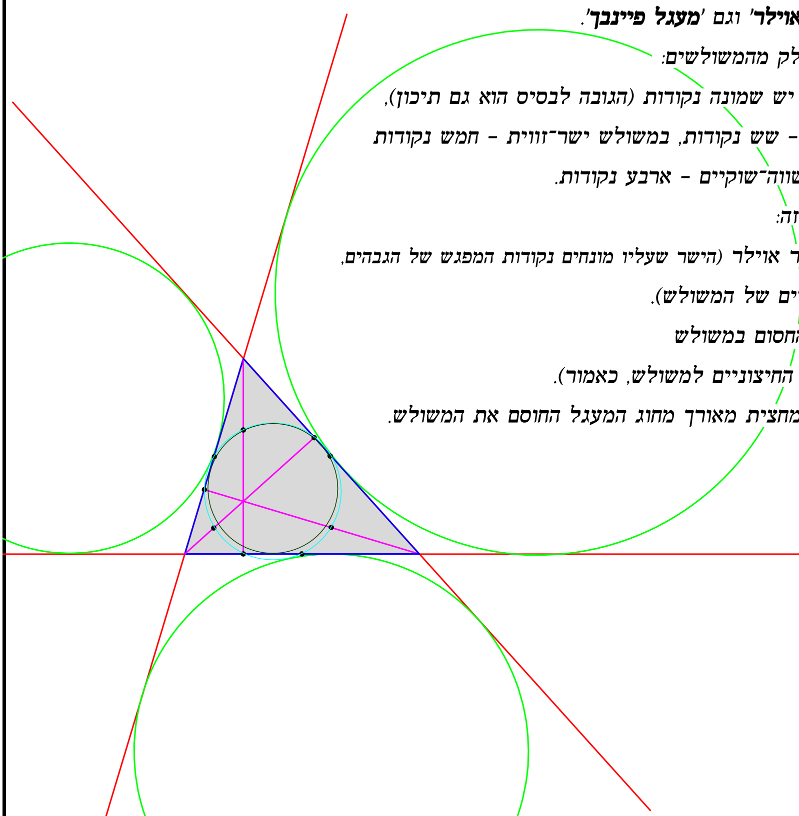
תכונות נוספות של מעגל זה:

מרכז המעגל נמצא על ישר אוילר (הישר שעליו מונחים נקודות המפגש של הגבהים, התיכונים והאנכים האמצעיים של המשולש).

המעגל משיק גם למעגל החסום במשולש

(בנוסף לשלושת המעגלים החיצוניים למשולש, כאמור).

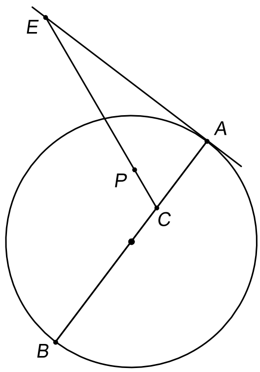
אורך מחוג המעגל שווה למחצית מאורך מחוג המעגל החוסם את המשולש.



מבחן 1 - קיץ תשס"ט - 2009 - מועד א

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 ושאלה אחת מהשאלות 4-5.

חלק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים



1. נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 887$.

בנקודה $A(20, 21)$ שעל המעגל העבירו משיק למעגל.

נקודה C נמצאת על קוטר המעגל AB

כך ש־ $AC = \frac{1}{3}AB$.

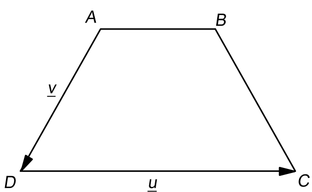
נקודה E נמצאת על המשיק,

ונקודה P נמצאת על הקטע EC כך ש־ $CE = 5\ CP$.

א. מצא את שיעורי הנקודה C .

ב. הבע את השיעורים של הנקודה E באמצעות השיעורים של הנקודה P ,

ומצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P הנוצרות באופן זה.



2. נתון טרפז שווה־שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel DC)$.

נתון כי $\angle DAB = 120^\circ$.

נסמן: $\vec{DC} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = t\,\underline{u}$.

א. (1) הבע את t באמצעות $|\underline{u}|$ ו־ $|\underline{v}|$.

(2) הבע את הוקטור $\vec{BC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $|\underline{u}|$ ו־ $|\underline{v}|$.

נתון: $\underline{u} = (8, 6, -10)$, $\underline{v} = (-1, y, 0)$

ב. (1) מצא את שיעור y של הוקטור $\underline{v}$ (מצא את שתי האפשרויות).

(2) מבין שני הערכים של y שמצאת בתת־סעיף ב (1) , מצא עבור איזה ערך של y

הבסיס DC הוא קוטר במעגל שהטרפז חסום בו.

<u>הערה:</u> אפשר לפתור את סעיף ב׳ בלי להסתמך על הפתרון של סעיף א.

3. א. בסדרה <u>הנדסית</u> $a_1\ , a_2\ , a_3 \ldots$ נתון: $a_7 = 64 + 64i$, $a_4 = -8 + 8i$.

מצא את a_1 .

המספר הראשוני $333,667,001$ **ניתן להצגה:** $333,667,001 = 333^3 + 667^3 + 001^3$

תשובות

1. א. $C(8, 5)$ **ב.** $E(5x - 32\ ,\ 5y - 20)$, $y = -\frac{3}{4}x + 16$

2. א. (1) $t = \frac{|\underline{u}| - |\underline{v}|}{|\underline{u}|}$ **(2)** $\vec{BC} = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}\underline{u} + \underline{v}$ **ב. (1)** $y_1 = \frac{1}{7}\ ,\ y_2 = -7$ **(2)** $y = -7$

חלק שני - גידול ודעיכה , פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. **א.** **(1)** בעיירה מסוימת נמצא כי אצל כל הגברים בעיירה שֵׂער הראש נושר בדעיכה מעריכית מגיל עשרים ואחת ומעלה. כל שנה הגברים מאבדים 0.1% משֵׂער ראשם.

מצא כעבור כמה שנים מגיל עשרים ואחת יאבדו הגברים 0.2997% משֵׂער ראשם.

(2) נמצא כי אצל כל הילדות בעיירה מספר השערות גדל מאז הלידה בצורה מעריכית.

ביום מסוים היו לילדה מהעיירה $100,000$ שערות.

כעבור m שנים נוספו לה $15,000$ שערות.

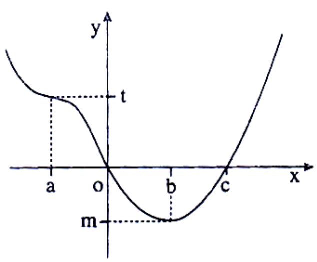
הבע באמצעות m בכמה אחוזים גדל כל שנה מספר השערות של הילדה.

ב. נתונה פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x) = \frac{1}{(2x-1)^2} + e$.

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון ב־ $(0,3)$. מצא את $f(x)$.

(אין קשר בין הסעיפים.)

5. נתון הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



כמו־כן נתון: $f(a) = d$, $f(o) = s$, $f(b) = p$, $f(c) = k$

א. הבע באמצעות פרמטרים מתאימים:

(1) את השיעורים של נקודות הקיצון של $f(x)$,

וקבע את סוגן. נמק.

(2) את השיעורים של נקודת הפיתול של $f(x)$. נמק.

ב. נסמן: x_1 - שיעור x של נקודת הפיתול של $f(x)$.

x_2 - שיעור x של נקודת המינימום של $f(x)$.

הבע באמצעות פרמטרים מתאימים את ערך האינטגרל $\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\cdot e^{-f(x)}dx$

בהצלחה

מבחן $= 100$
הגימטריה של 'מבחן' היא בדיוק מאה: $40+2+8+50=100$!

תשובות

3. **א.** $a_1 = -1 - i$

4. **א.** **(1)** $t = 3_{years}$ **(2)** $100\cdot 1.15^{\frac{1}{m}} - 100$ **ב.** $f(x) = -\frac{1}{4}\ln|2x-1| + \frac{e}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$

5. **א.** **(1)** $min: (c,k)$, $max: (0,s)$ **(2)** (b,p) **ב.** $e^{-p} - e^{-k}$

<u>פתרון מבחן 1</u>

1. א.

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 887 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 887 + 4 + 9$$

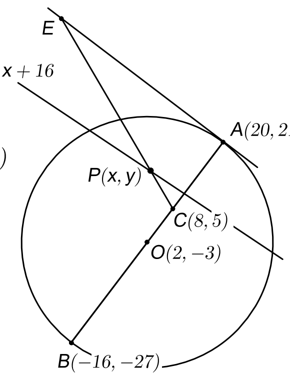
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 900 \quad \Rightarrow \quad O(2,-3)$$

$$\frac{x_B + x_A}{2} = x_O \quad \Rightarrow \quad \frac{x_B + 20}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_B = -16$$

$$\frac{y_B + y_A}{2} = y_O \quad \Rightarrow \quad \frac{y_B + 21}{2} = -3 \quad \Rightarrow \quad y_B = -27 \quad \Rightarrow \quad B(-16,-27)$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_C = \frac{20 + \frac{1}{2}\cdot(-16)}{1 + \frac{1}{2}} = 8$$

$$y_C = \frac{21 + \frac{1}{2}\cdot(-27)}{1 + \frac{1}{2}} = 5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C(8,5)}$$



ב.

$$P(x,y) \;,\; \frac{CE}{CP} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{EP}{PC} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_E + 4\cdot 8}{1+4} \quad \Rightarrow \quad x_E = 5x - 32$$

$$y = \frac{y_E + 4\cdot 5}{1+4} \quad \Rightarrow \quad y_E = 5y - 20 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E(5x-32\ ,\ 5y-20)}$$

$$m_{AC} = \frac{21-5}{20-8} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \quad , \quad EA \perp AC \quad \Rightarrow \quad m_{EA} = -\frac{3}{4}$$

$$m_{EA} = \frac{5y-20-21}{5x-32-20} = \frac{5y-41}{5x-52} = -\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad 5y - 41 = -\frac{15}{4}x + 39$$

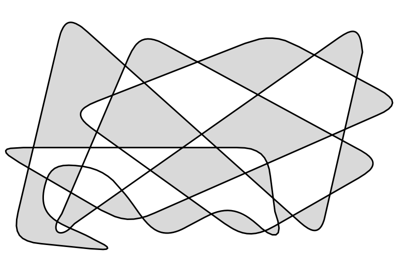
$$\Rightarrow \quad 5y = -\frac{15}{4}x + 80 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = -\frac{3}{4}x + 16}$$

הוכחה לא אלגנטית

בעיית ארבעת הצבעים: כל מפה המתארת גבולות של מדינות שונות ניתן לצבוע בארבעה צבעים בלבד, כך שכל שתי מדינות שלהן גבול משותף לאורך קטע (ולא נקודה), ייצבעו בצבעים שונים.

השערה זו היתה ידועה במשך כמאה שנים, אולם הוכחה רק בשנת 1976 על ידי שני מדענים מארה"ב. המדענים נעזרו במחשב שעבד במשך 1200 שעות רצופות, על מנת לעבור על כל המקרים האפשריים.

זו דוגמה 'קלאסית' להוכחה 'לא אלגנטית'.



אגב:

אם נצייר קו <u>רציף</u> שחותך את עצמו ככל שרק נרצה,

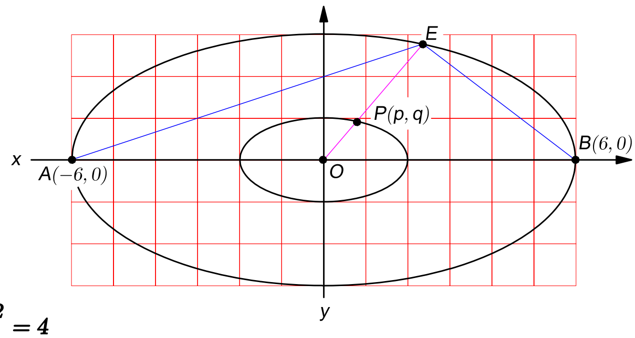
וכל תחום סגור ייצג מדינה,

אזי ניתן להסתפק בשני צבעים בלבד.

ראה ציור.

פתרון מבחן 4

1. א. חיתוך האליפסה $x^2+4y^2=36$ עם ציר x הוא בנקודות: $(\pm6,0) \Leftarrow x^2=36 \Leftarrow y=0$.



$(1)\quad \frac{EP}{PO}=2 \quad\Rightarrow\quad E(3p,3q)$

$E \in \{x^2+4y^2=36\}$

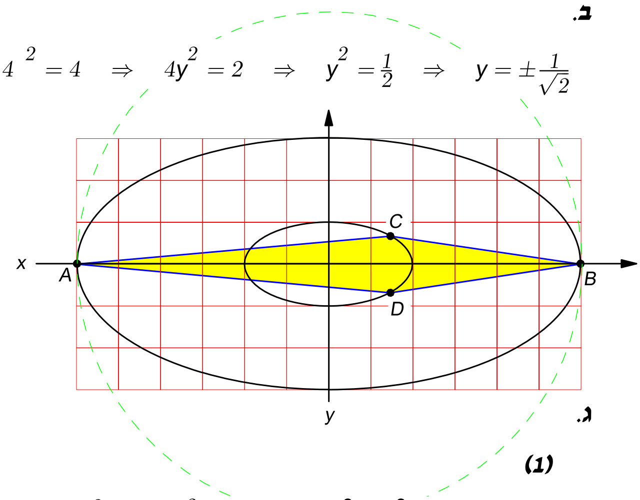
$\Rightarrow\quad (3p)^2+4(3q)^2=36$

$9p^2+4\cdot 9q^2=36$

$p^2+4q^2=4 \quad\to\quad \mathbf{x^2+4y^2=4}$

ב.

$(\sqrt{2},y)\in\{x^2+4y^2=4\} \quad\Rightarrow\quad 2+4\ ^2=4 \quad\Rightarrow\quad 4y^2=2 \quad\Rightarrow\quad y^2=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$



$(2)\quad S=\frac{AB\cdot CD}{2}$

$AB=12\ ,\ \ CD=\frac{1}{\sqrt{2}}-(-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{2}{\sqrt{2}}$

$S=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{12}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{12\sqrt{2}}{2}$

$\mathbf{S=6\sqrt{2}}$ **(יחידות ריבועיות)**

ג.

(1)

משוואת המעגל: $\mathbf{x^2+y^2=36} \ \leftarrow\ \underbrace{x^2+(2yk)^2=36}_{\text{הקבוע הוא } k=0.5} \ \leftarrow\ x^2+(2y)^2=36 \ \leftarrow\ \underbrace{x^2+4y^2=36}_{\text{משוואת האליפסה הנתונה}}$

(2) רדיוס המעגל הוא 6 י"א.

קצות הצירים של האליפסה שהתקבלה (המקום הגאומטרי) הן ב־ $x=\pm2$ ו־ $y=\pm1$.

לכן **__אין__** נקודות חיתוך ביניהם.

(ניתן גם לנסות לפתור את מערכת המשוואות ולהראות שאין פתרון.)

---

(1) נקודת מפגש תיכונים מחלקת אותם ביחס של $2:1$ כשהחלק הגדול קרוב לקדקוד

(2) המרובע שהתקבל הוא דלתון: $x_C=x_D$ לכן CD מאונך לציר x .

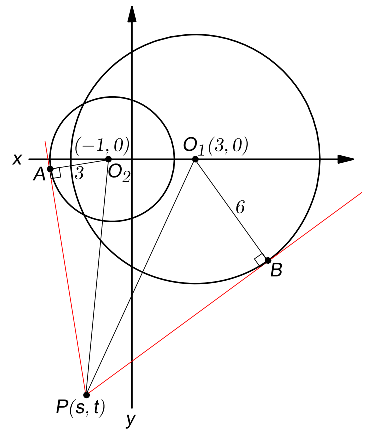
C ו־ D במרחקים שווים מציר x $(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה ואחד מהם נחצה - הוא דלתון.

שטח דלתון שווה למחצית מכפלת אלכסוניו.

החזקה ה־ 3 של 20 שווה לסכום החזקות ה־ 3 של 4 מספרים עוקבים: $8000=20^3=11^3+12^3+13^3+14^3$

2. א.



$$(I)\;\; x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x^2 - 6x + 9 + y^2 - 9 - 27 = 0$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 36 \;\;\Rightarrow\;\; O_1(3,0) \;\;,\;\; R_1 = 6$$

$$(II)\;\; x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; {}^2 + 2x + 1 + y^2 - 1 - 8 = 0$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 9 \;\;\Rightarrow\;\; O_2(-1,0) \;\;,\;\; R_2 = 3$$

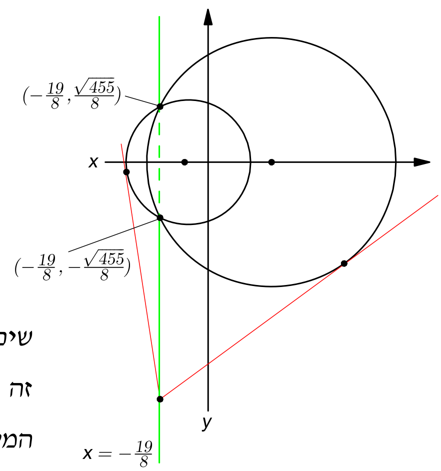
נתון: $PA = PB$. נפעיל את משפט פיתגורס:

$$PA = \sqrt{PO_2^2 - AO_2^2} \;\;,\;\; PB = \sqrt{PO_1^2 - BO_1^2}$$

$$\sqrt{(s+1)^2 + (t-0)^2 - 3^2} = \sqrt{(s-3)^2 + (t-0)^2 - 6^2} \;\;/(\;\;)^2$$

$$(s+1)^2 + \cancel{t^2} - 9 = (s-3)^2 + \cancel{t^2} - 36 \;\;\Rightarrow\;\; \cancel{s^2} + 2s + 1 - 9 = \cancel{s^2} - 6s + 9 - 36$$

$$8s = -19 \;\;\Rightarrow\;\; s = -\frac{19}{8}$$



בדיקת נכונות הפתרון (נדרש במשוואה לא־רציונלית):

$$\sqrt{(-\frac{19}{8}+1)^2 + t^2 - 9} \overset{?}{=} \sqrt{(-\frac{19}{8}-3)^2 + t^2 - 36}$$

$$\sqrt{t^2 - \frac{455}{64}} = \sqrt{t^2 - \frac{455}{64}} \;\;(\surd) \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{x = -\frac{19}{8}}$$

שים לב: הישר $x = -\frac{19}{8}$ אינו המקום הגאומטרי המתואר.

זה הישר שעליו מונח המקום הגאומטרי המתואר.

המקום הגאומטרי הוא רק חלק מהישר, כפי שנראה בהמשך.

ישר זה מכיל את המיתר המשותף לשני המעגלים:

$$(I)-(II) \;\;\Rightarrow\;\; ({}^2 + y^2 - 6x - 27 = 0) - ({}^2 + y^2 + 2x - 8 = 0) \;\;\Rightarrow\;\; -8x - 19 = 0 \;\equiv\; x = -\frac{19}{8}$$

ב.

$$\sqrt{t^2 - \frac{455}{64}} \;\;\Rightarrow\;\; t^2 - \frac{455}{64} \geq 0 \;\;,\;\; t_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{455}}{8} \;\;\Rightarrow\;\; \smile \;\;\Rightarrow\;\; (t \leq -\frac{\sqrt{455}}{8}) \cup (t \geq \frac{\sqrt{455}}{8})$$

הנקודות $(-\frac{19}{8}, \pm\frac{\sqrt{455}}{8})$ הן נקודות החיתוך של שני המעגלים:

נקודות אלו מקיימות את דרישות המקום הגאומטרי (אורך כל משיק במקרה זה $= 0$).

הקטע $[-\frac{\sqrt{455}}{8}, \frac{\sqrt{455}}{8}]$ הוא הקטע הנדרש בסעיף ב, והוא נמצא בתוך שני המעגלים.

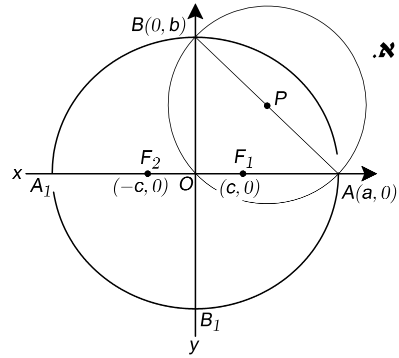
מהנקודות בקטע זה לא ניתן להעביר משיק למעגלים, פרט אולי לנקודות הקצה עצמן

(אם נתיר אורך אפס). אורך קטע זה הוא:

$$d = \frac{\sqrt{455}}{8} - (-\frac{\sqrt{455}}{8}) = \frac{2\sqrt{455}}{8} \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{d = \frac{\sqrt{455}}{4} = 5.33} \;\; \textbf{(יחידות אורך)}$$

פתרון מבחן 13

1. א.



$(1)\ \ AF_1 = F_1F_2 \quad \Rightarrow \quad a-c = c-(-c) \quad \Rightarrow \quad a = 3c$

$\angle BOA = 90^\circ \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} AB = 2R = \sqrt{17}$

$(3)\ \ (I)\ \ a^2 + b^2 = 17$

$(4)\ \ (II)\ \ b^2 + c^2 = a^2$

$(I)-(II) \quad \Rightarrow \quad a^2 - c^2 = 17 - a^2 \quad \Rightarrow \quad 2a^2 - c^2 = 17$

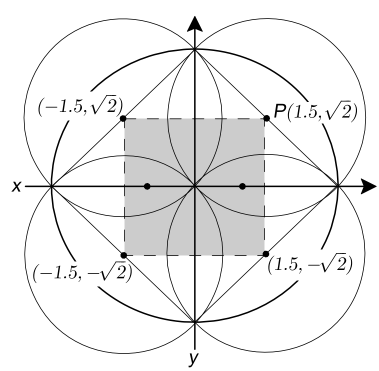
$(5)\ \ 2\cdot(3c)^2 - c^2 = 17 \quad \Rightarrow \quad 17c^2 = 17 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 1$

$2a^2 - c^2 = 17 \quad \Rightarrow \quad 2a^2 - 1 = 17 \quad \Rightarrow \quad 2a^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 9$

$(I)\ \ a^2 + b^2 = 17 \quad \Rightarrow \quad 9 + b^2 = 17 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1}$

ב.

$A(3,0)\ ,\ B(0,\sqrt{8}) \quad \Rightarrow \quad P(\frac{3+0}{2}, \frac{0+\sqrt{8}}{2}) \quad \Rightarrow \quad P(1.5,\sqrt{2})$ (הראשון) מרכז המעגל שבסעיף א



שאר קדקודי המרובע נתונים בציור
ושיעוריהם נובעים מטעמי סימטריה.
המרובע הוא מלבן (צלעותיו מקבילות לצירים).
שטח המלבן (בסיס הפירמידה) הוא:

$(\sqrt{2}-(-\sqrt{2}))\cdot(1.5-(-1.5)) = 2\sqrt{2}\cdot 3 = 6\sqrt{2}$

גובה הפירמידה הוא מרחק קדקודה מהמישור $[xy]$.
מרחק נקודה ממישור $[xy]$ הוא הערך המוחלט של
שיעור z שלה. לכן:

$S(0,3,4) \quad \Rightarrow \quad h = z_S = 4$

$\Rightarrow \quad V = \frac{6\sqrt{2}\cdot 4}{3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V = 8\sqrt{2}}$ **(יחידות קוב)**

---

(1) נתון (2) זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר (3) פיתגורס ב־ $\triangle BOA$

(4) תכונה באליפסה (5) הצבה: $a = 3c$ (שורה ראשונה בפתרון)

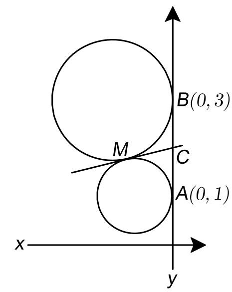
דרך כל שלוש נקודות נקודות ניתן להעביר קו ישר – אם הוא מספיק עבה . . .

2. א. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה. לכן:

$CB = CM \ , \ CA = CM$

$AB = AC + CB = MC + MC = 2\ MC \quad \Rightarrow \quad \mathbf{MC = \frac{1}{2}\ AB}\ (\checkmark)$

ב. (1)



$CB = CM \ , \ CA = CM \quad \Rightarrow \quad AC = CB \quad \Rightarrow \quad C(0,2)$

$M(x,y) \quad , \quad MC = \frac{1}{2}\ AB \quad , \quad AB = 2$

סימון

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x^2 + (y-2)^2 = 1}$$

(2)

הצורה היא **קשת מעגל** שמרכזו $C(0,2)$ ומחוגו הוא יחידת אורך אחת.

מעגל שמשיק לציר y נמצא כולו בצידו האחד של ציר y

(אחרת - הוא חותך את ציר y).

נתון כי מרכזי שני המעגלים ברביע השני (משמאל לציר y).

לכן כל נקודות ההשקה M משמאל לציר y.

מכיון שרדיוס המעגל של המקום הגאומטרי הוא 1 י"א,

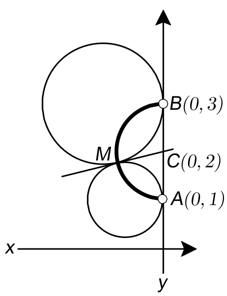
ומרכזו $C(0,2)$ - הוא אינו יכול 'לגלוש' לרביע הרביעי.

ולכן מיקומו הוא **ברביע השני בלבד**.

המקום הגאומטרי הינו חצי מעגל כמתואר בציור בקו מעובה.

חצי המעגל אינו כולל את הנקודות A ו־ B ,

כי אז אחד המעגלים היה מעגל 'מנוון' (נקודה).

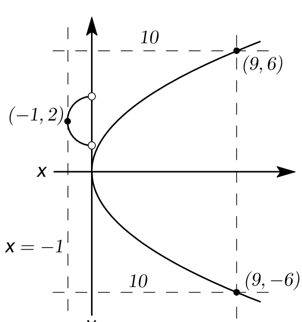


ג.

פרבולה: $y^2 = 2px$, מדריך: $x = -\frac{p}{2}$,

מרחק נקודה על הפרבולה מהמוקד שווה למרחקה

מהמדריך: $d = x + \frac{p}{2}$.



$$\underset{\text{רביע שני}}{R = 1 \ , \ (II)} \quad \Rightarrow \quad \underset{\text{המדריך}}{x = -1} \quad \Rightarrow \quad -\frac{p}{2} = -1$$

$$\Rightarrow \quad p = 2 \quad \Rightarrow \quad \underset{\text{משוואת הפרבולה}}{y^2 = 4x}$$

$$d = x + \frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad 10 = x + \frac{2}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 9 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4 \cdot 9 = 36 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(9, \pm 6)}$$

אם תכניס את הספרה '9' פעם אחת, לכל מקום שתבחר במספר הראשוני $593, 103, 437$ **– תקבל מספר ראשוני**

מבחן 44 - קיץ תשפ"א - 2021 - מועד ב

בחירה: שלוש שאלות משאלות 1-5.

פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. לפניך משוואת הפרבולה $y^2 = 2ax$ ומשוואת המעגל $x^2 + y^2 - 2ax - 2x = 0$.
a הוא פרמטר גדול מ־ 0.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל. הבע באמצעות a, במידת הצורך.

דרך שתיים מנקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל עובר ישר ששיפועו חיובי.

ב. מצא את משוואת הישר. הבע באמצעות a, במידת הצורך.

ממרכז המעגל מעבירים אנך לישר. אורך האנך הוא $2\sqrt{5}$.

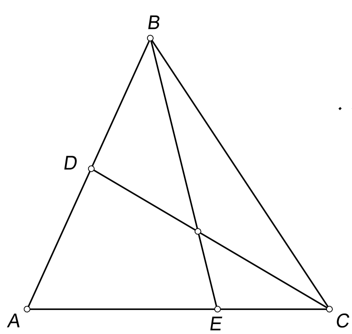
ג. **(1)** הבא באמצעות a את מרכז המעגל ואת הרדיוס שלו.

(2) מצא את ערכו של הפרמטר a.

מגדירים מעגל חדש שמרכזו זהה למרכז המעגל הנתון והרדיוס שלו קטן ב־2 מרדיוס המעגל הנתון.

ד. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל החדש,
שווה למרחק שלהן מן הישר $x = -4$.

2. הנקודה D היא אמצע הצלע AB במשולש ABC.
הנקודה E מחלקת את הצלע AC ביחס של $AE : EC = 2 : 1$.
הנקודה F היא מפגש הקטעים BE ו־ CD.
$\vec{CA} = \underline{u}$, $\vec{CB} = \underline{v}$.
t ו־ k הם מספרים, כך ש: $\vec{BF} = t \cdot \vec{BE}$, $\vec{CF} = k \cdot \vec{CD}$.



א. מצא את ערכי t ו־ k.

המשולש ABC נמצאת במישור $4x + 2y + z - 12 = 0$.
מישור זה חותך את ציר x בנקודה A, את ציר y בנקודה C ואת ציר z בנקודה B.
הנקודה O היא ראשית הצירים.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו־ F.

ג. מצא את משוואת המישור AOE.

ד. מצא את נפח הפירמידה $FAOE$.

תשובות

1. **א.** $(0,0)$, $(2, \pm 2\sqrt{a})$ **ב.** $y = \sqrt{a}x$ **ג.** **(1)** $O\,(a+1, 0)$, $R = a+1$ **(2)** $a = 4$ **ד.** $y^2 = 18x$

2. **א.** $t = \frac{3}{4}$, $k = \frac{1}{2}$ **ב.** $E(1,4,0)$, $F(\frac{3}{4},3,3)$ **ג.** $z = 0$ **ד.** $V = 6$ (יחידות קוב)

3. **א.** פתור את המשוואה $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ (I). z הוא מספר מרוכב.

פתרונות המשוואה מיוצגים על־ידי כל הקדקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. מצא את שטח המצולע.

נתונה המשוואה $(a\cdot z^2 + b)(z+1) = 0$ (II) . z הוא מספר מרוכב. a ו־ b ממשיים שונים מ־ 0 .

שניים מפתרונות משוואה II הם מספרים מדומים.

ג. הוכח כי $a\cdot b > 0$.

ד. מצא את פתרונות משוואה II . הבע באמצעות a ו־ b במידת הצורך.

הפתרונות המדומים של משוואה II מיוצגים על־ידי נקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית הצירים והרדיוס שלו גדול פי שניים מן הערך המוחלט של פתרונות משוואה I .

ה. מצא את היחס $\frac{b}{a}$.

<u>פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות</u>

4. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx^2-2bx} - 1$ המוגדרת לכל x . $b < 0$ הוא פרמטר.

הבע תשובותיך באמצעות b, במידת הצורך.

א. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר x (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

נגדיר את הפונקציה $g(x) = f(x+a)$, a הוא פרמטר. ל־$g(x)$ יש נקודת קיצון על ציר y.

ב. **(1)** מצא את ערך a ובטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות x ו־ b .

(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מצא את שיעור x של כל אחת מנקודות הקיצון של פונקצית הנגזרת $g'(x)$, וקבע את סוגן.

ד. הצב $b = -0.5$, וחשב את השטח המוגבל על־ידי גרף פונקצית הנגזרת $g'(x)$,

על־ידי ציר x ועל־ידי הישרים העוברים דרך נקודות הקיצון של $g'(x)$ ומאונכים לציר x .

תשובות

3. **א.** $z_1 = \sqrt{2}\ cis\ 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\ ,\ z_2 = \sqrt{2}\ cis\ 210^\circ = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$z_3 = \sqrt{2}\ cis\ 150^\circ = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\ ,\ z_4 = \sqrt{2}\ cis\ 330^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

ב. $S = 2\sqrt{3}$ (יחידות ריבועיות) **ד.** $z_1 = -1\ ,\ z_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}\, i$ **ה.** $\frac{b}{a} = 8$

4. **א.** **(1)** $(0,0)\ ,\ (2,0)$ **(2)** $y = -1$ **(3)** $max\ (1, \frac{1}{e^b} - 1)$ **ב.** **(1)** $a = 1\ ,\ g(x) = e^{bx^2-b} - 1$

(2) זוגית **ג.** $x_{min} = \sqrt{-\frac{1}{2b}}\ ,\ x_{max} = -\sqrt{-\frac{1}{2b}}$ **ד.** $S = 2\sqrt{e} - 2$ (יחידות ריבועיות)

5. נתונה הפונקציה $f(x) = a\cdot x^2 - x^3$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר.

ענה על סעיפים א-ג עבור $a > 0$. הבע תשובותיך באמצעות a, במידת הצורך.

א. **(1)** מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

נתונה הפונקציה $g(x) = \ln f(x)$.

ב. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

ג. נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר x .

(1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את טווח הערכים האפשריים של a

שעבורם גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר x בנקודה אחת בלבד.

ד. עבור $a = 0$: סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ציין בגרף את הערכים המספריים של שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x .

בהצלחה

מגדלי האנוי

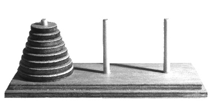
החידה אודות מגדלי האנוי היא אולי החידה המפורסמת ביותר במתמטיקה.

*חיבר אותה מתמטיקאי צרפתי בשם **אדוארד לוקה** (Edouadrd Lucas , 1842-1891).*

מציע לחפש אותה ברשת. במקור החידה על 64 טבעות. מספר הצעדים על מנת לפתור את החידה הוא $2^{64} - 1$. מספר זה הוא המספר: 18,446,744,073,709,551,615 .

בשניות זה למעלה מ־580 מיליארד שנים . . .

אם נניח מטבעות של 5 שקלים זה על גב זה - גובהם יהיה כארבע שנות אור, הרחק הרחק ממערכת השמש שלנו . . .



תשובות

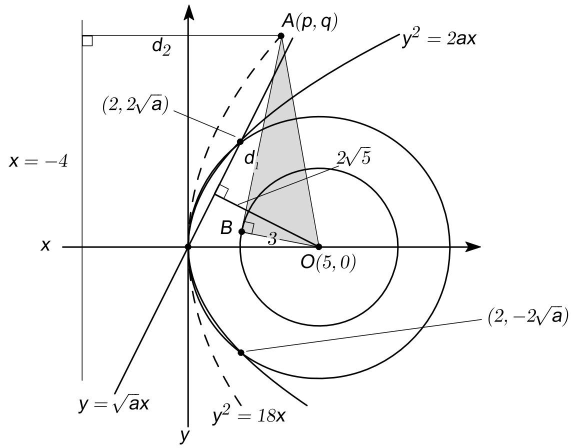
5. **א.** **(1)** $x > a$:$\underline{-}$, $(x < 0) \cup (0 < x < a)$:$\underline{+}$

ב. **(1)** $(x < 0) \cup (0 < x < a)$ **(2)** $x = 0 \ , \ x_{\to} = a$ **(3)** $\max\left(\frac{2a}{3}, \ln\frac{4a^3}{27}\right)$

ג. **(2)** $0 < a < \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = 1.89$

פתרון מבחן 44

1. א.



$y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 - 2ax - 2x = 0$

$x^2 + 2ax - 2ax - 2x = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow \quad x(x-2) = 0$

$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0$

$\Rightarrow \quad \mathbf{(0,0)}$

$x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4a$

$\Rightarrow \quad y = \pm 2\sqrt{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(2, \pm 2\sqrt{a})}$

ב.

$m > 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)\ ,\ (2, 2\sqrt{a}) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2\sqrt{a}}{2} = \sqrt{a}\ ,\ (0,0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = \sqrt{a}x}$

ג. (1)

$x^2 + y^2 - 2ax - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2 - 2x(a+1) + (a+1)^2}_{\text{השלמה לריבוע}} + y^2 = (a+1)^2$

$\Rightarrow \quad (x - (a+1))^2 + y^2 = (a+1)^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{O\ (a+1, 0)\ ,\ R = a+1}$

(2)

$y = \sqrt{a}x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a}x - y = 0$

$d(O \longleftrightarrow \{\sqrt{a}x - y = 0\}) = \frac{|(a+1)\sqrt{a} + 0\cdot(-1)|}{\sqrt{a+1}} = \frac{(a+1)\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}$

$= \sqrt{a+1}\sqrt{a} = \sqrt{a(a+1)} = \underbrace{2\sqrt{5}}_{\text{נתון}} \quad /(\ )^2$

$a(a+1) = 20 \quad \Rightarrow \quad a^2 + a - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{2}\ ,\ a > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a = 4}$

(משוואה אי־רציונלית. נדרשת בדיקה על־ידי הצבה לאימות הפתרון. הַשְׁלֵם . . .)

ד.

$a = 4 \quad \Rightarrow \quad O(5,0)\ ,\ R_{new} = (a+1) - 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad (x-5)^2 + y^2 = 9$

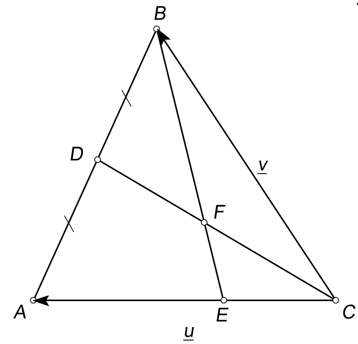
$\underline{\triangle ABO:}$ $A(p,q)$, $AB = d_1 \quad \Rightarrow \quad d_1^2 + 3^2 = (p-5)^2 + q^2 \quad \Rightarrow \quad d_1^2 = (p-5)^2 + q^2 - 9$

$d_2 = d\ ((p,q) \longleftrightarrow \{x = -4\}) = p + 4 \quad \Rightarrow \quad d_2^2 = (p+4)^2$

$d_1^2 = d_2^2 \quad \Rightarrow \quad (p-5)^2 + q^2 - 9 = (p+4)^2$

$p^2 - 10p + 25 + q^2 - 9 = p^2 + 8p + 16 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 18p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y^2 = 18x}$

2. א.



$AE : EC = 2 : 1\ ,\ \vec{CF} = k\cdot\vec{CD}\ ,\ \vec{BF} = t\cdot\vec{BE}$

$\vec{CD} = \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \underline{u} + \frac{1}{2}(-\underline{u} + \underline{v}) = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$

$\Rightarrow \quad \underline{\vec{CF} = k\cdot(\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}) = \frac{k}{2}\underline{u} + \frac{k}{2}\underline{v}}$

$\vec{BE} = \vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{CA} = -\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{u}$

$\Rightarrow \quad \vec{BF} = t\cdot(-\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{u}) = \frac{t}{3}\underline{u} - t\underline{v}$

$\underline{\vec{CF}} = \vec{CB} + \vec{BF} = \underline{\underline{v} + \frac{t}{3}\underline{u} - t\underline{v}}$

$\underbrace{\frac{k}{2}\underline{u} + \frac{k}{2}\underline{v} = \underline{v} + \frac{t}{3}\underline{u} - t\underline{v}}_{\text{יחידות ההצגה}} \quad \Rightarrow \quad (I)\ \ \frac{k}{2} = \frac{t}{3} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3k}{2}$

$(II)\ \ \frac{k}{2} = 1 - t = 1 - \frac{3k}{2} \quad \Rightarrow \quad 2k = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k = \frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t = \frac{3}{4}}$

ב.

$4x + 2y + z - 12 = 0$

$\underline{A:}\ \ y = z = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad A(3,0,0)$

$\underline{B:}\ \ x = y = 0 \quad \Rightarrow \quad z - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 12 \quad \Rightarrow \quad B(0,0,12)$

$\underline{C:}\ \ x = z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 6 \quad \Rightarrow \quad C(0,6,0)$

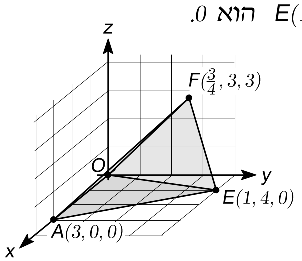
$\Rightarrow \quad \underline{u} = \vec{CA} = A - C = (3,-6,0)\ \ ,\ \ \underline{v} = \vec{CB} = B - C = (0,-6,12)$

$\vec{CF} = \frac{k}{2}\underline{u} + \frac{k}{2}\underline{v} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} = \frac{1}{4}(3,-6,0) + \frac{1}{4}(0,-6,12) = (\frac{3}{4},-3,3)$

$(\frac{3}{4},-3,3) = F - C = F - (0,6,0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F(\frac{3}{4},3,3)}$

$\vec{CE} = \frac{1}{3}\underline{u} = \frac{1}{3}(3,-6,0) = (1,-2,0) = E - C = E - (0,6,0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E(1,4,0)}$

ג. שיעור z של שלושת הנקודות $O(0,0,0)$, $A(3,0,0)$ ו־ $E(1,4,0)$ הוא 0.
לכן שלושתן במישור $[xy]$ ולכן משוואת המישור היא $\mathbf{z = 0}$.



ד. נתייחס אל $\triangle AOE$ כאל בסיס הפירמידה.
המשולש מוכל במישור $[xy]$.
לכן גובה הפירמידה הוא שיעור z של F : $h = z_F = 3$.

$AO = x_A = 3\ ,\ h_{\triangle} = y_E = 4 \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{6\cdot 3}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V = 6}$ **(יחידות קוב)**

3. א.

$(I)\ \ z^4 - 2z^2 + 4 = 0 \quad\Rightarrow\quad (z^2)_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{-12}}{2} = \frac{2\pm 2\sqrt{-3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$

$R = \sqrt{1+3} = 2 \ \ ,\ \ tg\,\theta = \frac{\pm\sqrt{3}}{1} = \pm\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \theta_1 = 60^\circ + 180^\circ k\ ,\ \theta_2 = -60^\circ + 180^\circ k$

$(+,\pm) \quad\Rightarrow\quad I\ ,\ IV\ quarter \quad\Rightarrow\quad \theta_1 = 60^\circ\ ,\ \theta_2 = -60^\circ$

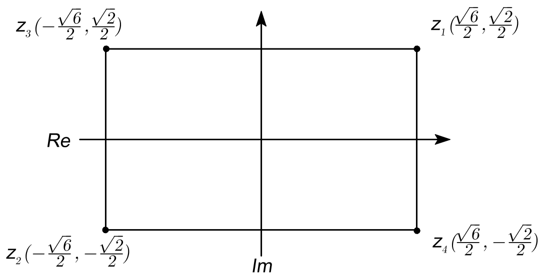
$(1)\ \ z^2 = 2\ cis\ 60^\circ \quad\Rightarrow\quad z_k = \sqrt{2}\ cis\ \frac{60^\circ+360^\circ k}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{z_1 = \sqrt{2}\ cis\ 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ i}$

$\mathbf{z_2 = \sqrt{2}\ cis\ 210^\circ = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ i}$

$(2)\ \ z^2 = 2\ cis\ 300^\circ \quad\Rightarrow\quad z_k = \sqrt{2}\ cis\ \frac{300^\circ+360^\circ k}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{z_3 = \sqrt{2}\ cis\ 150^\circ = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ i}$

$\mathbf{z_4 = \sqrt{2}\ cis\ 330^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ i}$

ב.



$z_3z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - (-\frac{\sqrt{6}}{2}) = \sqrt{6}$

$z_1z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad S = \sqrt{6}\cdot\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S = 2\sqrt{3}}$ **(יח"ר)**

ג. משוואה זו, $(II)\ \ (az^2 + b)(z+1) = 0$, היא ממעלה שלישית ולכן יש לה שלושה פתרונות.

אחד מהם הוא $z = -1$.

לכן שני הפתרונות המדומים האחרים הם המאפסים של הגורם $az^2 + b$.

פתרון מדומה הוא מהצורה ki. נציב:

$a(ki)^2 + b = -ak^2 + b = 0 \quad\Rightarrow\quad ak^2 = b$

$k^2 > 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{b}{a} > 0\ \ /\cdot a^2 \quad \mathbf{a\cdot b > 0}\ \ (\checkmark)$

ד.

$\mathbf{z_1 = -1}\ \ ,\ \ az^2 + b = 0 \quad\Rightarrow\quad z^2 = -\frac{b}{a} \quad\Rightarrow\quad z = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{z_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}\ i}$

ה.

$|\ \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ i\ | = \sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad R = 2\sqrt{2}$

$R = |\ \pm\sqrt{\frac{b}{a}}\ i\ | = \sqrt{0+\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}} = 2\sqrt{2}\ \ /(\ \ )^2 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{\frac{b}{a} = 8}$

4. **א.** **(1)**

$$f(x)=e^{bx^2-2bx}-1\ ,\quad y=0\quad\Rightarrow\quad e^{bx^2-2bx}=1\quad\Rightarrow\quad bx^2-2bx=0\quad\Rightarrow\quad bx(x-2)=0$$

$$\Rightarrow\quad x_1=0\ ,\ x_2=2\quad\Rightarrow\quad \mathbf{(0,0)\ ,\ (2,0)}$$

(2)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{bx^2(1-\frac{2}{x})}-1\right)=\to\left(\underset{b<0}{\underset{\uparrow}{e^{-\infty(1-0)}}}-1\right)=e^{-\infty}-1=0-1=-1\quad\Rightarrow\quad \mathbf{y=-1}$$

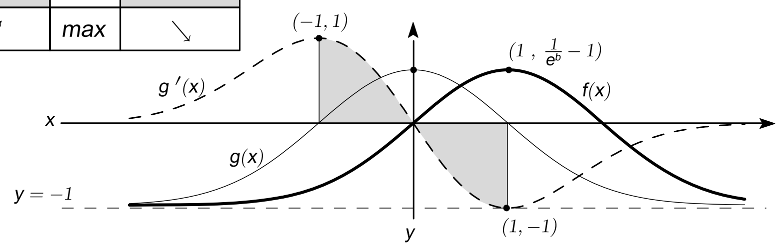
(3)

$$f'(x)=\boxed{e^{bx^2-2bx}\cdot(2bx-2b)}\overset{?}{=}0\quad\Rightarrow\quad 2bx-2b=0\quad\Rightarrow\quad x=1$$

x		1	
f'	$++=+$	0	$+-=-$
f	↗	max	↘

$$f(1)=e^{b-2b}-1=e^{-b}-1\quad\Rightarrow\quad \mathbf{max}\ \left(1\ ,\ \frac{1}{e^b}-1\right)$$

(4)



ב. **(1)** $f(x+a)$ היא העתקה אופקית של $f(x)$ ב־ a שְׁנָתוֹת: שמאלה - $a>0$, ימינה - $a<0$.

מכיון שנקודת הקיצון הועתקה שמאלה בשְׁנָת אחת - הרי ש־ $\mathbf{a=1}$.

$$g(x)=f(x+1)=e^{b(x+1)^2-2b(x+1)}-1=e^{bx^2+2bx+b-2bx-2b}-1\quad\Rightarrow\quad \mathbf{g(x)=e^{bx^2-b}-1}$$

(2)

$$g(-x)=e^{b(-x)^2-b}-1=e^{bx^2-b}-1=g(x)\quad\Rightarrow\quad \textbf{זוגית}$$

(3) לעיל

ג.

$$g'(x)=2bxe^{bx^2-b}\quad\Rightarrow\quad g''(x)=2be^{bx^2-b}+2bxe^{bx^2-b}\cdot 2bx=\boxed{2be^{bx^2-b}(1+2bx^2)}\overset{?}{=}0$$

$$1+2bx^2=0\quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2b}}$$

x		$-\sqrt{-\frac{1}{2b}}$		$\sqrt{-\frac{1}{2b}}$	
g''	$--=+$	0	$-+=-$	0	$--=+$
g'	↗	max	↘	min	↗

$$\mathbf{x_{max}=-\sqrt{-\frac{1}{2b}}\ ,\ \ x_{min}=\sqrt{-\frac{1}{2b}}}$$

ד.

$$b=-\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad g(x)=e^{-0.5x^2+0.5}-1\quad\Rightarrow\quad g'(x)=-xe^{-0.5x^2+0.5}\ ,\ x_{max}=-1\ ,\ x_{min}=1$$

$$g'(-x)=xe^{-0.5(-x)^2+0.5}=-(-xe^{-0.5x^2+0.5})=-g'(x)\quad\Rightarrow\quad \text{אי־זוגית}$$

$$\Rightarrow\quad S=2\int_{-1}^{0}g'(x)\,dx=2\,g(x)\Big|_{-1}^{0}=2\,g(0)-2\,g(-1)=2\cdot(e^{0.5}-1)-2\cdot(e^{0}-1)$$

$$=2\sqrt{e}-2-2+2\quad\Rightarrow\quad \mathbf{S=2\sqrt{e}-2}\ \ \text{(יחידות ריבועיות)}$$

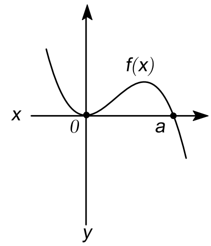
5. א. (1)

$$f(x) = a\cdot x^2 - x^3 = x^2(a-x) \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0\ ,\ x_2 = a$$

$$a - x > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < a$$

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{+:}\ \ \mathbf{(x<0)\cup(0<x<a)}\ \ ,\ \ \underline{-:}\ \ \mathbf{x>a}$$

(2)



ב. (1)

$$g(x) = \ln f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(x<0)\cup(0<x<a)}$$

(2)

$$\lim_{x\to 0\text{ or }a-} \ln f(x) = \ln(\to +0) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x=0\ ,\ x_{\to} = a}$$

(3)

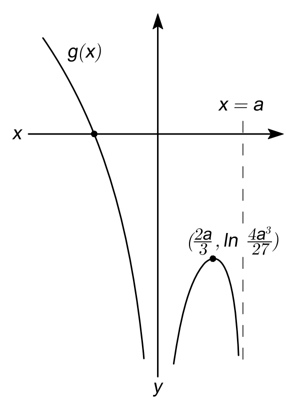
$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2ax-3x^2}{ax^2-x^3} = \boxed{\frac{2a-3x}{ax-x^2}} \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2a-3x=0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2a}{3}$$

x		0		$\frac{2a}{3}$		a
g'	$\frac{+}{-} = -$	$\emptyset$	$\frac{+}{+} = +$	0	$\frac{-}{+} = -$	$\emptyset$
g	↘	asym.	↗	max	↘	asym.

$$g\left(\tfrac{2a}{3}\right) = \ln f\left(\tfrac{2a}{3}\right) \overset{*}{=} \ln\frac{4a^3}{27} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{max\ \left(\tfrac{2a}{3}, \ln\tfrac{4a^3}{27}\right)}$$

$$(*)\quad f\left(\tfrac{2a}{3}\right) = \frac{4a^3}{9} - \frac{8a^3}{27} = \frac{4a^3}{27}$$

ג. (1)

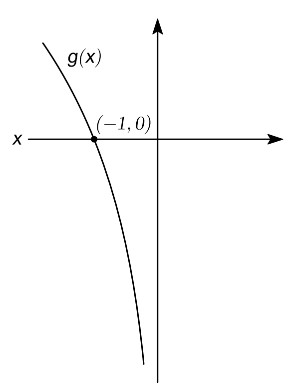


(2)

$$y_{max} < 0 \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{4a^3}{27} < 0 = \ln 1 \quad \underset{e\ >\ 1}{\Longleftrightarrow} \quad 0 < \frac{4a^3}{27} < 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 < a^3 < \frac{27}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0 < a < \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = 1.89}$$

ד.



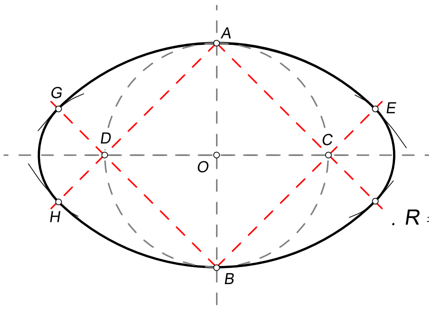
$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = \ln(-x^3) \quad \Rightarrow \quad x < 0$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(-x^3) = 0$$

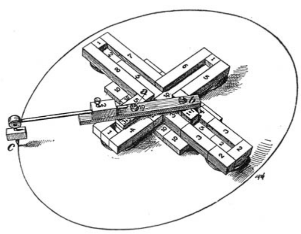
$$\Rightarrow \quad -x^3 = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(-1, 0)}$$

איך מציירים אליפסה

ישנן דרכים רבות לצייר אליפסה. הדרך הקלאסית ביותר והממחישה את הגדרתה (כמקום הגאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות, קבוע) היא קיבוע שתי יתדות, הקפתן בחוט המתוח ע"י עפרון וציור תוך כדי מתיחת אותו חוט מקיף.

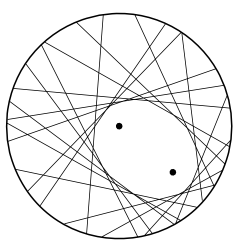


דרך נוספת מתבססת על הרעיון שמתואר בעמ' 167 לציור ביצה:
על מערכת צירים חגים מעגל שמרכזו O וקוטרו AB .
C ו־ D הן נקודות חיתוך המעגל עם ציר y .
מעבירים את הישרים שעליהן הקטעים: ED , AD , EC , AC .
חגים קשתות $\overset{\frown}{HF}$ ו־ $\overset{\frown}{GE}$ מ־A ומ־ B בהתאמה, כאשר $R = AB$.
H , G , F , E הן נקודות חיתוך של המשך הישרים
AD , ED , AC , EC עם הקשתות.
חגים קשתות $\overset{\frown}{EF}$ ו־ $\overset{\frown}{GH}$ מ־ C ומ־ D בהתאמה כאשר $r = GE$.

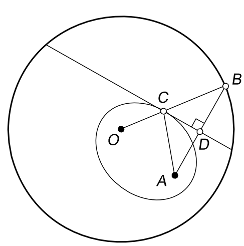


יש מכשיר, שכנראה אין לו שם בעברית, ואני מציע את השם: 'מחוגת צירים', או: 'מכונת צירים חסומה'. תנועת זרועות המחוגה לאורך שני הצירים בהם היא חסומה, מציירת אליפסה (ראה ציור).

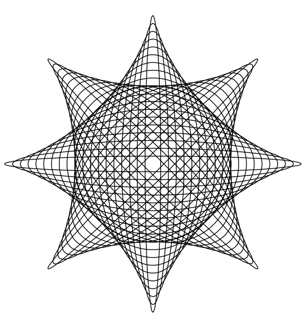
דרכים מעניינות נוספות מתוארות ברשת.
חפשו ביוטיוב: Drawing Ellipses .



נסמן על עיגול נקודה כלשהי שאינה מרכז המעגל. נקפל קשת מעגל כך שהיא תיגע באותה נקודה, אזי קו הקיפול משיק לאליפסה בתוך המעגל, שמוקדיה הם מרכז המעגל והנקודה שבחרנו, וסכום האורכים משני המוקדים הוא אורך מחוג המעגל. ככל שנוסיף עוד ועוד משיקים כאלה – נקבל את האליפסה המתוארת.



מדוע זה כך? ובכן: אם נקפל נייר באופן ששתי נקודות עליו 'תשבנה' זו על גבי חברתה, אזי קו הקיפול הוא אנך אמצעי של הקטע המחבר את שתי הנקודות. תכונה זו נובעת מהגדרת הסימטריות של שתי נקודות ביחס לישר. O מרכז המעגל, A הנקודה הנבחרת, B מקופלת על A, הישר שעליו מונח הקטע CD הוא אנך אמצעי (קו הקיפול) לקטע AB, ומכאן:
$CA = CB$, $OC + CB = R$ $\Rightarrow$ $OC + CA = R$ $(\surd)$.



הכוכב בתחתית העמוד, התקבל מסדרת אליפסות שהתחילה ממעגל מרכזי, שהוצר לאורך אחד מציריו והורחב לאורך צירו האחר, שוכפל עוד שלוש פעמים (ביחד ארבע צורות בסיס), וסובב כל פעם בזווית של 45°.

חידה: הוכח כי:
לא ניתן לחסום באליפסה מצולע משוכלל שיש לו יותר מארבע צלעות.
פתרון בצופן א"ת ב"ש:
כתכמוח פכיזר מב כלכ צמפאג תגשז טדפקפא יבפאוא. לכ יהפכז יבפלכבכ טמאט כסחמיצ שיזרכ. מה שהיה להוכיח . . .
פאול ארדש היה אומר על הוכחה זו, שהיא הוכחה 'מהספר' . . .

מספר מחזורי

מספר מחזורי הוא מספר טבעי שמכפלתו בכל אחד מהמספרים 1 עד מספר הספרות שלו, מורכבת מספרות המספר עצמו ובאותו סדר, בהסתכלות על ספרות המספר סדורות במעגל.

דוגמה: $142,857$

$$142,857 \times 1 = 142,857$$
$$142,857 \times 2 = 285,714$$
$$142,857 \times 3 = 428,571$$
$$142,857 \times 4 = 571,428$$
$$142,857 \times 5 = 714,285$$
$$142,857 \times 6 = 857,142$$
$$142,857 \times 7 = 999,999$$

שימו לב: $\frac{1}{7} = 0.142857\ 142857\ 142857\ .\ .\ .$.

עוד דוגמה: $0,588,235,294,117,647$.

$$0,588,235,294,117,647 \times 1 = 0,588,235,294,117,647$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 2 = 1,176,470,588,235,294$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 3 = 1,764,705,882,352,941$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 4 = 2,352,941,176,470,588$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 5 = 2,941,176,470,588,235$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 6 = 3,529,411,764,705,882$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 7 = 4,117,647,058,823,529$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 8 = 4,705,882,352,941,176$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 9 = 5,294,117,647,058,823$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 10 = 5,882,352,941,176,470$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 11 = 6,470,588,235,294,117$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 12 = 7,058,823,529,411,764$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 13 = 7,647,058,823,529,411$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 14 = 8,235,294,117,647,058$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 15 = 8,823,529,411,764,705$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 16 = 9,411,764,705,882,352$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 17 = 0,588,235,294,117,647$$
$$0,588,235,294,117,647 \times 17 = 9,999,999,999,999,999$$

שימו לב: $\frac{1}{17} = 0.0588235294117647\ 0588\ .\ .\ .$.

בוריס ג'ונסון, *ראש ממשלת בריטניה ממפלגת השמרנים, הטיח ביריביו הפוליטים ממפלגת הלייבור (העבודה):*
"חצי מכם אנטישמים". יושב הראש כעס מאוד וקרא לו לחזור בו מהאשמתו זו.
בוריס ג'ונסון ענה לו: *"בסדר. חצי מכם אינם אנטישמים . . ."*

ועוד דוגמה: $052,631,578,947,368,421$.

$$\begin{aligned}
052,631,578,947,368,421 \times 1 &= 052,631,578,947,368,421\\
052,631,578,947,368,421 \times 2 &= 105,263,157,894,736,842\\
052,631,578,947,368,421 \times 3 &= 157,894,736,842,105,263\\
052,631,578,947,368,421 \times 4 &= 210,526,315,789,473,684\\
052,631,578,947,368,421 \times 5 &= 263,157,894,736,842,105\\
052,631,578,947,368,421 \times 6 &= 315,789,473,684,210,526\\
052,631,578,947,368,421 \times 7 &= 368,421,052,631,578,947\\
052,631,578,947,368,421 \times 8 &= 421,052,631,578,947,368\\
052,631,578,947,368,421 \times 9 &= 473,684,210,526,315,789\\
052,631,578,947,368,421 \times 10 &= 526,315,789,473,684,210\\
052,631,578,947,368,421 \times 11 &= 578,947,368,421,052,631\\
052,631,578,947,368,421 \times 12 &= 631,578,947,368,421,052\\
052,631,578,947,368,421 \times 13 &= 684,210,526,315,789,473\\
052,631,578,947,368,421 \times 14 &= 736,842,105,263,157,894\\
052,631,578,947,368,421 \times 15 &= 789,473,684,210,526,315\\
052,631,578,947,368,421 \times 16 &= 842,105,263,157,894,736\\
052,631,578,947,368,421 \times 17 &= 894,736,842,105,263,157\\
052,631,578,947,368,421 \times 18 &= 947,368,421,052,631,578\\
052,631,578,947,368,421 \times 19 &= 999,999,999,999,999,999
\end{aligned}$$

שימו לב: $\frac{1}{19} = 0.052631578947368421\ 05263\ .\ .\ .$

בדוגמה הראשונה המספר קשור ל- $\frac{1}{7}$ **. מספר ספרותיו** $6 = 1 - 7$.
ומכפלתו ב- 7 **היא מספר המורכב מ-** 7 **פעמים הספרה** '9' .

בדוגמה הראשונה המספר קשור ל- $\frac{1}{17}$ **. מספר ספרותיו** $16 = 1 - 17$.
ומכפלתו ב- 17 **היא מספר המורכב מ-** 17 **פעמים** '9' .

בדוגמה הראשונה המספר קשור ל- $\frac{1}{19}$ **. מספר ספרותיו** $18 = 1 - 19$.
ומכפלתו ב- 19 **היא מספר המורכב מ-** 19 **פעמים** '9' .

ההשערה היא שיש אינסוף מספרים כאלה, אבל אין לכך הוכחה עדיין.

ריבוע קסם בריבוע

ריבוע הקסם המוצג, מורכב כולו ממספרים ריבועיים,
חובר על-ידי **ליאונרד אוילר** ב- 1770 .
קבוע הריבוע הוא $8,515$.

68^2	29^2	41^2	37^2
17^2	31^2	79^2	32^2
59^2	28^2	23^2	61^2
11^2	77^2	8^2	49^2

זהות אוילר – הזהות היפה ביותר במתמטיקה

$$e^{i\pi}+1=0$$

מה יפה בזהות זו? ובכן, זהות זו מקשרת בין שני קבועים ממשיים לא־רציונליים (e ו־ π), שלכאורה אין ביניהם כל קשר, ובין שלושה קבועים חשובים אחרים: 0 , 1 ו־ i .

זהות זו התגלתה על־ידי **ליאונרד אוילר** (1707–1783), מתמטיקאי שוויצרי. אוילר היה המתמטיקאי הפורה ביותר. סדרת כל כתביו הכילה כשבעים וחמישה כרכים. מאוחר יותר התגלתה זהות זו גם על־ידי **רמנוג'אן**, ילד פלא ואוטודידאקט הודי (1887–1920. שווה סיפור בפני עצמו), שלא ידע על תגליתו של אוילר והתאכזב מאוד כשנודע לו שאותה פנינה כבר ידועה ונושאת שמו של אוילר.

ריצ'ארד פיינמן (1918–1988), פיזיקאי יהודי־אמריקאי חתן פרס נובל, היה בן 14 כשנתקל לראשונה בזהות אוילר, התלהב וכתב ביומנו באותיות גדולות ועבות שזוהי 'הזהות המדהימה ביותר במתמטיקה'. אחרים השוו אותה לציור המונה ליזה של ליאונרדו דה־וינצ'י, כינו אותה כ'תקן הזהב של היופי המתמטי', 'מטריפה' ואפילו 'המשוואה של א-לוקים'.

הוכחת הזהות אינה מסובכת ואנו נביא כאן שתי הוכחות.

הוכחה לפי טור טיילור

טור טיילור הוא פולינום שמקרב פונקציה לא פולינומיאלית. התגלה על־ידי המתמטיקאי הבריטי **ברוק טיילור** (1685–1731). תנאי הכרחי ומספיק לקיומו של טור טיילור הוא ש־$f(x)$ גזירה אינסוף פעמים עבור $x=x_0$, ואז ניתן להציג את $f(x)$ כפולינום. זו הנוסחה:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\tfrac{1}{2}\cdot f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\tfrac{1}{6}\cdot f^{(3)}(x_0)\cdot(x-x_0)^3+$$

$$+\tfrac{1}{4!}\cdot f^{(4)}(x_0)\cdot(x-x_0)^4+\tfrac{1}{5!}\cdot f^{(5)}(x_0)\cdot(x-x_0)^5+\ ...\ +\tfrac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n+R_n(x)$$

כאשר $R_n(x)$ היא השארית שיש לה נוסחה שאינה מעניינו (לפי **לגראנז'** או לפי **קושי**). ככל שנוסיף מחוברים לפולינום – הדיוק יהיה גדול יותר. נוסחת השארית מאפשרת לנו לתמרן את מספר המחוברים הנדרש בהתאם לדיוק כרצוננו (לא נעסוק בזה).

עבור $x_0=0$ (אם הפונקציה גזירה שם אינסוף פעמים) נקבל:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\tfrac{1}{2}\cdot f''(0)\cdot x^2+\tfrac{1}{6}\cdot f^{(3)}(0)\cdot x^3+\tfrac{1}{4!}\cdot f^{(4)}(0)\cdot x^4+\ ...\ +\tfrac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(0)\cdot x^n+R_n(x)$$

ניתן לרשום את הפונקציה גם כטור אינסופי ללא שארית: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(0)\cdot x^n$

(נגזרת מסדר 0 היא הפונקציה עצמה: $f^{(0)}(x)=f(x)$).

למשל:

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\ ...}$$

נמחיש במספרים: $\sin\frac{\pi}{6}=0.5$. לעומת זאת, סכום שלושת המחוברים הראשונים בהצגת סינוס לפי טור טיילור הוא: $P(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}-\frac{(\frac{\pi}{6})^3}{3!}+\frac{(\frac{\pi}{6})^5}{5!}=0.500002132\ ...$, שגיאה של פחות מ־ 0.0000022 (!) .

דוגמאות נוספות:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ . \ . \ .}$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ . \ . \ .}$$

איזו נוסחה נקבל כאשר נציב במעריך של e את ix במקום רק את x ?

ובכן:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \ . \ . \ .$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}i + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}i - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!}i + \frac{x^8}{8!} + \ . \ . \ .$$

$$e^{ix} = \underbrace{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ . \ . \ .)}_{\cos x} + \underbrace{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ . \ . \ .)}_{\sin x}\, i \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

(נוסחה חשובה בפני עצמה)

$$\Rightarrow \quad e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0} \ (\checkmark)$$

<u>הוכחה לפי נגזרת</u>

נגדיר את הפונקציה $f(x)$:

$$f(x) = (\cos x + i \sin x)\cdot e^{-ix}$$

$$f'(x) = (-\sin x + i \cos x)\cdot e^{-ix} + (\cos x + i \sin x)\cdot(-i\, e^{-ix})$$

$$f'(x) = (-\sin x + i \cos x)\cdot e^{-ix} + (-i \cos x + \sin x)\cdot e^{-ix}$$

$$f'(x) = (-\sin x + i \cos x - i \cos x + \sin x)\cdot e^{-ix} = 0\cdot e^{-ix} = 0$$

כלומר: הפונקציה הנתונה היא פונקציה קבועה.

לכן, כדי למצוא את ערכה מספיק להציב בה מספר כלשהו. נבחר: $x = 0$:

$$f(x) = f(0) = (1 + i\cdot 0)\cdot e^{i\cdot 0} = (1 + 0)\cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad f(-\pi) = 1 \quad \Rightarrow \quad (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi))\cdot e^{i\pi} = 1$$

$$\Rightarrow \quad (-1 + i\cdot 0)\cdot e^{i\pi} = 1 \quad \Rightarrow \quad -e^{i\pi} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0} \ (\checkmark)$$

הרב **יהודה עמיטל** ז"ל (1924–2010) היה ראש ישיבת הר עציון (גוש עציון) ומייסדה.
פעם ניגש אליו תלמיד בשאלה בשם חברו. שאל אותו הרב עמיטל: ומדוע שהחבר לא ישאל בעצמו?
התלמיד ענה לו שאותו חבר מתבייש לשאול.
אמר לו הרב עמיטל שאם־כך אותו חבר יכול לשאול את השאלה בעצמו,
ולומר שזה בשם חבר שלו שמתבייש לשאול . . .

הפרדוקס של ברטנרד (*Joseph Louis Francois Bertrand* 1749 – 1827)

ב־1812 פרסם המתמטיקאי הצרפתי **לפלס** (1749-1827 **Pierre Simon de Laplace**) את ספרו החשוב 'התאוריה האנליטית של ההסתברות', בו הוא מגדיר הסתברות של מאורע: תהי Ω - קבוצת כל האפשרויות של תוצאת ניסוי, ותהי A תת־קבוצה של Ω. אזי, $P(A)$ היא מנת החילוק של מספר איברי A במספר איברי Ω: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

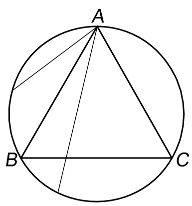
כל זאת בתנאי שהתוצאות הינן שוות־הסתברות, מה שמצמצם את ההגדרה לקבוצות בנות מניה סופיות.

בנות מניה: שניתן למנות אותם, כמו המספרים השלמים, בניגוד למספרים ממשיים, למשל.

ברטנרד פרסם את הפרדוקס המתואר כאן, כדי להצביע על הבעייתיות בהגדרה של **לפלס**:

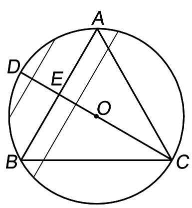
נתון מעגל החוסם משולש שווה צלעות. מעבירים מיתר מקרי במעגל.

מהי ההסתברות שאורך המיתר גדול מאורך צלע המשולש?



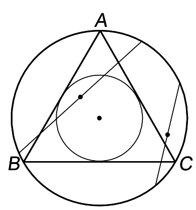
<u>פתרון 1:</u> נציב את אחד מקודקודי המשולש על אחת מנקודות הקצה של המיתר. אם נקודת הקצה השניה של המיתר נמצאת על הקשת $\overset{\frown}{BC}$ - הרי שאורך המיתר גדול מאורך צלע המשולש. אחרת - הוא קצר ממנה.

$$P=\frac{1}{3} \quad \Leftarrow \quad \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC} \ .$$



<u>פתרון 2:</u> נציב את המשולש, כך שהמיתר יהיה מאונך לאחד מגבהי המשולש, או להמשכו, כמתואר בציור. $OE=\frac{1}{2}R$ (הוכח כתרגיל). אם חיתוך המיתר עם הגובה הוא בקטע OE - הוא ארוך מצלע המשולש, אחרת (אם החיתוך הוא בקטע DE) - אורכו קצר מאורך צלע המשולש.

$$P=\frac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad OE=ED=\frac{1}{2}R \ .$$



<u>פתרון 3:</u> נתבונן במעגל החסום במשולש הנתון. שטח המעגל החוסם גדול פי ארבעה משטח המעגל החסום במשולש (הוכח כתרגיל). מיתר במעגל נקבע באופן יחיד ע"י נקודת האמצע שלו. אם אמצע המיתר בתוך המעגל החסום - אורך המיתר גדול מאורך צלע המשולש, אחרת - אורכו קצר מאורך צלע המשולש.

$$P=\frac{1}{4} \quad \Leftarrow \ .$$

איך זה יכול להיות? ובכן, כל הפתרונות נכונים. אלא מאי? מרחב המדגם 'כל המיתרים' שאליו התייחסנו באופן טבעי, אינו 'מוגדר היטב' (כלומר, הקביעה שהמיתר נבחר באופן מקרי אינה מגדירה די הצורך את הסיכוי לבחירה), והראָיָה שהוא אינו 'מוגדר היטב' היא הפרדוקס המתואר. הסבר מלא של מרחבי מדגם רציפים ומידות ההסתברות שניתן להגדיר עליהם נמצאים מעבר לרמה התיכונית. בכל זאת, נצביע על כיוון ההסבר: בשלושת הפתרונות הוגדרו מרחבי מדגם שונים עם התפלגות אחידה, המביאים לתוצאות שונות בחישוב הסתברות המאורע:

מרחב המדגם בפתרון הראשון הוא כל זוגות הנקודות על היקף המעגל.

מרחב המדגם בפתרון השני הוא כל הנקודות על הקוטר.

מרחב המדגם בפתרון השלישי הוא כל הנקודות בתוך העיגול של המעגל החוסם.

ניתן להוכיח (וזה החלק הקשה) שמאורעות שווי־הסתברות בפתרון אחד, אינם שווי־הסתברות בפתרון אחר. מכאן שאין לצפות לקבל אותה תשובה.

אילו המרחב היה אינסופי בדיד (כמו המספרים הטבעיים), אזי קרוב לודאי שלא היה נוצר פרדוקס מעין זה. כאן מדובר במרחבי מדגם רציפים (כמו המספרים הממשיים).

לא הבנתם? לא נורא. ה'פרדוקס' (שלמעשה אינו כזה), בכל מקרה, יותר יפה מהפתרון שלו.

בסיכומו של דבר, הקשיים הלוגיים בתורת ההסתברות של **לפלס** הוכחו כמינוריים. יחד עם זאת, הנסיון להתגבר עליהם הוביל לאקסיומטיזציה (מלשון 'אקסיומה') של תורת ההסתברות ב־1933 על ידי המתמטיקאי הרוסי **אנדריי ניקולאיביץ' קולומוגורוב** (1903-1987).

(לזכרו של **פרופסור בנו ארבל** ז"ל. נפטר בכ"ז בניסן תשע"ג. יהי זכרו ברוך.)

סיווג שאלות המבחנים

*פענוח הרישום: שאלה/מבחן. דוגמה: 38/4 – מבחן 38 שאלה 4. את הסיווג הכין **שרון חיים**.*

גידול ודעיכה

הסיווג לפי הפרמטר הנדרש לחישוב בסעיף הראשון של השאלה

- חישוב זמן
1/4a, 16/5a
- חישוב קצב גידול/דעיכה - שני תרחישים
3/4a, 10/5, 15/4b
- פתרון מערכת משוואות
2/4a
- עם פרמטר
1/4a

גאומטריה אנליטית

משולשים

- משולש ישר-זווית
12/1
- משולש שווה-שוקיים
29/1
- משולש שווה-צלעות
29/1
- היקף משולש
10/1
- שטח משולש
2/1, 8/1, 11/1, 14/1, 18/1, 30/1

נקודות וקווים מיוחדים במשולש

- חוצה זווית
30/1
- מפגש תיכונים במשולש
4/1, 8/1

מרובעים

- דלתון
42/1
- מקבילית
3/1
- מלבן
15/1, 24/1
- מעוין
28/1
- ריבוע
5/1, 27/1
- טרפז
25/1, 39/1
- שטח מקבילית
3/1
- שטח מלבן
24/1
- שטח ריבוע
5/1
- שטח מצולע
4/1, 33/1

מעגל

- מעגל
4/1, 5/1, 13/2, 21/1, 24/1, 25/1, 31/1, 33/1
- מעגל, עם פרמטר
1/1, 21/1, 35/1, 38/1, 44/1
- משיק למעגל
1/1, 3/1, 6/2, 13/2, 17/1, 22/1, 23/1, 26/1, 27/1, 37/1, 38/1, 43/1
- שני מעגלים או יותר
6/2, 13/1, 13/2, 17/1, 22/1, 31/1, 35/1
- מרובע חסום במעגל
37/1
- מעגל חסום במרובע
21/1
- מעגל חוסם משולש
11/1, 14/1
- שטח עיגול
5/1

פרבולה

- פרבולה
16/1, 23/1, 29/1
- פרבולה, עם פרמטר
13/2, 28/1, 39/1, 40/1, 41/1, 44/1
- משיק לפרבולה
9/1, 23/1, 35/1
- משיק לפרבולה, עם פרמטר
7/1, 11/1, 18/1, 20/1, 22/1, 26/1, 32/1, 36/1

אליפסה

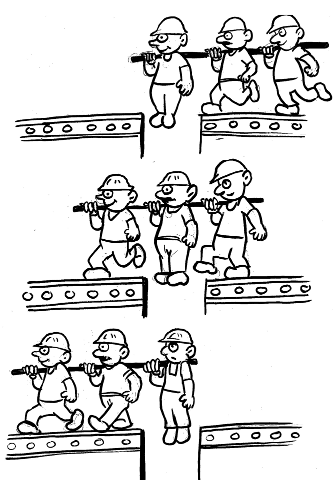
- אליפסה
4/1, 28/1, 33/1
- אליפסה, עם פרמטר
5/1, 10/1, 13/1, 19/1, 36/1
- ריבוע חסום באליפסה
5/1
- עיגול חסום באליפסה
5/1

מקומות גאומטריים

- קו ישר
1/1, 6/2, 14/1, 17/1, 31/1, 36/1, 37/1, 43/1
- פרבולה
7/1, 19/1, 29/1, 31/1, 35/1, 38/1, 39/1, 41/1, 42/1, 44/1
- היפרבולה
21/1
- מעגל
2/1, 13/2, 15/1, 30/1, 31/1, 34/1
- אליפסה
4/1, 33/1, 34/1
- שרטוט סקיצה של מקום גאומטרי
7/1

נושאים נוספים

- מספרים מרוכבים
15/1
- וקטורים גאומטריים
15/1
- וקטורים אלגבריים
26/2
- חישובי זוויות
7/1, 19/1
- פירמידה
4/2, 13/1, 22/2



טריגונומטריה במרחב עם וקטורים

מנסרה ישרה משולשת שבסיסה:
- משולש
30/2, 37/2, 43/2
- משולש שווה-צלעות (משוכללת)
15/3

מקבילון
7/2

תיבה
8/2, 20/2, 23/2, 31/2, 32/2, 41/2

קוביה
20/2, 29/2, 34/2

פירמידה משולשת שבסיסה:
- משולש
6/1, 4/2, 19/2, 24/2, 25/2c, 27/2, 44/2d

פירמידה ישרה משולשת שבסיסה:
- משולש
12/2
- משולש ישר-זווית
38/2
- משולש שווה-צלעות (משוכללת)
17/2, 30/2

פירמידה מרובעת שבסיסה:
- מקבילית
3/2, 5/2, 10/2, 14/3a
- מלבן
3/2
- מעוין
6/1, 42/2
- ריבוע
25/2, 33/2, 35/2

פירמידה ישרה מרובעת שבסיסה:
- מלבן
36/2
- ריבוע
28/2

וקטורים
- וקטורים גאומטריים
3/2, 6/1, 8/2, 14/3a, 15/3, 16/2, 17/2, 19/2, 20/2, 25/2, 32/2
- וקטורים אלגבריים וגאומטריים
2/2, 5/2, 7/2, 9/2, 12/2, 22/2, 23/2, 24/2, 28/2, 29/2, 30/2, 31/2, 33/2, 34/2, 35/2, 37/2, 38/2, 42/2, 43/2

משוואת המישור
11/2, 12/2, 28/2, 30/2, 31/2, 36/2, 37/2, 38/2, 42/2, 43/2

הצגה פרמטרית
- ישר
7/2, 9/2, 10/2, 22/2, 26/2, 31/2, 33/2
- מישור
5/2

חישוב מרחקים בין:
- נקודה למישור
7/2
- שני ישרים
15/2, 23/2
- שני מישורים
4/2, 11/2

חלוקת קטע ביחס נתון
- לפי ערך מספרי
6/1, 7/2, 25/2, 27/2, 31/2, 37/2
- לפי פרמטר
8/2, 14/2, 17/2, 18/2, 20/2, 29/2

חישוב זוויות
- בין ישרים
14/3a, 34/2, 38/2, 43/2
- בין ישר למישור
20/2, 24/2, 27/2, 29/2, 34/2, 35/2
- בין מישורים
12/2, 15/3, 16/2, 24/2, 30/2, 33/2, 36/2

מצב הדדי: ישרים ומישורים

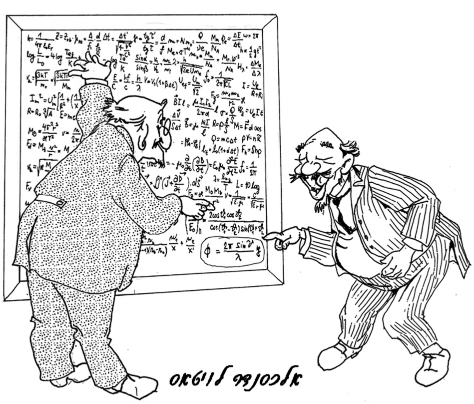
שני ישרים
- מאונכים
14/2, 28/2, 34/2
- מקבילים
14/2, 24/2
- אינם מקבילים
23/2
- נחתכים
34/2
- מצטלבים
2/2, 13/3, 22/2, 29/2, 31/2
- מתלכדים
10/2

ישר ומישור
- מאונכים
2/2, 6/1, 7/2, 9/2, 10/2, 12/2, 15/2, 15/3, 22/2, 23/2, 34/2, 36/2, 42/2
- מקבילים
8/2, 12/2, 15/2, 20/2, 23/2, 27/2, 29/2, 35/2
- נחתכים
2/2, 5/2, 7/2, 9/2, 15/2, 22/2, 26/2, 34/2, 36/2

שני מישורים
- מקבילים
4/2, 11/2, 14/2

ישר החיתוך בין שני מישורים
5/2, 15/2

מעגל
- מעגל חוסם בסיס של מנסרה ישרה משולשת
43/2



ירושלים של זהב

את השיר המיתולוגי 'ירושלים של זהב' כתבה והלחינה נעמי שמר, שבועות ספורים לפני שחרור העיר.

הביצוע נמסר לזמרת אלמונית אז – שולי נתן.

שמה הפרטי של שולי 'שולי' ושם משפחתה של נעמי 'שמר' – נמצאות כולן בשם העיר 'ירושלים'.

גם כל שם העיר 'ירושלים' נמצא בשמן.

חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי נושאים

חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר

- פונקציית חזקה
13/5
- פונקציה מעריכית (בסיס a)
14/5
- פונקציה מעריכית (בסיס e)
7/5a-d, 10/4, 13/4, 16/4a-b, 19/4a-b,
23/5a, 25/4a-b, 40/4a-c
- פונקציה לוגריתמית
6/5a, 24/5, 29/4
- פונקציה לוגריתמית ופונקציה טריגונומטרית
4/5a-b1
- פונקציית LN
3/5, 20/5, 21/5, 25/5a-c

חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות וללא פרמטר

- פונקציה מעריכית (בסיס a)
26/4a
- פונקציה מעריכית (בסיס e)
4/4, 23/5, 28/4, 30/4a, 32/4a-c,
37/5, 39/4, 42/4a-c, 43/4a-c1
- פונקציית LN
7/4a-c, 8/4a-d1, 14/4a-b, 19/5, 26/5, 28/5, 30/5,
31/5, 34/4, 36/5, 38/5, 39/5, 40/5, 42/5

חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות ועם פרמטר

- על סמך גרף נתון
20/4
- פונקציה מעריכית (בסיס e)
5/4a-f, 6/4a-c, 12/5, 18/4,
22/4a-b+d, 24/5, 29/4, 34/5
- פונקציה לוגריתמית
5/5a
- פונקציית LN
2/5, 8/5, 12/4a-b, 16/5b, 22/5, 29/5a-d,
33/5, 35/4, 41/5a-c, 43/5a-c

חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות ועם פרמטר

- פונקציה מעריכית (בסיס a)
9/4a-b
- פונקציה מעריכית (בסיס e)
27/4, 31/4a-b, 33/4a-d2,
36/4, 38/4, 44/4a-c
- פונקציה לוגריתמית
17/5
- פונקציית LN
15/5, 23/4, 24/4, 27/5, 32/5, 37/4, 44/5

הבעה באמצעות פרמטר

- פונקציה מעריכית (בסיס e)
1/5, 4/4, 6/4, 20/4, 22/4, 31/4
- פונקציית LN
2/5, 22/5, 23/4, 37/4

בעיות ערך קיצון

גרפים
- פונקציה מעריכית (בסיס e)
35/5
- פונקציית LN
3/4b, 8/5a-c, 9/5, 15/5c, 20/5

גאומטריה
- פונקציה מעריכית (בסיס e)
11/4

הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

- על סמך גרף נתון
19/5, 20/4, 26/5, 40/5
- פונקציית שורש
13/5
- פונקציה מעריכית (בסיס e)
1/5a, 10/4, 13/4, 17/4, 18/4,
24/5, 27/4e-f, 41/4, 42/4
- פונקציית LN
21/5, 22/5, 23/4, 25/5, 31/5

התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)

- על סמך גרף הפונקציה
19/5, 35/5a
- פונקציית שורש
13/5
- פונקציה מעריכית (בסיס e)
13/4, 34/5, 38/4
- פונקציית LN
22/5, 35/4, 43/5

חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי סוג הפונקציה

פונקציית חזקה

- חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
13/5
- הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
13/5
- התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
13/5

פונקציה מעריכית (בסיס a)

- חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
14/5
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות וללא פרמטר
26/4a
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות ועם פרמטר
9/4a-b

פונקציה מעריכית (בסיס e)

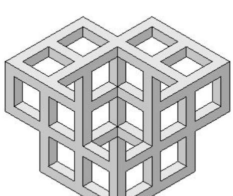
- חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
7/5a-d, 10/4, 13/4, 16/4a-b, 19/4a-b,
23/5a, 25/4a-b, 40/4a-c
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות וללא פרמטר
4/4, 23/5, 28/4, 30/4a, 32/4a-c,
37/5, 39/4, 42/4a-c, 43/4a-c1
- חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות ועם פרמטר
5/4a-f, 6/4a-c, 12/5, 18/4,
22/4a-b+d, 24/5, 29/4, 34/5
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות ועם פרמטר
27/4, 31/4a-b, 33/4a-d2,
36/4, 38/4, 44/4a-c
- הבעה באמצעות פרמטר
1/5, 4/4, 6/4, 20/4, 22/4, 31/4
- הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
1/5a, 10/4, 13/4, 17/4, 18/4,
24/5, 27/4e-f, 41/4, 42/4
- התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
13/4, 34/5, 38/4
- בעיות ערך קיצון
  - גאומטריה
11/4
  - גרפים
35/5

פונקציה לוגריתמית

- חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
6/5a, 24/5, 29/4
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות וללא פרמטר
17/5
- חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות ועם פרמטר
5/5a, 17/5

פונקציית LN

- חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
3/5, 20/5, 21/5, 25/5a-c
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות וללא פרמטר
7/4a-c, 8/4a-d1, 14/4a-b, 19/5, 26/5, 28/5, 30/5,
31/5, 34/4, 36/5, 38/5, 39/5, 40/5, 42/5
- חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות ועם פרמטר
2/5, 8/5, 12/4a-b, 16/5b, 22/5, 29/5a-d,
33/5, 35/4, 41/5a-c, 43/5a-c
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות ועם פרמטר
15/5, 23/4, 24/4, 27/5, 32/5, 37/4, 44/5
- הבעה באמצעות פרמטר
2/5, 22/5, 23/4, 37/4
- הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
21/5, 22/5, 23/4, 25/5, 31/5
- התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
22/5, 35/4
- בעיות ערך קיצון
  - גרפים
3/4b, 8/5a-c, 9/5, 15/5c, 20/5



חשבון דיפרנציאלי - נושאי חקירה נוספים

חקירה בשילוב שתי פונקציות

- פונקציית שורש ופונקציה מעריכית (בסיס e)

16/4, 19/4, 40/4

- פונקציית שורש ופונקציית LN

12/4, 30/5

- פונקציה לוגריתמית ופונקציה טריגונומטרית

4/5

הרכבת פונקציות

הרכבה של פונקציה לוגריתמית על פונקציה טריגונומטרית

5/5b, 6/5b

הרכבת פונקציית שורש על פונקציה מעריכית (בסיס a)

21/4

הרכבת פונקציית שורש על פונקציה מעריכית (בסיס e)

18/4, 34/4

נקודות קיצון מוחלט

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

12/5

- פונקציה לוגריתמית

4/5, 5/5a

- פונקציה לוגריתמית המכילה פונקציה טריגונומטרית

6/5b

תחומי קעירות כלפי מטה/מעלה

- על סמך גרף הפונקציה

20/4, 26/5

- פונקציית שורש

13/5

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

17/4a-b, 18/4, 27/4

- פונקציית LN

2/5, 8/5, 27/5, 36/5

נקודות פיתול

- על סמך גרף הפונקציה

1/5, 20/4

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

18/4, 24/5, 27/4, 30/4, 36/4, 42/4

- פונקציית LN

2/5, 3/5, 22/5, 23/4, 25/5, 43/5

נושאים שונים

- פונקציה זוגית/אי-זוגית

6/4, 12/5, 14/5, 16/5b, 22/4, 27/4,
29/4, 30/4, 33/5, 43/4, 44/4

- פונקציה עם שני פרמטרים

5/5b, 6/5b, 27/4, 27/5, 36/4

- פונקציה עם ארבעה פרמטרים

1/5, 20/4

- פונקציית ערך מוחלט

9/4, 17/5, 25/4

- פונקציה עם 'חור' (אי-רציפות סליקה)

20/5, 25/5, 33/4, 33/5, 36/4, 40/4

- הישר y=k

4/5, 17/5, 26/4, 30/5, 31/4, 39/5

- נגזרת מסדר n

37/5

טרנספורמציה של פונקציה

- העלאה בריבוע

22/4

- ערך מוחלט

9/4, 17/5, 25/4

- ערך מוחלט והזזה אנכית

33/4

- פונקציה הופכית

28/4, 39/4, 42/4, 43/5

- שיקוף פונקציה הופכית

21/5

- שיקוף ומתיחה אנכית

13/4

- הזזה אנכית

26/4, 30/4, 30/5, 38/4

- הזזה אופקית

44/4

חשבון אינטגרלי

חישובי אינטגרלים ושטחים

- פונקציה מעריכית (בסיס a)

9/4, 26/4

- פונקציה מעריכית (בסיס a), עם פרמטר

21/4

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

2/4b, 7/5, 16/4, 17/4, 22/4, 23/5,
24/5, 25/4, 30/4, 32/4, 33/4, 43/4

- פונקציה מעריכית (בסיס e), עם פרמטר

40/4

- פונקציית LN

3/5, 7/4, 18/5, 24/4, 25/5, 29/5, 31/5g, 43/5

- מציאת פונקציה קדומה

1/4b, 2/5, 10/4, 11/5, 28/5, 35/5, 37/5

אינטגרל, עם פרמטר

- פונקציה רציונאלית

11/5

- פונקציה מעריכית (בסיס a)

9/4

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

1/5, 7/5, 16/4, 20/4, 24/5, 25/4,
30/4, 31/4, 34/4, 39/4

- פונקציית LN

3/5, 18/5, 25/5, 35/4

שטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת

- על סמך גרף נתון

20/4

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

5/4, 13/4, 42/4, 44/4

- פונקציה לוגריתמית

4/5

- פונקציית LN

8/4, 14/4, 41/5

אינטגרל מצטבר

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

7/5, 25/4, 30/4, 39/4

- פונקציית LN

31/5

שימוש בשיטת ההצבה

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

23/5, 25/4, 32/4, 33/4, 35/5, 40/4

- פונקציית LN

12/4, 24/4, 29/5, 30/5, 43/5

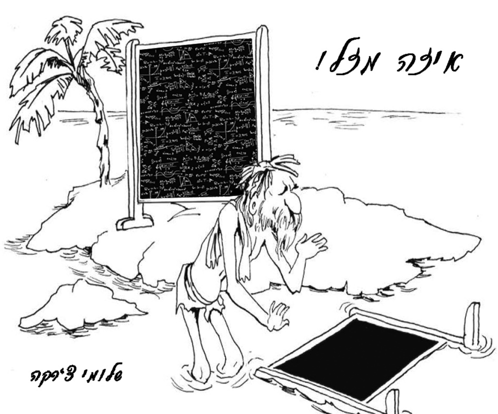
נפח גוף סיבוב (קו תחתי - עם פרמטר)

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

6/4, 15/4a, 19/4

- פונקציית LN

12/4, 30/5, 34/4



***פטר הגדול** (שליט רוסיה, 1672–1725) רצה להפוך אומה ברברית לאומה לא ברברית באמצעים ברברים.*

(פרופסור מיכאל הרסגור)

סימנים מתמטיים המופיעים בספר

$\cup$ - איחוד, היחס 'או'. דוגמה: התחום $x<2$ או $x>9$ ייכתב כך: $(x<2)\cup(x>9)$

$\cap$ - חיתוך, היחס 'וגם'. דוגמה: התחום $x<8$ וגם $x>1$ הוא התחום: $1<x<8$.
נרשום זאת כך: $\underline{1<x<8}$ $\Rightarrow$ $(x>1)\cap(x<8)$.

$(\surd)$ - מופיע בדרך כלל בסוף הוכחה כאישור למש"ל (מה שהיה להוכיח), או כאישור לבדיקת נתון.

$\in$ - שייכות. דוגמה: $x\in[1,9]$ כלומר: x שייך לקטע הסגור $[1,9]$ או: $1\le x\le 9$
דוגמה: $(1,2)\notin y_{CD}$ כלומר: הנקודה $(1,2)$ אינה על הישר העובר דרך C ו־ D .

$\forall$ - לכל. דוגמה: תחום הגדרה: $\forall x$. כלומר: תחום ההגדרה הינו עבור כל x ממשי.

דוגמה: $\frac{(x-1)^2}{x^6}>0\ \ \forall\{x\ne 0\ ,\ x\ne 1\}$

משמעות הסימון: הביטוי $\frac{(x-1)^2}{x^6}$ גדול מ־ 0 לכל x השונה מ־ 0 ושונה מ־ 1 .

פתרון משוואה ריבועית מוצג בקיצור באופן הבא (לדוגמה): $6x^2-x-15=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{1\pm19}{12}=\ .\ .\ .$
זאת - מתוך הנחה שהתלמיד בשאלון זה שולט בביצוע $\sqrt{\triangle}$ ובבדיקת החישוב.

'ללא הגבלת הכלליות' - קביעת ערך מייצג, במקום פרמטר (שאמור להצטמצם בהמשך). למשל, אם יש למצוא גודל זווית לפי יחסי צלעות, ניתן לקבוע אורך אחת מהן ב־1 (יחידת אורך אחת, או כל ערך אחר).

$\emptyset$ - קבוצה ריקה. למשל: $x_{1,2}=\frac{-4\ \ \sqrt{-5}}{3}=\emptyset$ כלומר: למשוואה הריבועית הנתונה אין פתרון

ep. - end point נקודות קצה של תחום סגור הן נקודות קיצון חד־צדדיות (אלא אם כן הפונקציה בסביבה החד־צדדית של הנקודה היא קבועה). למשל: $(5,6)$: min_{ep}.

ab. - absolute סימון של נקודת קיצון מוחלטת בתחום סגור. למשל: $(-7,11)$: max_{ab}.

ext. - extreme קיצון.

cm^2 - סמ"ר , **cm^3** - סמ"ק , **asym.** - אסימפטוטה , **infl.** - פיתול (inflection)

$\nearrow$ - עליה , $\searrow$ - ירידה , למשל: $\forall x>6$ $\nearrow$ f - המשמעות: הפונקציה f(x) עולה בתחום $x>6$

$\smile$ - קעירות (קעירות כלפי מעלה) , $\frown$ - קמירות (קעירות כלפי מטה).

$x\to a+$ - שאיפה ל־ a מימין , למשל: '$x\to 0+$' הכוונה היא לשאיפה $0.1, 0.01, 0.001\ .\ .\ .$
$x\to a-$ - שאיפה ל־ a משמאל , למשל: '$x\to 0-$' הכוונה היא לשאיפה $0.9, 0.99, 0.999\ .\ .\ .$

lim - קיצור של limit, גבול.
למשל: $\lim\limits_{x\to\infty}(x)=5$: הגבול של f(x) כאשר x 'שואף' ל־ ∞ הוא 5 (אסימפטוטה אופקית: $y=5$).

$y_{\rightarrow}=k$ - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית בכיוון $+\infty$ בלבד.
$y_{\leftarrow}=k$ - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית בכיוון $-\infty$ בלבד.

ללא הגבלת הכלליות - הסבר

כשצריך למצא יחסים בין חלקים שונים ללא נתוני גודלם, מסמנים בדרך כלל, את גודל אחד החלקים בפרמטר, נניח a, ואת החלקים האחרים בהתאם ליחס שלהם לפרמטר שקבענו.

במקרים כאלה ניתן לקבוע מספר (במקום פרמטר) שנח לנו לעבוד איתו ולציין: 'ללא הגבלת הכלליות', שזה אומר שאותו גודל שקבענו הוא מקרה פרטי המתאים גם לכל גודל אחר.

דוגמה: אורך אחד הניצבים במשולש ישר־זווית גדול פי שלושה מאורך הניצב האחר.

פי כמה גדול אורך היתר מאורך הניצב הקטן?

פתרון: ברור מנוסח השאלה שלא משנה מהם אורכי צלעות המשולש אלא רק היחס ביניהם.

נסמן את אורך הניצב הקטן ב־a . מכאן שאורך הניצב הגדול הוא $3a$.

נפעיל את משפט פיתגורס ואז אורך היתר הוא:

$$\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10a^2}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{a^2}=a\sqrt{10}$$

ולכן היתר גדול מהניצב הקטן פי $\sqrt{10}=\frac{\cancel{a}\sqrt{10}}{\cancel{a}}$.

בפתרון זה היינו רשאים לקבוע את אורך הניצב הקטן כ־1 (ולציין: 'ללא הגבלת הכלליות').

לכן אורך הניצב הגדול היה 3 ואורך היתר היה $\sqrt{10}$. היחס שהיה מתקבל הוא בדיוק אותו יחס.

אם היינו קובעים את אורך הניצב הקטן כ־ 8. אורך הניצב הגדול היה 24. אורך היתר היה $24\sqrt{10}$,

והיחס המבוקש היה בדיוק אותו יחס - $\sqrt{10}=\frac{24\sqrt{10}}{24}$.

מכאן שניתן לבחור במקרים כאלה את אורך אחד הגדלים לנוחותנו ומשם להמשיך בפתרון.

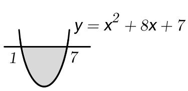
'פטנט' זה מאושר לשימוש בפתרון מבחני הבגרות על־ידי משרד החינוך.

שינוי גבולות אינטגרציה בחישוב שטח - הסבר

חישוב שטח בין גרף פונקציה לבין ציר x הנמצא מתחת לציר x נותן ערך שלילי.

השטח הינו הערך המוחלט של אותו ערך שקיבלנו.

ישנן מספר אפשרויות כדי לקבל את הערך הנכון.



1. סימון כל הביטוי בערך מוחלט:

$$S=\left|\int_1^7(x^2+8x+7)\,dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}+4x^2+7x\right)\Big|_7^1\right|=$$

$$\left|\left(\frac{1}{3}+4+7\right)-\left(\frac{343}{3}+98+49\right)\right|=\left|\,11\frac{1}{3}-261\frac{1}{3}\,\right|=|-250|=250$$

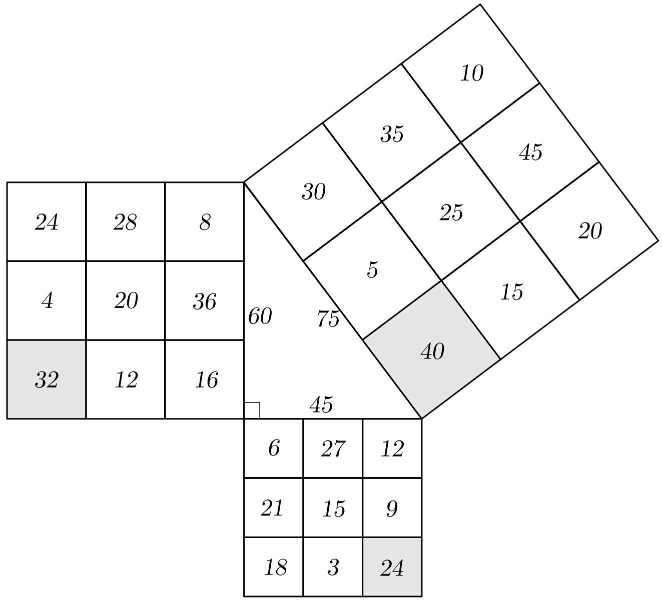
2. הצמדת מינוס לביטוי:

$$S=-\int_1^7(x^2+8x+7)\,dx=\ ...\ =-(-250)=250$$

3. הפיכת גבולות האינטגרציה (לשם כך התכנסנו . . .):

$$S=\int_7^1(x^2+8x+7)\,dx=\ ...\ =261\frac{1}{3}-11\frac{1}{3}=250$$

הכי פתגורס שיש



בציור משולש שאורכי צלעותיו הינם 60 ,45 ו־75 יחידות אורך.

שלשָה זו, הינה שלשָה פיתגורית: $74^2 = 60^2 + 45^2$.

על כל אחת מצלעות המשולש בנוי ריבוע קסם שסכום כל שורה, כל עמודה וכל אלכסון שלו שווה לאורך הצלע עליה הוא בנוי (בדוק).

מה שעוד יותר יפה כאן הוא שהמספרים המתאימים בריבועי הקסם, מהווים אף הם שלשָה פיתגורית.

אם נשווה את מיקום תאי הריבועים

ע"פ התאים האפורים בציור (24, 32, 40),

כשהריבועים 'יושבים' זה על זה, באופן הבא:

6	27	12
21	15	9
18	3	24

^{2} +

8	36	16
28	20	12
24	4	32

^{2} =

10	45	20
35	25	15
30	5	40

^{2}

נקבל 9 שלָשות פיתגוריות:

$6^2+8^2=10^2 \quad ; \quad 27^2+36^2=45^2 \quad ; \quad 12^2+16^2=20^2 \quad ; \quad 21^2+28^2=35^2$

$15^2+20^2=25^2 \quad ; \quad 9^2+12^2=15^2 \quad ; \quad 18^2+24^2=30^2 \quad ; \quad 3^2+4^2=5^2 \quad ; \quad 24^2+32^2=40^2$

וזה עוד לא הכל: נבחר מספר משבצות כלשהו באחד הריבועים, ונחבר את הסכום המתקבל מהם.

נבצע פעולה זו באותם תאים מתאימים בשני הריבועים האחרים.

קיבלנו שלושה מספרים שגם הם שלשָה פיתגורית !!!

יש 502 אפשרויות כאלה (לא בחומר של שלוש יחידות): $\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\ ...\ +\binom{9}{9}=502$

ניקח לדוגמה, את ארבעת המספרים הבאים מהריבוע הקטן: $18+21+27+9=\underline{75}$

המספרים המתאימים בריבועים האחרים הם: $24+28+36+12=\underline{100}$ בריבוע הבינוני,

ו־$30+35+45+15=\underline{125}$ בריבוע הגדול.

ואכן: $75^2+100^2=125^2$ (בדוק) !!!

אם ניקח, למשל, את סכום כל התאים נקבל את השלשָה: $135^2+180^2=225^2$ (בדוק) !!!

מ ק ס י ם ! ! !

נוסחאון בגרות רשמי – 5 יחידות

אלגברה

- נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \ , \ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \ , \ a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0 \ , \ a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה	$a_1 = a \ , \ a_{n+1} = a_n + d$	$a_1 = a \ , \ a_{n+1} = a_n \cdot q$
האיבר ה־n־י	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

- לוגריתמים $(a, b, c > 0 \ ; \ a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b \ , \ a^{\log_a b} = b \ , \ \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \ , \ \log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c \ , \ \log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

- מספרים מרוכבים: משפט דה־מואבר: $[R(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

פתרונות המשוואה: $z^n = R(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ הם:

$$z_k = \sqrt[n]{R}\,[\cos(\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i \sin(\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n})] \ , \ k = 0, 1, 2, \ . \ . \ . \ , n-1$$

- וקטורים: אורך של וקטור: $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מישור דרך קצוות הוקטורים $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$: $\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) + s(\underline{c} - \underline{a})$

מכפלה סקלרית: $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cos\alpha$

מרחק בין נקודה $\underline{p}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\frac{|\underline{v} \cdot \underline{p} + e|}{|\underline{v}|}$

מציאת זווית בין הישר $\underline{a} + t\underline{b}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\sin\beta = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{b}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{b}|}$

מציאת זווית בין המישורים $\underline{v_1} \cdot \underline{x} + e_1 = 0 \ , \ \underline{v_2} \cdot \underline{x} + e_2 = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\underline{v_1} \cdot \underline{v_2}|}{|\underline{v_1}| \cdot |\underline{v_2}|}$

גאומטריה אנליטית

קו ישר - שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1,y_1) ו־(x_2,y_2) : $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

משוואת ישר $y=mx+b$ עם שיפוע m העובר בנקודה (x_1,y_1) : $y-y_1=m(x-x_1)$

הנקודה C המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע שקצותיו

הם $A(x_1,y_1)$ ו־$B(x_2,y_2)$ ביחס $\frac{AC}{BC}=\frac{k}{l}$ היא: $\left(\frac{lx_1+kx_2}{k+l}\ ,\ \frac{ly_1+ky_2}{k+l}\right)$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו־m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1\cdot m_2=-1$

מרחק הנקודה (x_0,y_0) מהישר $Ax+By+C=0$: $d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$

מעגל - משוואת משיק למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

בנקודה (x_0,y_0) שעל המעגל היא:

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$$

פרבולה - משוואת משיק לפרבולה $y^2=2px$

בנקודה (x_0,y_0) שעל הפרבולה היא: $y\cdot y_0=p(x+x_0)$

אליפסה - משוואת אליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

מרחק המוקד מהראשית: $c=\sqrt{a^2-b^2}$

סכום מרחקי נקודה על האליפסה מהמוקדים: $r_1+r_2=2a$

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל־k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית,

כאשר ההסתברות להצלחה היא p :

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\quad ,\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- הסתברות מותנית: $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

- נוסחת בייס: $P(A/B)=\frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}$

Yesterday is history, tomorrow is a mystery.
Today is a gift, that's why it's called the present.