

מספר מילים לפני

ספר זה מכיל בחלקו הראשון שאלות ממבחני הבגרות בין השנים 1967-2013 שנערכו במתכונת ה'צבירה', המתאימות לשאלון 482 בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. השאלות מחולקות לפי נושאים. לכל שאלה תשובה סופית בעמוד השאלה. בחלקו השני של הספר מובאים כל 45 מבחני הבגרות של שאלון זה שנערכו עד כה במתכונת הנוכחית.

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

\forall - לכל , \in - שייך , \nearrow - עלייה , \searrow - ירידה , U - איחוד: היחס 'או' , \emptyset - קבוצה ריקה
 $\sqrt{\quad}$ - אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח , ab - מוחלט , $ep.$ - נקודת קצה (end point)

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילו צי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילו צי עריכה. דיוקים נדרשים הושטו בכוונה.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ-2012 עד 2017 (מועד א), כפי שהם בספר, נמצאים באתר ההוצאה במרשתת (internet), בחינם.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי ברואל. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת לשריף אמארה מכפר זלפה ולשרון חיים מפתח תקוה.

לאחר כל מבחן בגרות שיערך בשנה הקרובה (התשפ"ב - 2022), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את חלק מהחללים שבין השאלות והפתרונות לחלחתי בהבזקי אנקדוטות וסיפורים. רוב ה'הבזקים' קשורים למתמטיקה, חלקם אינו כזה, וביניהם גם אנקדוטות בעלות אופי לאומי או יהודי.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על-ידי חברת 'קל-ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה א'י א'טכ

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יצאו גם לשאלונים 482-581-582

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יצאו לשאלונים 382-481-482-581-582

© כל הזכויות על השאלות שמורות למדינת ישראל - משרד החינוך, התרבות והספורט

כל הזכויות על הספר שמורות למחבר

אלגברה - סדרות - סדרה חשבונית - שאלות

1. (005, חורף ס"ו - 2006) נתונה סדרה חשבונית שבה $3n$ איברים.
 האיבר הנמצא במקום ה-21 גדול ב-66 מהאיבר הנמצא במקום ה-10.
 סכום n האיברים האחרונים בסדרה גדול פי 5 מסכום n האיברים הראשונים שבה.
 מצא את ערכו של האיבר הראשון. (22)
2. (005, קיץ ס"ז - 2006, מועד א) נתון כי סכום 30 האיברים הראשונים בסדרה חשבונית שווה לסכום 20 האיברים הראשונים שלה.
 א. הראה כי סכום 50 האיברים הראשונים בסדרה הנתונה שווה לאפס.
 ב. הסדרה הנתונה היא סדרה חשבונית עולה.
 מצא באיזה מקום בסדרה נמצא האיבר החיובי הראשון. (22)
3. (005, קיץ ס"ז - 2006, מועד ב) נתונה סדרה חשבונית: a_1, a_2, \dots, a_{2n} . הפרש הסדרה הוא d .
 סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים הוא אפס.
 א. הוכח כי: $a_n = 0$
 ב. הבע באמצעות n ו- d את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה. (22)
4. (005, קיץ ס"ז - 2006, מועד מיוחד) נתונה סדרה חשבונית: $120, 117, 114, \dots$
 א. מצא עבור אילו ערכים של n , סכום n האיברים בסדרה קטן מאפס.
 ב. האיבר האחרון בסדרה הוא -357. כמה איברים שליליים יש בסדרה? (23)
5. (005, קיץ ס"ז - 2006, מועד מיוחד) שני תלמידים קיבלו מאגר תרגילים במתמטיקה והיו צריכים להגיש את הפתרונות בסוף החופש.
 הם החלו לפתור את התרגילים באותו היום. אחד התלמידים פתר ביום הראשון 4 תרגילים, ובכל יום שאחריו פתר תרגיל אחד יותר מן היום הקודם לו. התלמיד השני עבד בקצב קבוע ופתר בכל יום 13 תרגילים. התלמיד השני סיים את העבודה שלושה ימים לפני הראשון.
 כמה תרגילים היו במאגר? (מצא את כל הפתרונות האפשריים). (23)

$$5^4 = 2^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 4^4$$

המספר הקטן ביותר בחוקת 4 ששווה לסכום 5 מספרים בחוקת 4

תהליך

1. $a_1 = 3$ 3. $Seven = dn$ 5. $S_1 = 130, S_2 = 39$
2. $n = 26$ 4. $n > 81$ ב. 119

אלגברה - סדרות - סדרה הנדסית - פתרונות

.1

$$a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 = 125 \Rightarrow a_1^3 q^3 = (a_1 q)^3 = 125 = 5^3 \Rightarrow a_1 q = 5$$

$$a_1, a_1 q, a_1 q^2 \rightarrow a_1 + 1, a_1 q + 1, a_1 q^2 - 7$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 q^2 - 7}{a_1 q + 1} = \frac{a_1 q + 1}{a_1 + 1} \Rightarrow \frac{5q - 7}{5 + 1} = \frac{5 + 1}{a_1 + 1} \Rightarrow (5q - 7)(a_1 + 1) = 36$$

$$\Rightarrow 5a_1 q + 5q - 7a_1 - 7 = 36 \Rightarrow 5 \cdot 5 + 5q - 7a_1 - 7 = 36$$

$$\Rightarrow 7a_1 = 5q - 18 \Rightarrow a_1 = \frac{5q - 18}{7}$$

$$a_1 q = 5 \Rightarrow \frac{5q - 18}{7} \cdot q = 5 \Rightarrow (5q - 18) \cdot q = 35 \Rightarrow 5q^2 - 18q - 35 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{18 \pm 32}{10} = \frac{9 \pm 16}{5} \Rightarrow q_1 = 5 \Rightarrow (a_1)_1 = \frac{5 \cdot 5 - 18}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

$$q_2 = -\frac{7}{5} \Rightarrow (a_1)_2 = \frac{5 \cdot (-\frac{7}{5}) - 18}{7} = -\frac{25}{7} = -3\frac{4}{7}$$

(1) $a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = 1 \cdot 5 = 5 \Rightarrow a_3 = 5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow 1, 5, 25$

(2) $a_1 = -\frac{25}{7} \Rightarrow a_2 = -\frac{25}{7} \cdot (-\frac{7}{5}) = 5 \Rightarrow a_3 = 5 \cdot (-\frac{7}{5}) = -7 \Rightarrow -3\frac{4}{7}, 5, -7$

.2

(I) $\frac{2}{a_3} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \Rightarrow \frac{2}{a_1 q^2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 q} \quad / \cdot a_1 q^2 \Rightarrow 2 = q^2 - q$

$$\Rightarrow q^2 - q - 2 = 0 \quad q_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow q_1 = 2, q_2 = -1$$

(II) $a_7 = 32 \Rightarrow a_1 q^6 = 32 \Rightarrow a_1 = \frac{32}{q^6}$

$$q_1 = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{32}{2^6} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{20} - 1}{2 - 1}$$

$$\Rightarrow (1) S_{20} = 524,287.5$$

$$q_2 = -1 \Rightarrow a_1 = \frac{32}{(-1)^6} = 32 \Rightarrow S_{20} = 32 \cdot \frac{(-1)^{20} - 1}{(-1) - 1} = \frac{32 \cdot (1 - 1)}{-2}$$

$$\Rightarrow (2) S_{20} = 0$$

$$3413 = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 \quad \text{המספר הראשוני 3413 ניתן להצגה הבאה:}$$

אלגברה - סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת - שאלות

1. (005, קיץ ס"ה - 2005, מועד ב)

בסדרה הנדסית אינסופית סכום האיבר הראשון והאיבר החמישי הוא 5440. האיבר הראשון גדול מהאיבר הרביעי פי 8. מצא את: א. סכום הסדרה.

ב. סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה. (39)

2. (005, סתיו ס"ט - 2009, מועד לוחמים)

נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת a_1, a_2, a_3, \dots .

סכום האיברים בסדרה זו גדול פי 1.4

מסכום האיברים הנמצאים במקומות האיזוגיים באותה סדרה אינסופית.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. מאיברי הסדרה הנתונה a_1, a_2, a_3, \dots בונים שתי סדרות אינסופיות חדשות I ו-II:

$$I: a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots; \quad II: a_1^3, a_2^3, a_3^3, \dots$$

ידוע כי הסכום של איברי סדרה II גדול פי 35 מהסכום של איברי סדרה I.

מצא את הסכום של איברי הסדרה הנתונה a_1, a_2, a_3, \dots . (39)

3. (006, חורף ס"ה - 2005)

נתונה סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה היא $4q^2$ ($0 < q < \frac{1}{2}$).

בין כל שני איברים בסדרה הנתונה הכניסו איבר נוסף,

ונוצרה סדרה הנדסית חדשה שכל איבריה חיוביים.

א. הבע באמצעות q את מנת הסדרה החדשה.

ב. נתון כי סכום הסדרה החדשה גדול פי $48q^2$ מסכום הסדרה הנתונה. חשב את q.

ג. עבור הערך של q שמצאת בסעיף ב', חשב בסדרה החדשה את היחס

בין האיבר במקום הראשון ובין סכום האיברים שאחרי האיבר הראשון. (40)

תשובות

1. א. $S = 10,240$ ב. $S = 3,413\frac{1}{3}$

2. א. $q = 0.4$ ב. $S = 65$

3. א. $2q$ ב. $q = \frac{1}{6}$ ג. 2

10. א.

$$a_1 = 11, \quad a_{n+1} = -0.5a_n + 4.5, \quad b_n = a_n - 3$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}-3}{a_n-3} = \frac{-0.5a_n+4.5-3}{a_n-3} = \frac{-0.5a_n+1.5}{a_n-3} = \frac{-0.5(a_n-3)}{a_n-3} = -0.5 \Rightarrow q_{b_n} = -\frac{1}{2} \quad (\checkmark)$$

ב. (1)

המעבר בין כל שני איברים עוקבים של סדרה הנדסית הוא הכפלת האיבר הקודם ב- q .
לכן המעבר בדילוג של אחד (כמו באיברים הנמצאים במקומות הזוגיים) יהיה הכפלה ב- q^2 .

$$q = -\frac{1}{2} \Rightarrow q^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4}$$

(2)

$$b_1 = a_1 - 3 = 11 - 3 = 8 \Rightarrow b_2 = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

$$S_{2\infty} = \frac{-4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{-4}{\frac{3}{4}} = \frac{-4 \cdot 4}{3} = -\frac{16}{3} \Rightarrow S_{2\infty} = -5\frac{1}{3}$$

($S_{2\infty}$ - סימון (שלי) לסכום אינסוף האיברים במקומות הזוגיים)

11. א. (1)

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = a_n + 7n + p$$

$$a_2 = a_1 + 7 \cdot 1 + p = 4 + 7 + p \Rightarrow a_2 = 11 + p$$

$$a_3 = a_2 + 7 \cdot 2 + p = 11 + p + 14 + p \Rightarrow a_3 = 25 + 2p$$

(2)

$$a_3 - a_2 \stackrel{?}{=} a_2 - a_1 \Rightarrow (25 + 2p) - (11 + p) \stackrel{?}{=} (11 + p) - 4 \Rightarrow 14 + p \neq 7 + p$$

← הסדרה אינה חשבונית

ב.

$$b_n = 2a_n - 7n^2$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= 2a_{n+1} - 7(n+1)^2 - (2a_n - 7n^2) = 2(a_n + 7n + p) - 7(n+1)^2 - 2a_n + 7n^2 \\ &= 2a_n + 14n + 2p - 7(n^2 + 2n + 1) - 2a_n + 7n^2 = 14n + 2p - 7n^2 - 14n - 7 + 7n^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_{n+1} - b_n = 2p - 7 \quad (\checkmark)$$

ג. (1)

$$b_2 - b_1 = 3 \Rightarrow d = 2p - 7 = 3 \Rightarrow 2p = 10 \Rightarrow p = 5$$

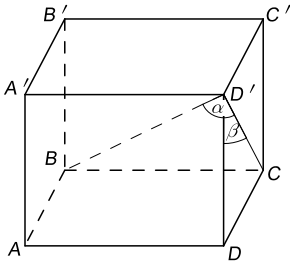
(2)

$$b_{20} = b_1 + 19d = (2 \cdot 4 - 7 \cdot 1^2) + 19 \cdot 3 = 1 + 57 = 58$$

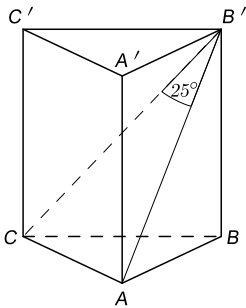
$$b_{20} = 2 \cdot a_{20} - 7 \cdot 20^2 = 58 \Rightarrow 2a_{20} = 58 + 7 \cdot 20^2 = 2858 \Rightarrow a_{20} = 1429$$

טריגונומטריה במרחב

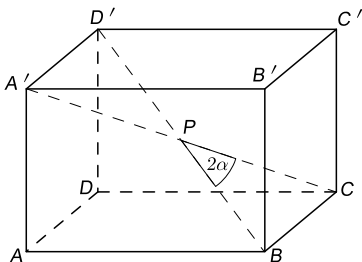
מנסרה - שאלות



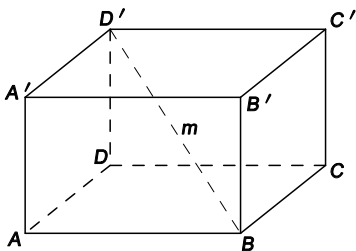
1. (4 יח', קיץ תשנ"א - 91) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$.
 CD' , אלכסון הפיאה $DCC'D'$, יוצר זווית α
 עם אלכסון התיבה BD' , ויוצר זווית β עם
 הפיאה $ADD'A'$. אורך האלכסון CD' הוא d .
 הבע את נפח התיבה באמצעות α , β ו- d . (55)



2. (4 יח', חורף תשנ"ה - 95)
 בסיסה של מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$
 הוא משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים.
 $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle CB'A = 25^\circ$, $AB = AC = 4 \text{ cm}$
 הסבר מדוע CA מאונך ל- AB' , וחשב את נפח המנסרה. (55)



3. (4 יח', קיץ תשנ"ח - 98)
 נתונה תיבה ריבועית $ABCD A'B'C'D'$.
 אורך צלע הבסיס הוא 10 ס"מ, וזווית
 בין אלכסוני התיבה, BD' ו- CA' , היא 2α .
 הבע את נפח התיבה באמצעות α . (56)



4. (4 יח', קיץ תשס"א - 2001)
 נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן $ABCD$.
 נתון: $\angle ABD = 30^\circ$, האלכסון $D'B = m$,
 הזווית בין האלכסון $D'B$ לבסיס היא 60° .
 בטא באמצעות m את נפח התיבה. (56)

את המספר הראשוני 2083 ניתן להציג באופן הבא:

$$2083 = \frac{7! - 6! - 5! - 4! - 3! - 2! - 1! - 0!}{2}$$

תהליך

3. $V = \frac{1000}{\sin \alpha} \sqrt{\cos 2\alpha} \text{ cm}^3$

1. $V = \frac{1}{2} d^3 \text{ tg } \alpha \sin 2\beta$ (יחידות קוב)

4. $V = \frac{3m^3}{32}$ (יחידות קוב)

2. $V = 60.71 \text{ cm}^3$

6. א. $AB \perp BC$ - נתון, $AB \perp BB'$ - המנסרה ישרה.

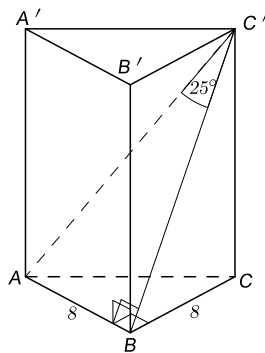
AB מאונך לשני ישרים במישור BCC' העוברים דרך עקבו (B) לכן הוא מאונך למישור BCC' .
אנך למישור מאונך לכל ישר במישור העובר דרך עקבו, בפרט ל- BC' . לכן:

$$AB \perp BC' \Rightarrow \angle C'BA = 90^\circ$$

$$\frac{AB}{BC'} = \frac{8}{BC'} = \operatorname{tg} 25^\circ \Rightarrow BC' = \frac{8}{\operatorname{tg} 25^\circ} = 17.16 \text{ cm}$$

$$h = CC' = \sqrt{C'B^2 - BC^2} = \sqrt{17.16^2 - 8^2} = 15.18$$

$$V = \frac{AB \cdot BC}{2} \cdot h = \frac{8 \cdot 8 \cdot 15.18}{2} \Rightarrow V = 485.76 \text{ cm}^3$$



ב.

ג.

אפס - רעיון מסוכן

ב-21 בספטמבר 1997, בעת שה'יורקטאון' הפליגה לאורך חופי ווירג'יניה, הודעוזה סיירת הטיילים, בשווי מיליארד דולר, ונעצרה. 'יורקטאון' מתה במקומה.

ספינות מלחמה תוכננו ונבנו כדי להחזיק מעמד מול מהלומות טורפדו או פיצוץ מוקשי ים, ואף שהיתה ממוגנת כנגד כלי נשק אלה, איש לא חשב להגן על 'יורקטאון' בפני האפס. היה זה משגה רציני.

זמן קצר לפני כן הותקנה במחשבי 'יורקטאון' תוכנה חדשה שנועדה לפקח על פעילות המנועים. לרוע המזל, איש לא גילה את פצצת הזמן האורבת בתוכנה, 'אפס' שהמהנדסים היו אמורים להרחיק בעת ההתקנה. מסיבה זו או אחרת, האפס לא התגלה, והוא נותר חבוי במעמקי התוכנה, חבוי עד לשלב שבו התוכנה העלתה אותו לזכרון - ונשקה.

כשמערכת המחשבים של 'יורקטאון' ניסתה לחלק באפס, מנועיה - בעלי עוצמה של 80,000 כוח סוס - שותקו מיידית. נדרשו כמעט שלוש שעות עבודה עד שמערכות ההפעלה לשעת חירום חוברו למנועים, וזאת כדי שספינת הקרב תצליח לקרטע לנמל הקרוב. מהנדסים עמלו יומיים כדי להיפטר מהאפס, לתקן את המנועים, ולהחזיר את 'יורקטאון' לכושרה הקרבי.

שום מספר אחר לא יכול היה לגרום לנזק שכזה. אך תקלות מחשב כמו שפגעו ב'יורקטאון' מודגימות רק מעט מכוחו של האפס. תרבויות שינסו מותניים כנגדו, ופילוסופיות קרסו תחת השפעתו, משום שהאפס שונה מכל המספרים האחרים. הוא מאפשר הצצה במשהו שכלל לא ניתן להעלות על הדעת, ובאינסוף. זו היתה הסיבה שכה חששו מפניו ושנאו אותו עד שהוא אף הוצא מחוץ לחוק.

(מתוך: 'אפס - ביוגרפיה של רעיון מסוכן' / צ'רלס זייף - הוצאת מי-אן)

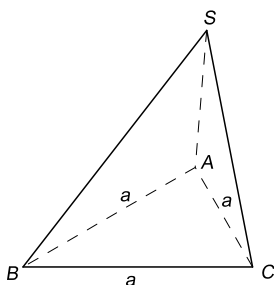
טריגונומטריה במרחב - פירמידה - שאלות

1. (4 יח', קיץ תשנ"ב - 92)

בפירמידה משולשת וישרה, $SABC$, הבסיס ABC הוא משולש שווה-צלעות שאורך צלעו a . הזווית שבין כל אחד מהמקצועות הצדדיים (SA , SB , SC) לבסיס הפירמידה הוא α . הבע באמצעות a ו- α את:

א. גובה הפירמידה (היורד מ- S לבסיס ABC).

ב. הגובה של כל אחת מהפיאות הצדדיות (SAB , SBC , SAC). (61)



2. (4 יח', חורף תשנ"ז - 96)

נתונה פירמידה משולשת $SABC$ משוכללת וישרה, שבסיסה משולש שווה-צלעות.

אורך מקצוע הבסיס הוא a , והמקצועות הצדדיים מאונכים זה לזה: $\angle BSA = \angle ASC = \angle BSC = 90^\circ$.

חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה. (61)

3. (4 יח', חורף תשנ"ז - 97)

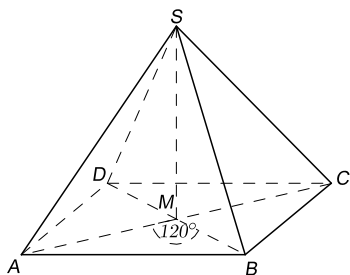
הבסיס של פירמידה ישרה $SABCD$ הוא מלבן $ABCD$.

כל אחד מהמקצועות הצדדיים של הפירמידה יוצר זווית של 30° עם מישור הבסיס.

הזווית בין אלכסוני המלבן היא של 120° .

גובה הפירמידה הוא 12 ס"מ SM .

א. חשב את אורך המקצוע AB . (62)



4. (4 יח', קיץ תשנ"ז - 97)

$ABCD$ היא פירמידה משוכללת וישרה שבסיסה - ריבוע.

הזווית בין המקצוע לבסיס היא בת 50° ואורך צלע הבסיס הוא 10cm .

מצא את גודל זווית הראש של הפאה BSC ($\angle BSC$). (62)

תשובות

3. א. $AB = 36\text{cm}$

1. א. $H = \frac{a\sqrt{3}\text{tg}\alpha}{3}$ ב. $SE = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4\text{tg}^2\alpha + 1}{3}}$ (י"א)

4. $\angle BSC = 54.06^\circ$

2. 35.26°

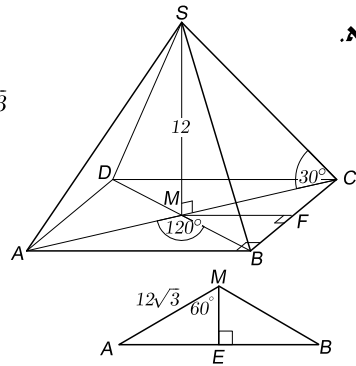
3. א.

$$\triangle SMC: \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{SM}{MC} = \frac{12}{MC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MC = \frac{3 \cdot 12}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$$

$$(1) MC = MA = MB = 12\sqrt{3}$$

$$\triangle AME: (6) \sin 60^\circ = \frac{AE}{12\sqrt{3}} \Rightarrow AE = 12\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

$$(2) AB = 2 AE = 2 \cdot 18 \Rightarrow AB = 36 \text{ cm}$$



4.

$$(5) SF \perp CD \Rightarrow (6) \angle CSF = \angle DSF = (7) = \alpha$$

$$\triangle BCD: (3) BD = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} \Rightarrow ED = \frac{\sqrt{200}}{2}$$

$$\triangle SED: \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{SE}{ED} = \frac{SE}{\frac{\sqrt{200}}{2}} \Rightarrow SE = \frac{\sqrt{200} \operatorname{tg} 50^\circ}{2} = 8.427$$

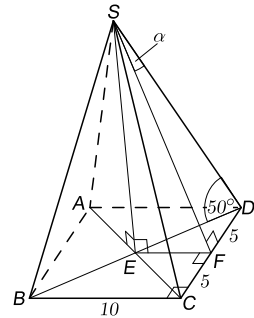
$$\triangle CED: (6) ED = EC, (7) EF \perp CD \Rightarrow CF = FD = 5$$

$$\triangle CEF: (8) EF \perp CD, (9) \angle ECF = \angle CEF = 45^\circ \Rightarrow (10) EF = FC = 5$$

$$\triangle SEF: (3) SF = \sqrt{SE^2 + EF^2} = \sqrt{8.427^2 + 5^2} = \sqrt{96.014} = 9.799$$

$$\triangle SFD: \operatorname{tg} \alpha = \frac{FD}{SF} = \frac{5}{9.799} = 0.51 \Rightarrow \alpha = 27.03^\circ$$

$$\angle CSD = 2\alpha = 2 \cdot 27.03^\circ, (11) \angle CSD = \angle BSC \Rightarrow \angle BSC = 54.06^\circ$$



(1) אלכסוני מלבן שווים זה לזה וחוצים זה את זה

(2) גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם תיכון (3) משפט פיתגורס

(5) בניית עזר (6) גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם חוצה-זווית (7) סימון

(8) אלכסוני ריבוע שווים זה לזה, חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה

(9) חישובי זווית במשולש (אלכסוני ריבוע חוצים את זוויותיו).

(10) משולש ששתיים מזוויות שוות זו לזו הוא משולש שווה-שוקיים

(11) הפאות הצדדיות חופפות זו לזו (צ-צ-צ) בגלל שהפירמידה משוכללת וישרה

$\triangle SAD$: (1) $SA = SD \Rightarrow \angle SDA =^{(2)} \angle SAD =^{(1)} 60^\circ$
 $\Rightarrow^{(3)} \angle ASD = 60^\circ \Rightarrow^{(4)} SA = SD = AD =^{(1)} 10_{cm}$

(4) $EF \perp AD \Rightarrow^{(5)} AF = FD = \frac{10}{2} = 5$

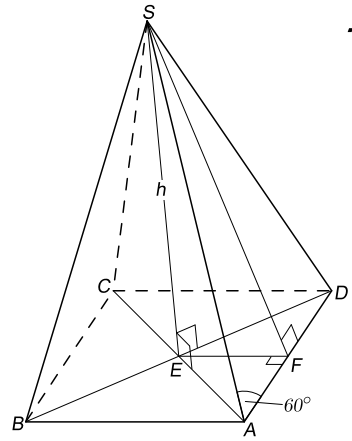
$\angle EFA = \angle FAB \Rightarrow EF \parallel AB \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AB = \frac{10}{2} = 5$

$\triangle AFE$: (6) $AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

$\triangle EFA$: (6) $EA = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

$\triangle SEA$: (6) $h = SE = \sqrt{SA^2 - EA^2} = \sqrt{10^2 - (\sqrt{50})^2} = \sqrt{50}$

$V = \frac{AB \cdot AD \cdot h}{3} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sqrt{50}}{3} = \frac{100 \cdot \sqrt{25 \cdot 2}}{3} = \frac{100 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}{3} \Rightarrow V = \frac{500\sqrt{2}}{3} = 235.7$ (יחידות קוב)



5

בניית עזר: גבהי משולש הבסיס (שהם גם אנכים אמצעיים), $SO \perp ABC$,

KD - גובה לבסיס במש"ש KBC (פאה צדדית)

(1) $BC = 12 \Rightarrow^{(7)} BD = DC = \frac{12}{2} = 6$

$\triangle ADC$: (6) $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108}$

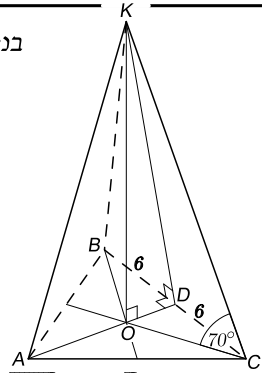
(8) $OD = \frac{\sqrt{108}}{3} = \sqrt{\frac{108}{9}} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

$\triangle ODC$: (6) $OC = \sqrt{CD^2 + OD^2} = \sqrt{36 + \frac{108}{9}} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$

$\triangle KOC$: $\text{tg } 70^\circ = \frac{KO}{OC} = \frac{KO}{4\sqrt{3}} \Rightarrow KO = 4\sqrt{3} \text{tg } 70^\circ$

$\triangle KOD$: $KD = \sqrt{OD^2 + KO^2} = \sqrt{12 + 48 \text{tg}^2 70^\circ} = 19.35$

$S = 3 \cdot S_{\triangle KBC} = 3 \cdot \frac{BC \cdot KD}{2} = 3 \cdot \frac{12 \cdot 19.35}{2} \Rightarrow S = 348.3 \text{ cm}^2$



6

(1) נתון (2) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו (3) השלמה ל- 180° במשולש

(4) משולש שכל זוויותיו שוות, הוא שווה-צלעות (4) בניית עזר

(5) אלכסוני ריבוע שווים זה לזה וחוצים זה את זה (6) משפט פיתגורס (4) נתון

(5) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו

(6) משולש שכל זוויותיו שוות זו לזו הוא שווה-צלעות

(7) גובה במשולש שווה-צלעות הוא גם תיכון

(8) נקודת מפגש התיכונים במשולש מחלקת אותם ביחס של 1:2 כשהחלק הגדול קרוב לקודקוד

1. א. (1)

$$y = (2x - 5)e^{2x}, \quad x = 0 \Rightarrow y = (-5) \cdot e^0 = (-5) \cdot 1 = -5 \Rightarrow (0, -5)$$

$$y = 0 \Rightarrow (2x - 5)e^{2x} = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow (2.5, 0)$$

(2)

$$y' = 2e^{2x} + (2x - 5) \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}(1 + 2x - 5) = 2e^{2x}(2x - 4) = 4e^{2x}(x - 2) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y'' = (4e^{2x}(x - 2))' = 4 \cdot 2e^{2x}(x - 2) + 1 \cdot 4e^{2x} = 4e^{2x}[2(x - 2) + 1] = 4e^{2x}(2x - 3)$$

$$y''(2) = 4e^{2 \cdot 2} \cdot (2 \cdot 2 - 3) = 4e^4 > 0 \Rightarrow x_{\min} = 2 \Rightarrow y_{\min} = (2 \cdot 2 - 5)e^4 = -e^4 \Rightarrow \min(2, -e^4)$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 5)e^{2x} = \infty \cdot \infty = \infty \Rightarrow \emptyset$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 5)e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 5)e^{2x} = \infty \cdot 0 = 0$$

הסבר אינטואיטיבי (עבור $-\infty$): גידול פונקציה מעריכית ב- $+\infty$ 'מהיר' יותר מבפולינום.

לכן גם ב- $-\infty$ היא תשאף ל-0 'בכח' גדול יותר מאשר הפולינום 'משוך' ל- $\pm\infty$.

מכאן שביטוי כמו שלנו ה- $e^{-\infty}$ יקבע את הגבול שהוא 0.

אפשר גם לבדוק במספרים גדולים במחשבון (וכנראה שזה מה שמצופה כאן מהנבחן).

ב-ג.

מהציון ברור כי עבור $k \geq 0$ הקו $y = k$ חותך את גרף

הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

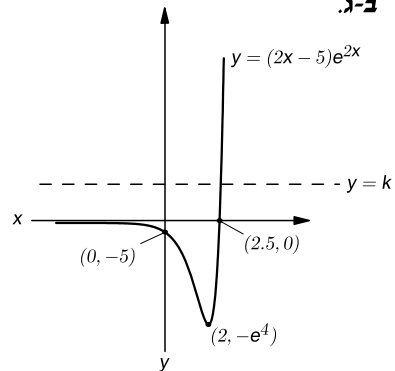
בכיוון שמאל הגרף אינו עובר את ציר x בגלל העדר

נקודות חיתוך נוספות.

בכיוון ימין אין נקודות חיתוך נוספת היות ואין נקודות

קיצון (מקסימום) נוספת שתאפשר ירידה של הפונקציה

לערך של k .



עיתונאי שלא למד בכיתה ו

ב-9.7.1996 הופיעה כתבה בעיתון 'הארץ' שקוננה על מיעוט השערים שהובקעו באליפות המונדיאל באותה שנה, שבה זכתה צרפת. נבחרת צרפת היתה צריכה לכבוש רק 8 שערים בכל המונדיאל, ממוצע של 1.14 שערים למשחק כדי לזכות באליפות. כל יבול השערים באותו מונדיאל היה נמוך באופן משמעותי לעומת התחרויות הקודמות. כותב המאמר חישב ומצא שכמות השערים באותו מונדיאל היתה נמוכה ב-234% (! ! !) מממוצע השערים של תחרויות המונדיאל בעשרים השנים האחרונות.

א .4

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^k}, \quad f'(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^{x^2} \cdot x^k - k \cdot x^{k-1} \cdot e^{x^2}}{x^{2k}} \Rightarrow f'(1) = \frac{2e - ke}{1} = 0 \Rightarrow 2e = ke \Rightarrow k = 2$$

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2} \Rightarrow x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2} \cdot x^2 - 2xe^{x^2}}{x^4} = \frac{2xe^{x^2}(x^2-1)}{x^4} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$\frac{-++}{+} = -$	0	$\frac{-+-}{+} = +$	\emptyset	$\frac{+++}{+} = -$	0	$\frac{+++}{+} = +$
$f(x)$	\searrow	min	\nearrow		\searrow	min	\nearrow

$$f(-1) = f(1) = \frac{e^1}{1} = e \Rightarrow \min(\pm 1, e)$$

א .5

$$y = x^2 \cdot e^{mx}, \quad y'(-1) = 0$$

$$y' = 2x \cdot e^{mx} + x^2 \cdot m \cdot e^{mx} \Rightarrow y'(-1) = -2e^{-m} + m \cdot e^{-m} \stackrel{?}{=} 0$$

$$e^{-m}(-2 + m) = 0, \quad e^{-m} > 0 \Rightarrow m = 2$$

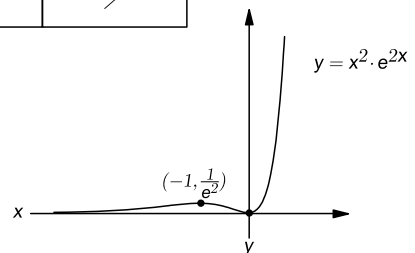
$$m = 2 \Rightarrow y = x^2 \cdot e^{2x}, \quad y = 0 \Rightarrow x^2 \cdot e^{2x} = 0, \quad e^{2x} > 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$y = x^2 \cdot e^{2x} \Rightarrow y' = 2x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot 2e^{2x} = 2x \cdot e^{2x}(1 + x) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 0$$

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$-+- = +$	0	$-++ = -$	0	$+++ = +$
$f(x)$	\nearrow	max	\searrow	min	\nearrow

$$f(-1) = 1 \cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow \max\left(-1, \frac{1}{e^2}\right)$$

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \Rightarrow \min(0, 0)$$



$$f(x) = \frac{3x^2 - 8x}{e^x}, \quad \forall x$$

ב.

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(3x - 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{3} \Rightarrow \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

ג.

$$f'(x) = \frac{(6x-8) \cdot e^{-x} - e^{-x}(3x^2-8x)}{e^{2x}} = \frac{(6x-8) - (3x^2-8x)}{e^x} = \frac{-3x^2+14x-8}{e^x} \stackrel{?}{=} 0$$

$$-3x^2 + 14x - 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-14 \pm 10}{-6} = \frac{7 \pm 5}{3} \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = \frac{2}{3}$$

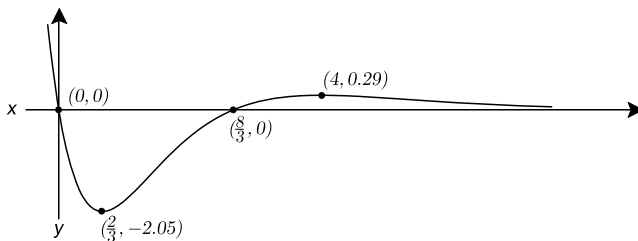
$$\Rightarrow -3x^2 + 14x - 8 = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 4) = (2 - 3x)(x - 4) \Rightarrow f'(x) = \frac{(2-3x)(x-4)}{e^x}$$

x		$\frac{2}{3}$		4	
y'	$\frac{+-}{+} = -$	0	$\frac{-+}{+} = +$	0	$\frac{-+}{+} = -$
y	\searrow	min	\nearrow	max	\searrow

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3 \cdot \frac{4}{9} - 8 \cdot \frac{2}{3}}{\sqrt[3]{e^2}} = \frac{4 - 16}{3 \sqrt[3]{e^2}} = \frac{-12}{3 \sqrt[3]{e^2}} = \frac{-4}{\sqrt[3]{e^2}} = -2.05 \Rightarrow \min\left(\frac{2}{3}, -2.05\right)$$

$$f(4) = \frac{3 \cdot 16 - 8 \cdot 4}{e^4} = \frac{48 - 32}{e^4} = \frac{16}{e^4} = 0.29 \Rightarrow \max(4, 0.29)$$

ד.



ה. $g'(x) = f(x)$

לכן: $g'(x) = 0$ עבור ה- x יים שבהן $f(x) = 0$, כלומר: עבור $x = 0$ ו- $x = \frac{8}{3}$.
 בנקודות אלו $f(x)$ מחליפה סימן (ראה ציור), לכן גם $g'(x)$ מחליפה בהן סימן.
 מסקנה: עבור ה- x יים האלו יש ל- $g(x)$ ערכי קיצון.

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{3}$$

ניסיתי להקליד את שיר המעלות במחשב ויצא לי ג'בריש. כנראה המחשב היה על רדיאנים. (נועם פרינץ)

חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות - שאלות

1. (4 יח', קיץ תשנ"א - 91) לפונקציה $y = x^m \ln x$ (m פרמטר) יש נקודת קיצון ב $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
א. מצא את m.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. (83)

2. (4 יח', קיץ תשנ"ה - 95) נתונה הפונקציה: $y = x \ln x - (a + 1)x$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הבע באמצעות a את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x.

ג. הוכח שלכל ערך של a יש לפונקציה נקודת מינימום בנקודה שבה $x = e^a$. (83)

3. (4 יח', קיץ תשנ"ח - 98) נתונה הפונקציה $y = \log(x^2 + 2x + 2) - 1$ (לוג בסיס 10).

מצא את: **א.** תחום ההגדרה **ב.** נקודות החיתוך עם ציר x **ג.** תחומי עליה וירידה

(84)

4. (4 יח', קיץ תשנ"ט - 99) נתונה הפונקציה $y = (\ln x)^2 - 2 \ln x$.

א. מצא את שתי נקודות החיתוך x_1 ו- x_2 ($x_1 < x_2$) של גרף הפונקציה עם ציר x.

ב. מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה בתחום $x_1 \leq x \leq x_2$.

(84)

5. (4 יח', חורף תשס"א - 2001) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$. מצא את:

א. תחום ההגדרה **ב.** נקודת הקיצון וסוגה **ג.** תחומי עליה וירידה (85)

132 הוא המספר הקטן ביותר השווה לסכום כל המספרים בני שתי ספרות

שניתן להרכיב מספרותיו: $132 = 13 + 32 + 21 + 31 + 23 + 12$

(ספר המספרים / דיוויד וולס - הוצאת מי-אן)

שאלות

1. **א.** $m = 2$ **ב.** $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$, $\underline{\hspace{1cm}}$: $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$, $x > 0$

2. **א.** $x > 0$ **ב.** $(e^{a+1}, 0)$

3. **א.** $\forall x$ **ב.** $(-4, 0)$ $(2, 0)$ **ג.** $x > -1$, $\underline{\hspace{1cm}}$: $x < -1$

4. **א.** $(e^2, 0)$ $(1, 0)$ **ב.** $y_{\min} = -1$, $y_{\max} = 0$

5. **א.** $(0 < x < 1) \cup (x > 1)$ **ב.** $\min(\sqrt{e}, 2e)$ **ג.** $x > \sqrt{e}$, $\underline{\hspace{1cm}}$: $(0 < x < 1) \cup (1 < x < \sqrt{e})$

17. א.

$$f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x}$$

$$(x^2 > 0) \cap (x \neq 0) \Rightarrow x \neq 0$$

ב.

$$y = 0 \Rightarrow \ln x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = e^0 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (\pm 1, 0)$$

ג.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x - 1 \cdot \ln x^2}{x^2} = \frac{2 - \ln x^2}{x^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 2 - \ln x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ln x^2 = 2 \Rightarrow e^2 = x^2 \Rightarrow x = \pm e$$

מכנה הנגזרת בנקודות החשודות חיובי. לכן, כדי לבדוק את סימן הנגזרת השנייה באותן נקודות,

מספיק לבדוק את סימן הנגזרת של מונה הנגזרת הראשונה באותן נקודות:

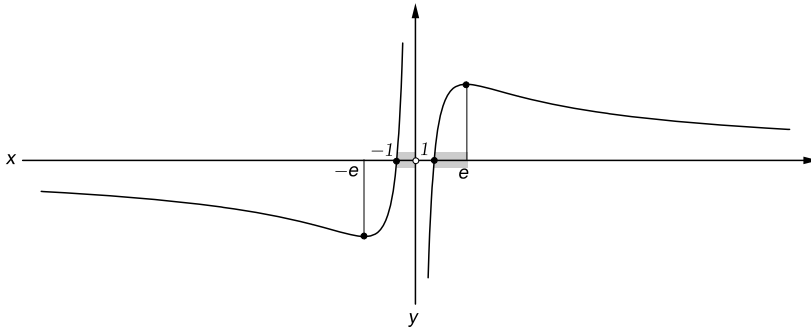
$$(2 - \ln x^2)' = -\frac{1}{x^2} \cdot 2x = -\frac{2}{x}, \quad -\frac{2}{e} < 0 \Rightarrow f''(e) < 0 \Rightarrow x_{\max} = e$$

$$-\frac{2}{-e} > 0 \Rightarrow f''(-e) > 0 \Rightarrow x_{\min} = -e$$

$$f(e) = \frac{\ln e^2}{e} = \frac{2}{e} \Rightarrow \max(e, \frac{2}{e})$$

$$f(-e) = \frac{\ln (-e)^2}{-e} = -\frac{2}{e} \Rightarrow \min(-e, -\frac{2}{e})$$

ד.



פונקציה שתי אסימפטוטות: $x = 0$ ו- $y = 0$ (לא נדרש, אבל מתבקש).

ה. הנגזרת חיובית בתחומים בהם הפונקציה עולה:

$$f(x) > 0: (-1 < x < 0) \cup (x > 1)$$

$$f'(x) > 0: (-e < x < 0) \cup (0 < x < e)$$

$$((-1 < x < 0) \cup (x > 1)) \cap ((-e < x < 0) \cup (0 < x < e)) \Rightarrow (-1 < x < 0) \cup (1 < x < e)$$

(באמת יותר נח לראות זאת בציור. התחום מסומן באפור.)

6. א.

$$f(x) = \sin x - \cos^2 x - 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$$

$$f'(x) = \cos x - 2 \cos x (-\sin x) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \cos x (1 + 2 \sin x) = 0$$

$$(1) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$(2) 1 + 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$(2_1) x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x = 0 \quad (\text{אין פתרונות בתחום הנתון})$$

$$(2_2) x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_3 = \frac{7\pi}{6}$$

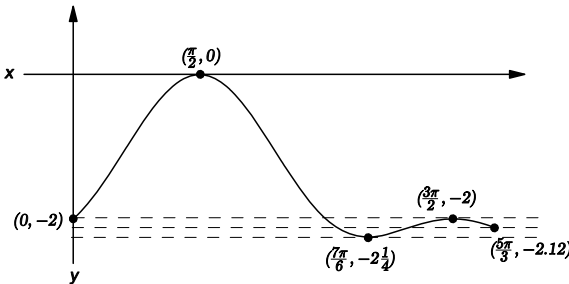
בדיקת ערך הפונקציה (y) בכל אחת מהנקודות בתחום שבהן הנגזרת מתאפסת,

ובנקודות הקצה:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 - 1^2 - 1 = -1 - 1 = -2 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 - 0^2 - 1 = 0 \\ f\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 1 = -2\frac{1}{4} \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= -1 - 0^2 - 1 = -2 \\ f\left(\frac{5\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} - 1 = -2.12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \min_{ab.} \left(\frac{7\pi}{6}, -2\frac{1}{4}\right), \quad \max_{ab.} \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

ב. גרף הפונקציה המבוקשת מוכרח מהנתונים שבסעיף א,

ללא צורך בכל חקירה נוספת.



תוכיח!

כריסטיאן גולדבך (Goldbach C., 1690 – 1764) היה פרופסור למתמטיקה והיסטוריה באוניברסיטת פטרסבורג

(רוסיה), מורם של ילדי הצאר.

גולדבך שיער כי כל מספר זוגי (פרט ל-2) ניתן לתיאור כסכום של שני מספרים ראשוניים.

דוגמאות: $8 = 5 + 3$, $112 = 53 + 59$, $250 = 11 + 239$.

מאז נבדקו כ-300,000 מספרים זוגיים, ולא נמצא מקרה שיטתור את הטענה.

מצד שני, גם לא נמצאה הוכחה לטענה זו למרות הנסיונות הרבים.

לכן, תכונה זו ידועה היום כ'**השערת גולדבך**' (בניגוד ל'משפט' - טענה המוכחת מתמטית).

$f(x) = \sin^2 x - 4 \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.א .7

$f'(x) = 2 \sin x \cos x - 4 \cos x = 2 \cos x (\sin x - 2) \stackrel{?}{=} 0$

(1) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

(2) $\sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = 2 \Rightarrow \emptyset \Leftarrow -1 \leq \sin x \leq 1$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		+-=-	0	---=+	0	+-=-	
y		\	min	/	max	\	

$\Rightarrow \searrow: (0 < x < \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi)$ $\nearrow: \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

$\sin^2 x - 4 \sin x = -1\frac{3}{4} = -\frac{7}{4} \cdot 4 \Rightarrow 4 \sin^2 x - 16 \sin x + 7 = 0$.ב

$(\sin x)_{1,2} = \frac{16 \pm 12}{8} = \frac{4 \pm 3}{2} \Rightarrow (\sin x)_1 = \frac{7}{2} \Rightarrow \emptyset \Leftarrow -1 \leq \sin x \leq 1$

$(\sin x)_2 = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$, $y = -1\frac{3}{4} \Rightarrow (\frac{\pi}{6}, -1\frac{3}{4})$

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{6}$, $y = -1\frac{3}{4} \Rightarrow (\frac{5\pi}{6}, -1\frac{3}{4})$

.א .8

$f(x) = \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{3}$, $\pi < x < 2\pi$

$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \frac{x}{3} = \frac{3}{4} \approx \sin 49^\circ$

(1) $\frac{x}{3} = 49^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = 147^\circ + 1080^\circ k \Rightarrow x = \emptyset \Leftarrow 180^\circ < x < 360^\circ$

(2) $\frac{x}{3} = \underset{180^\circ - 49^\circ}{131^\circ} + 360^\circ k \Rightarrow x = 393^\circ + 1080^\circ k \Rightarrow x = \emptyset \Leftarrow 180^\circ < x < 360^\circ$

כלומר: הנגזרת אינה מתאפסת באף לא נקודה אחת בתחום הנתון.

לכן היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת בכל התחום.

נבחר נקודה בתחום הנתון, למשל: $x = \frac{3\pi}{2}$, ונבדוק את סימן הנגזרת בה:

$f'(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \sin \frac{3\pi}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{12} < 0 \Rightarrow f \searrow \forall \{\pi < x < 2\pi\}$ (✓)

$f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2 \cdot 4} + \cos \frac{3\pi}{2 \cdot 3} = \frac{3\pi}{8} + 0 = \frac{3\pi}{8}$, $f'(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{1}{12}$.ב

$y - \frac{3\pi}{8} = -\frac{1}{12}(x - \frac{3\pi}{2}) = -\frac{1}{12}x + \frac{\pi}{8} \Rightarrow y = -\frac{1}{12}x + \frac{4\pi}{8} \Rightarrow y = -\frac{1}{12}x + \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \sin 2x - 2 \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 - 2 \cdot 1 = -2 \Rightarrow (0, -2)$$

$$y = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos x (\sin x - 1) = 0$$

$$(1) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$$

$$(2) \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$$

ב

$$f'(x) = 2 \cos 2x + 2 \sin x \Rightarrow f'(x) = 2(1 - 2 \sin^2 x + \sin x) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow (1) \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_2 = \frac{11\pi}{6}$$

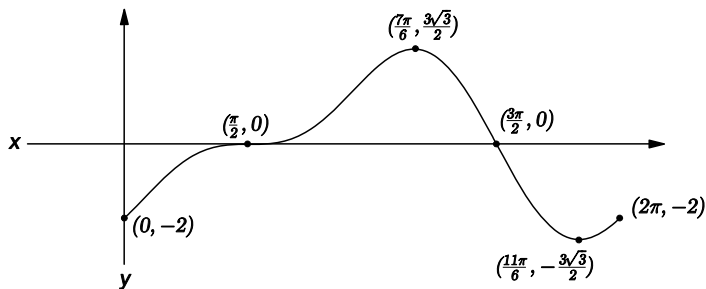
$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_3 = \frac{7\pi}{6}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
f'		+	0	+	0	-	0	+	
f	min	↗	infl.	↗	max	↘	min	↗	max

$$f(2\pi) = 0 - 2 = -2, \quad f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

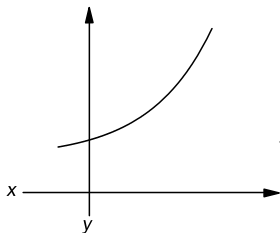
$$\Rightarrow \min_{ep}: (0, -2), \quad \max: \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \quad \min: \left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \quad \max_{ep}: (2\pi, -2)$$

ג



חשבון אינטגרלי

פונקציות מעריכיות - שאלות



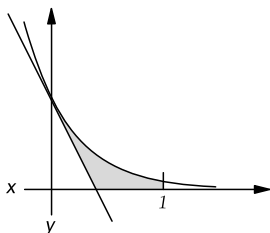
1. (4 יח', קיץ תש"ן - 90)

נתונה הפונקציה $y = 2 + e^x$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x = 1$.

ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה,

על-ידי המשיק ועל-ידי ציר y . (132)

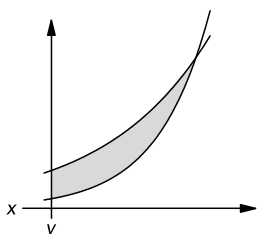


2. (4 יח', חורף תשנ"ד - 94)

מצא את השטח המוגבל על-ידי הפונקציה $f(x) = e^{-3x}$,

על-ידי הישר המשיק לגרף בנקודה שבה $x = 0$,

על-ידי ציר x ועל-ידי הישר שמשוואתו $x = 1$. (132)

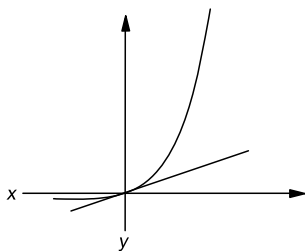


3. (קיץ תשנ"ה - 95)

נתונות הפונקציות: $f(x) = 4^x$, $g(x) = 4 \cdot 2^x$.

מצא את השטח המוגבל על-ידי הגרפים של שתי הפונקציות

ועל-ידי ציר y . (133)



4. (4 יח', חורף תשנ"ז - 96)

נתונה הפונקציה $y = e^{2x} - e^x$.

א. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.

ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה,

על-ידי המשיק ועל-ידי הישר $x = 1$. (133)

השאלות

1. א. $y = ex + 2$ ב. $S = \frac{e}{2} - 1 = 0.36$ (יחידות ריבועיות)

2. $S = \frac{1}{6} - \frac{1}{3e^3} = 0.15$ (יחידות ריבועיות)

3. $S = \frac{9}{\ln 4} = 6.49$ (יחידות ריבועיות)

4. א. $y = x$ ב. $S = \frac{e^2}{2} - e = 0.9762$ (יחידות ריבועיות)

13. א.

הפונקציה $f(x) = e^x$ עולה בכל תחום הגדרתה.

הפונקציה $g(x) = e^{-x}$ יורדת בכל תחום הגדרתה.

הן נפגשות על ציר y : $e^0 = e^{-0} = 1$

AB: $x_A = x_B \Rightarrow AB = y_A - y_B = e^a - e^{-a} = 1.5$

$$e^a - \frac{1}{e^a} - \frac{3}{2} = 0 \quad / \cdot 2e^a \Rightarrow 2(e^a)^2 - 3e^a - 2 = 0$$

$$(e^a)_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow (e^a)_1 = 2 \Rightarrow \ln e^a = \ln 2 \Rightarrow a = \ln 2$$

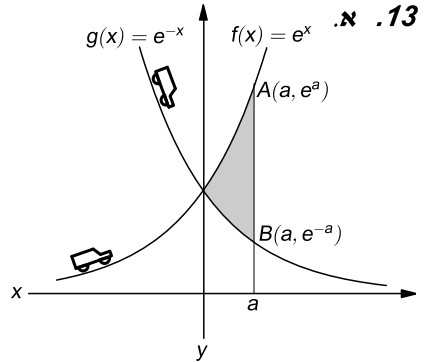
$$(e^a)_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \emptyset \Leftarrow e^x > 0 \quad \forall x$$

ב.

$$a = \ln 3 \Rightarrow S = \int_0^{\ln 3} (e^x - e^{-x}) dx = (e^x + e^{-x}) \Big|_0^{\ln 3}$$

$$S = (e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}) - (e^0 + e^0)$$

$$e^{-\ln 3} = e^{\ln 3^{-1}} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow S = (3 + \frac{1}{3}) - (1 + 1) \Rightarrow S = 1\frac{1}{3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$



14. א.

$$f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}, \quad f'(x_A) = \frac{e^2}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x+1}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{e^2}{2} \Rightarrow \frac{x+1}{2} = 2 \Rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = e^{\frac{3+1}{2}} = e^2 \Rightarrow A(3, e^2)$$

ב.

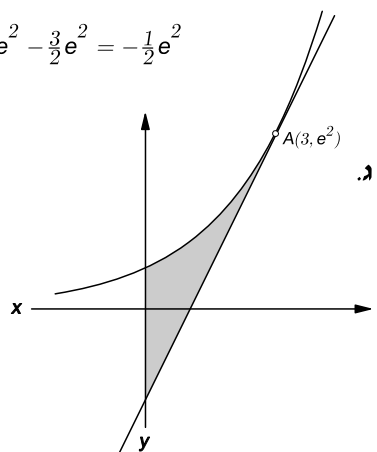
$$y = \frac{e^2}{2}x + n, \quad A(3, e^2) \Rightarrow e^2 = \frac{e^2}{2} \cdot 3 + n \Rightarrow n = e^2 - \frac{3}{2}e^2 = -\frac{1}{2}e^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{e^2}{2}x - \frac{e^2}{2}$$

$$S = \int_0^3 (e^{\frac{x+1}{2}} - (\frac{e^2}{2}x - \frac{e^2}{2})) dx = (2e^{\frac{x+1}{2}} - \frac{e^2}{4}x^2 + \frac{e^2}{2}x) \Big|_0^3$$

$$= (2e^2 - \frac{9}{4}e^2 + \frac{3}{2}e^2) - (2e^{\frac{1}{2}} - 0 + 0)$$

$$\Rightarrow S = \frac{5}{4}e^2 - 2\sqrt{e} = 5.94 \text{ (יחידות ריבועיות)}$$



חשבון אינטגרלי - פונקציות טריגונומטריות - פתרונות

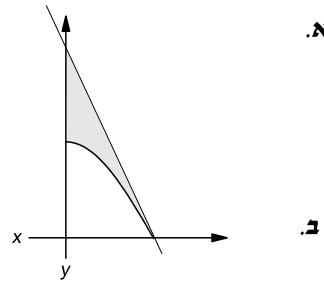
$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$y' = -2 \sin 2x \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cdot 1 = -2$$

$$-2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = y - 0 \Rightarrow y = -2x + \frac{\pi}{2}$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-2x + \frac{\pi}{2} - \cos 2x\right) dx = \left(-x^2 + \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$S = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} - 0 \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = 0.1169 \text{ (יחידות ריבועיות)}$$



$$y = 3 \cos 3x, \quad 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$y_B = 0 \Rightarrow 3 \cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

$$k = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$k = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

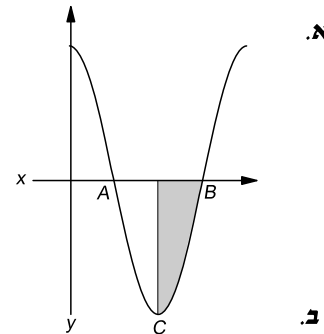
$$y' = 3 \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = -9 \sin 3x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

$$k = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad k = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{3}, \quad k = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{2\pi}{3}$$

$$0 < x_C < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x_C = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y_C = 3 \cos \pi = -3 \Rightarrow C\left(\frac{\pi}{3}, -3\right)$$

$$(y'' = -27 \cos 3x \Rightarrow y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -27 \cos \pi = -27 \cdot (-1) > 0 \Rightarrow \min (\checkmark) \text{ :לא נדרש})$$

$$S = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos 3x \, dx = -\left(3 \cdot \frac{1}{3} \sin 3x\right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin 3x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ = (-\sin \frac{3\pi}{2}) - (-\sin \pi) = -(-1) + 0 \Rightarrow S = 1 \text{ (יחידה ריבועית)}$$



לא יכול להיות

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1 \text{ :התבונן על המשוואה: } a, b, c$$

אם נציב במקום את a , או את b , או את c , נקבל זהות. מכאן שלמשוואה זו יש שלושה פתרונות: a, b, c .

אבל משוואה זו היא ריבועית, ולמשוואה ריבועית יש לכל היותר שני פתרונות. איך זה יכול להיות?

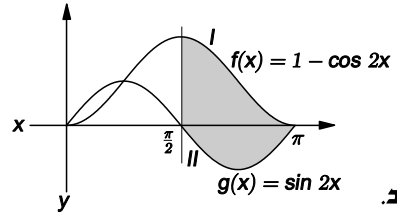
פשט את הביטוי, או - יותר קל: הצב מספרים כלשהם במקום a, b, c ומצא את התשובה לכך בעצמך.

26. א. ל- $f(x)$ יש רק שתי נקודות (בתחום הנתון) שבהן ערכה הוא 0. מתאים לגרף I:

$$f(x) = 1 - \cos 2x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \cos 2x = 1$$

$$2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pi$$

$$\Rightarrow I \leftrightarrow f(x), II \leftrightarrow g(x)$$



$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 - \cos 2x = \sin 2x \Rightarrow 1 - (1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin x \cos x$$

$$2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$(1) \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pi$$

$$(2) \cos x = \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow x = \pm(\frac{\pi}{2} - x) + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x_3 = \frac{\pi}{4}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \emptyset$$

ג.

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} ((1 - \cos 2x) - \sin 2x) dx = (x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$S = (\pi - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1) - (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-1)) = \pi + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow S = 1 + \frac{\pi}{2} = 2.57 \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

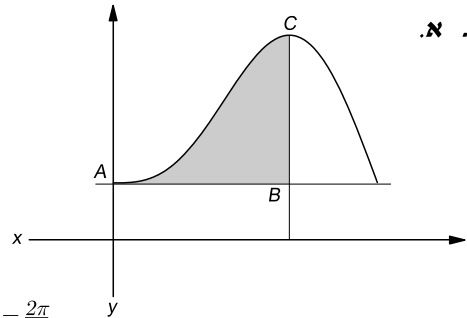
$$f(x) = 2 \sin x - \sin 2x + k, 0 \leq x \leq \pi$$

$$f'(x) = 2 \cos x - 2 \cos 2x \stackrel{?}{=} 0 \quad / : 2$$

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = \pm x + 2\pi k$$

$$(1) x = 2\pi k \Rightarrow x_1 = 0$$

$$(2) 3x = 2\pi k \Rightarrow x = \frac{2\pi k}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{2\pi}{3}$$



27. א.

$$f''(x) = -2 \sin x + 4 \sin 2x \Rightarrow f''(\frac{2\pi}{3}) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) < 0 \Rightarrow x_{\max} = \frac{2\pi}{3}$$

ב.

$$x_A = 0, f(0) = k \Rightarrow \underline{AB}: y = k$$

ג.

$$S = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (2 \sin x - \sin 2x + k - k) dx = (-2 \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x) \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$S = (-2 \cdot (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})) - (-2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1) = 1 - \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow S = 2\frac{1}{4} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

מבנה מבחן הבגרות לשאלון 842 (805)

שאלון ד' (35804) מהווה 65% מהציון הסופי.

שאלון ה' (35805) מהווה 35% מהציון הסופי.

משך זמן המבחן: שעה ושלושה רבעים.

פרק א - בחירה: שאלה אחת מתוך שתי שאלות.

סדרות, טריגונומטריה במרחב.

פרק ב - בחירה: שתי שאלות מתוך 3 שאלות.

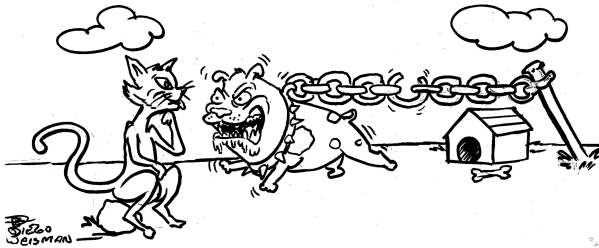
בעיות גדילה ודעיכה, חדר"א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות חזקה (עם מעריך רציונלי),

פונקציות מעריכיות, פונקציות לוגריתמיות.

הערה חשובה:

מבנה זה מיושם החל ממועד חורף תשע"ג, ולכן מבנה כל המבחנים עד מועד זה המובאים בפרק זה,

שונים מהמבנה לעיל.



מגדל של פלינדרומים ראשוניים

2

30203

133020331

1713302033171

12171330203317121

151217133020331712151

1815121713302033171215181

16181512171330203317121518161

31618151217133020331712151816133

9333161815121713302033171215181613339

11933316181512171330203317121518161333911

(Garland Lee Honaker, מרצה למתמטיקה בוירג'יניה, ארה"ב)

לא ידוע אם יש אינסוף פלינדרומים ראשוניים.

מבחן 1 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד א

בחירה: שלוש שאלות מתוך ארבע.

גדילה ודעיכה

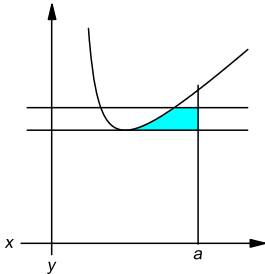
1. מ' 100gr חומר רדיואקטיבי I נשארו כעבור 4 שנים 72gr שלא התפרקו.

א. מצא את זמן מחצית החיים של חומר I.

זמן מחצית חיים של חומר רדיואקטיבי II גדול פי 2 מזמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי I.

ב. מצא באיזה אחוז קטנה כל שנה כמות החומר II.

ג. מצא את הכמות של חומר II שממנה יישארו 80gr כעבור 4 שנים.



חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

2. נתונה הפונקציה $y = x + \frac{4}{x-1}$ בתחום $x > 1$.

העבירו לגרף הפונקציה משיק שמשוואתו $y = 5$,

והעבירו ישר המקביל למשיק ונמצא מעליו

במרחק יחידה אחת ממנו.

א. מצא את השיעורים של נקודת ההשקה של המשיק לגרף הפונקציה.

ב. השטח, המוגבל על ידי שני הישרים המקבילים, על ידי גרף הפונקציה

ועל ידי הישר $x = a$, שווה ל- $4 \ln 2 - 1$. מצא את הערך של a .

3. בעית קיצון. לא בחומר.

טריגונומטריה במרחב

4. נתונה פירמידה ישרה SABCD

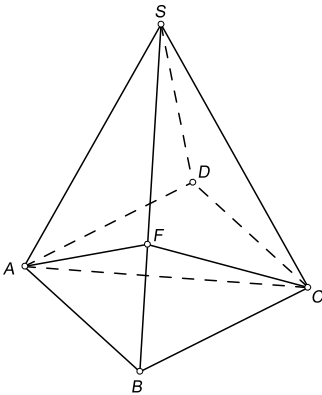
שבסיסה ABCD הוא ריבוע.

אורך צלע הריבוע הוא 10cm,

ואורך המקצוע הצדדי של הפירמידה הוא 13cm.

א. חשב את הגובה AF למקצוע SB בפאה SAB.

ב. לא בחומר (זווית בין מישורים).



בהצלחה

כותב היצורים שמונה למדינת ישראל · אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט



2. א. (3, 5) ב. a = 6

1. א. 8.44years ב. 4.02% ג. 94.27gr

4. א. AF = 9.23cm

פתרון מבחן 1

א. 1.

$$m_0 = 100, m_4 = 72 \Rightarrow 72 = 100 \cdot a^4 \Rightarrow a^4 = 0.72 \Rightarrow a = 0.9212$$

$$m_0 = 1, m_t = 0.5, t = ? \Rightarrow 0.5 = 1 \cdot 0.9212^t \Rightarrow t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.9212} \Rightarrow t = 8.44 \text{ years}$$

ב.

$$m_0 = 1, m_t = 0.5, t = 2 \cdot 8.44 = 16.89 \Rightarrow 0.5 = 1 \cdot a^{16.89} \Rightarrow a = 0.9598$$

$$a = 0.9598 = 1 - \frac{p}{100} / -1 \Rightarrow -\frac{p}{100} = -0.0402 \Rightarrow p = 4.02 \Rightarrow 4.02\%$$

ג.

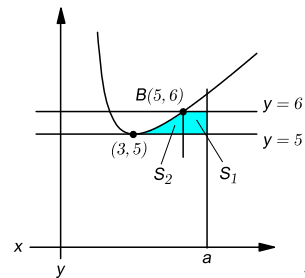
$$m_0 = ?, m_4 = 80, a = 0.9598 \Rightarrow 80 = m_0 \cdot 0.9598^4 \Rightarrow m_0 = 94.27 \text{ gr}$$

א. 2.

$$y = 5 \Rightarrow x + \frac{4}{x-1} = 5 \Rightarrow x(x-1) + 4 = 5(x-1)$$

$$x^2 - x + 4 = 5x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3, 5)$$



ב.

$$\underline{B}: y = 6 \Rightarrow x + \frac{4}{x-1} = 6 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 6x - 6$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow B(5, 6)$$

$$S_1 = (a - 5) \cdot 1 = a - 5$$

$$S_2 = \int_3^a \left(x + \frac{4}{x-1} - 5\right) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 4 \ln |x-1| - 5x\right) \Big|_3^a = \left(\frac{25}{2} + 4 \ln 4 - 25\right) - \left(\frac{9}{2} + 4 \ln 2 - 15\right)$$

$$S_2 = -2 + 4 (\ln 4 - \ln 2) = -2 + 4 \ln 2 = -2 + 4 \ln 2$$

$$S = S_1 + S_2 = (a - 5) + (-2 + 4 \ln 2) = a - 7 + 4 \ln 2$$

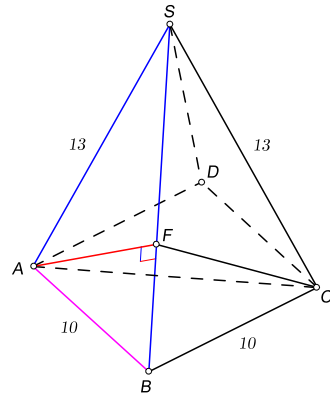
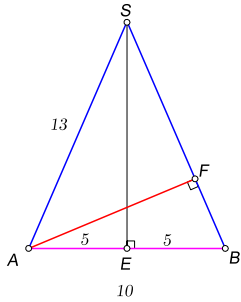
$$S = 4 \ln 2 + a - 7 = 4 \ln 2 - 1$$

נתון

$$\Rightarrow a - 7 = -1 \Rightarrow a = 6$$

מצא שלושה מספרים a, b, c כך ש: $a + b + c + ab + ac + bc + abc = 1000$

תשובה (בצופן א"ת ב"ש): כב באמי זבגצ זכג



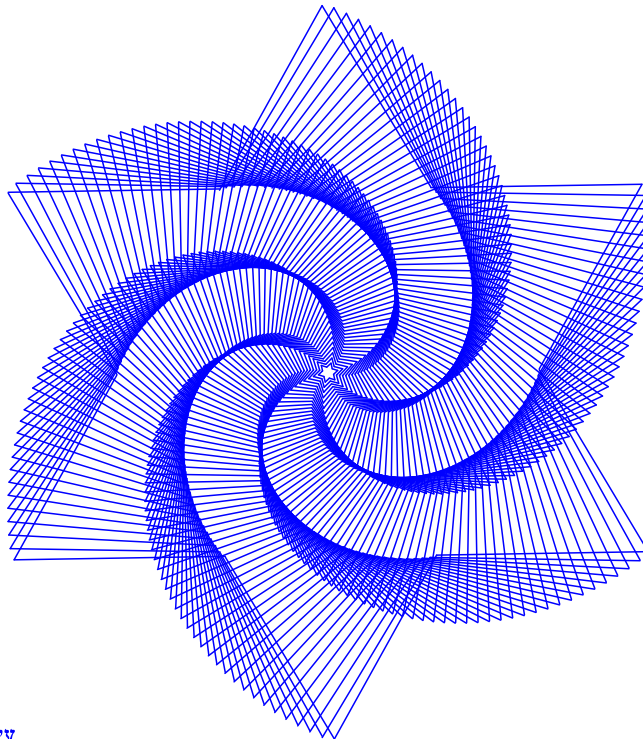
$$(1) SE \perp AB \Rightarrow^{(2)} EB = \frac{10}{2} = 5$$

$$\triangle SEB: (3) SE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \Rightarrow \frac{12}{5} = \operatorname{tg} \angle B \Rightarrow \angle B = 67.38^\circ$$

$$\triangle AFB: \frac{AF}{10} = \sin 67.38^\circ \Rightarrow AF = 9.23 \text{ cm}$$

(1) בניית עזר (2) גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם תיכון (3) משפט פיתגורס

לכבוד שבעים השנים הראשונות (70 מגיני דוד)



עיצוב: אלי מיטב

מבחן 45 - קיץ תשפ"א - 2021 - מועד ב

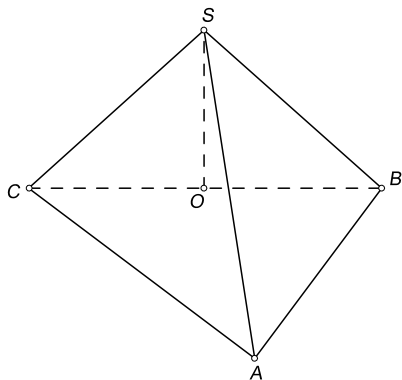
בחירה: שלוש שאלות מהשאלות 1-5.

פרק ראשון - סדרות, טריגונומטריה במרחב

סדרות

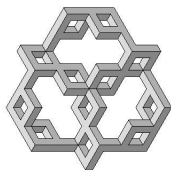
1. דניאלה קנתה מקרר בתשלומים חודשיים. התשלום הראשון הוא 700 שקלים, ולאחר מכן כל תשלום נמוך ב-30 שקלים מן התשלום שלפניו.
- א. מהו מספר התשלום שבו תשלם דניאלה 280 שקלים?
- ב. (1) האם יתכן שהתשלום האחרון שהיא תשלם יהיה תשלום מספר 29? נמק.
- (2) מהו התשלום הנמוך ביותר האפשרי בסדרת התשלומים של דניאלה ומהו מספר התשלום?
- נעמה קנתה מקרר באותו המחיר שבו קנתה דניאלה את המקרר שלה, אך שילמה עליו ב-30 תשלומים חודשיים שווים של 280 שקלים כל תשלום.
- ג. בכמה תשלומים קנתה דניאלה את המקרר שלה?

טריגונומטריה במרחב



2. נתונה פירמידה ישרה SABC, שבסיסה ABC הוא משולש ישר-זווית: $\angle CAB = 90^\circ$.
 $AB = 9$, $AC = 12$.
 הזווית שבין המקצוע הצדדי SB ובין הבסיס ABC שווה ל- 30° .
- א. חשב את גובה הפירמידה, SO.
- ב. חשב את נפח הפירמידה.
- נתון: נקודה M היא אמצע הצלע AB.
- נקודה E נמצא על הקטע OM כך שמתקיים: $OE = 2 \cdot EM$.
- ג. מצא את גודל הזווית שבין SE לבסיס הפירמידה.
- ד. חשב את שטח המשולש SEM.

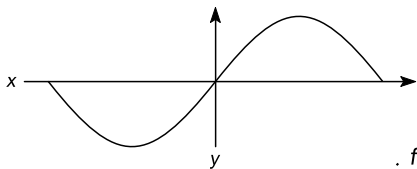
תולדות



1. א. $n = 15$ ב. (1) לא (2) $a_{24} = 10$ ג. 21 (תשלומים)
2. א. $SO = 2.5\sqrt{3}$ (יחידות אורך) ב. $V = 45\sqrt{3}$ (יחידות קוב) ג. $\angle SEO = 47.27^\circ$ ד. $S_{\triangle SEM} = 2.5\sqrt{3}$ (יחידות ריבועיות)

פרק שני - גדילה ודעיכה, חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה

3. הפונקציה $f(x)$ ופונקצית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.



בסרטוט מתואר הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$.

הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר x

בשלוש נקודות בדיוק: $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נתון: $f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}$.

ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר x

הנמצאת מימין לראשית הצירים, ומשיק נוסף בנקודת המינימום שלה.

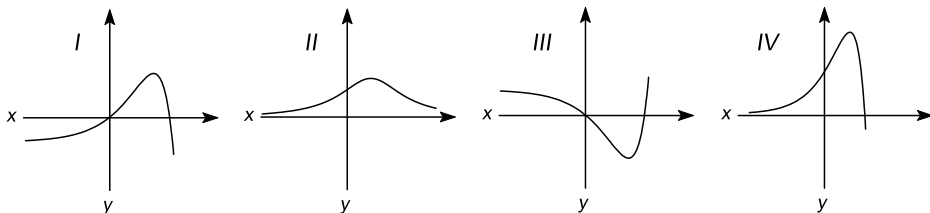
ה. מצא את שיעורי נקודת המפגש של שני המשיקים.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = -e^{2x} + 4e^x - 3$ המוגדרת לכל x .

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ג. אחד הגרפים להלן מתאר את גרף הפונקציה. קבע איזה מהם הוא זה. נמק.



העבירו משיק לגרף הפונקציה $g(x) = f(x) + b$ (הוא פרמטר) בנקודת הקיצון שלה.

ד. מצא את משוואת המשיק (הבע באמצעות b).

ה. מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על-ידי המשיק שמצאת בסעיף ד

ועל-ידי ציר y .



3. א. $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$; ב. $x_{\min} = 0$, $x_{\max \text{ ep.}} = \pm \frac{\pi}{2}$

ג. $(\pm \frac{\pi}{6}, 0)$, $(0, -\frac{1}{4})$; ה. $(0.23, -0.25)$

4. א. $(0, 0)$, $(\ln 3, 0)$; ב. $\max(\ln 2, 1)$; ג. l ; ד. $y = 1 + b$; ה. $S = -2\frac{1}{2} + \ln 16 = 0.27$ (י"ר)

5. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x \cdot \ln ax$. $a > 0$. הוא פרמטר.
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- נתון כי לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = \frac{1}{3e}$.
- ב. מצא את ערך הפרמטר a .
- הצב $a = 3$ וענה על הסעיפים להלן.
- ג. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x .
- ד. מצא את שיעור y של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוג הקיצון.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. נתונה הפונקציה $g(x)$ שתחום הגדרתה זהה לתחום הגדרתה של הפונקציה $f(x)$. פונקצית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת: $g'(x) = -f(x)$. האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון? אם כן - מצא את שיעור x של נקודת הקיצון של $g(x)$, וקבע את סוגה. אם לא - נמק.

בהצלחה

זכות היצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

ניתן להציג כל מספר שלם על-ידי שימוש בשלוש פעמים המספר 2, ללא שימוש ב-' :

$$0 = \frac{\ln \frac{2}{2}}{2}$$

$$1 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{2}}}{\ln 2}, \quad -1 = \frac{\ln \frac{\ln \sqrt{2}}{\ln 2}}{\ln 2}$$

$$2 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{\sqrt{2}}}}{2}, \quad -2 = \frac{\ln \frac{\ln \sqrt{\sqrt{2}}}{\ln 2}}{\ln 2}$$

$$3 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}{2}, \quad -2 = \frac{\ln \frac{\ln \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}{\ln 2}}{\ln 2}$$

⋮



5. א. $x > 0$ ב. $a = 3$ ג. $(\frac{1}{3}, 0)$ ד. $y_{\min} = -\frac{1}{e}$ ו. $x_{\max} = \frac{1}{3}$

פתרון מבחן 45

1. א.

$$a_1 = 700, d = -30, a_n = 280 \Rightarrow 280 = 700 - 30(n-1) / -700$$

$$\Rightarrow -420 = -30(n-1) / : (-30) \Rightarrow n-1 = 14 \Rightarrow n = 15$$

ב. (1)

$$a_{29} = 700 - 30 \cdot 28 = 700 - 840 < 0 \Rightarrow \text{לא}$$

(2)

$$a_n = 700 - 30(n-1) = 700 - 30n + 30 = 730 - 30n > 0 \Rightarrow 30n < 730 \Rightarrow n < 24\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow n = 24 \Rightarrow a_{24} = 700 - 30 \cdot 23 = 700 - 690 \Rightarrow a_{24} = 10_{sh}$$

ג.

$$S = 280 \cdot 30 = 8,400 \Rightarrow \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot 700 - 30(n-1)) = 8400 \Rightarrow n(700 - 15n + 15) = 8400$$

$$715n - 15n^2 = 8400 / : 5 \Rightarrow 3n^2 - 143n + 1680 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{143 \pm \sqrt{20449 - 20160}}{6} = \frac{143 \pm 17}{6}$$

$$n_1 = \frac{160}{6} = 26\frac{2}{3}, n_2 = \frac{126}{6} = 21 \Rightarrow n = 21 \text{ (תשלומים)}$$

2. א.

קֶבֶב גובה פירמידה ישרה שבסיסה משולש,

הוא מרכז המעגל החוסם את משולש הבסיס.

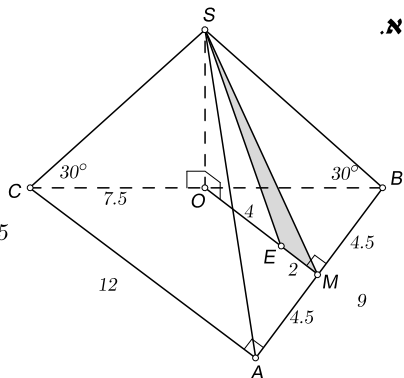
במקרה שלנו, מרכז המעגל החוסם משולש ישר-זווית

הוא אמצע היתר של משולש ABC : $BO = CO$.

$$\underline{\triangle ABC}: BC = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \Rightarrow BO = CO = 7.5$$

$$\underline{\triangle SOC}: \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{SO}{7.5} \Rightarrow SO = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot 7.5$$

$$SO = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 7.5 \Rightarrow SO = 2.5\sqrt{3} \text{ (יחידות אורך)}$$



ב.

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 9}{2} \cdot 2.5\sqrt{3} \Rightarrow V = 45\sqrt{3} \text{ (יחידות קוב)}$$

ג.

$$OM = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow OE = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

$$\underline{\triangle SOE}: \operatorname{tg} \angle SEO = \frac{SO}{OE} = \frac{2.5\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \angle SEO = 47.27^\circ$$

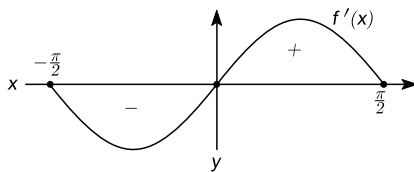
ד.

$$EM = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2, h_{\triangle SEM} = SO = 2.5\sqrt{3} \Rightarrow S_{\triangle SEM} = \frac{2 \cdot 2.5\sqrt{3}}{2} = 2.5\sqrt{3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

(1) פיתגורס (2) קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע השלישית

3. א-ב.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f'	0	-	0	+	0
f	max _{ep.}	↘	min	↗	max _{ep.}



$\Rightarrow \searrow: -\frac{\pi}{2} < x < 0$, $\nearrow: 0 < x < \frac{\pi}{2}$, $x_{\max_{ep.}} = \pm \frac{\pi}{2}$, $x_{\min} = 0$

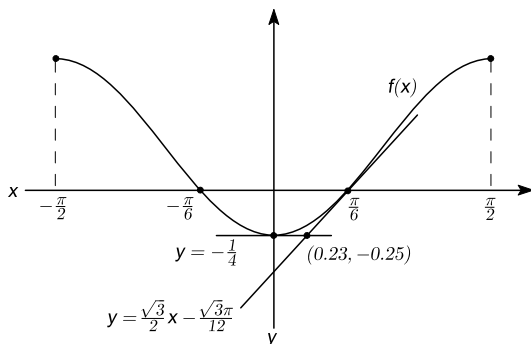
$f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}$, $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \Rightarrow (0, -\frac{1}{4})$, $y = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}$

(1) $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow (1_1) x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow (\frac{\pi}{6}, 0)$

(1₂) $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow$ לא בתחום

(2) $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow (2_1) x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow (-\frac{\pi}{6}, 0)$

(2₂) $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow$ לא בתחום



$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow m = f'(\frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(\frac{\pi}{6}, 0) \Rightarrow y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ המשיק בנקודת החיתוך

min $(0, -\frac{1}{4}) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$ המשיק בנקודת המינימום

$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.23 \Rightarrow (0.23, -0.25)$

מרשם להכנת יין: נכנס סוד - יצא יין ...

4. א.

$$f(x) = -e^{2x} + 4e^x - 3, \quad y = 0 \Rightarrow -(e^x)^2 + 4e^x - 3 = 0$$

$$(e^x)_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} \Rightarrow (e^x)_1 = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$(e^x)_2 = 3 \Rightarrow x = \ln 3 \Rightarrow (\ln 3, 0)$$

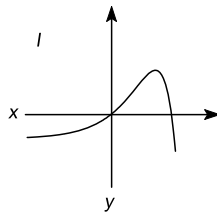
ב.

$$f'(x) = -2e^{2x} + 4e^x = -2e^x(e^x - 2) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow e^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \ln 2$$

x		ln 2	
f'	- + - - +	0	- + + - -
f	↗	max	↘

$$f(\ln 2) = -(e^{\ln 2})^2 + 4e^{\ln 2} - 3$$

$$= -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1 \Rightarrow \max(\ln 2, 1)$$



ג. מקסימום ברביע הראשון.

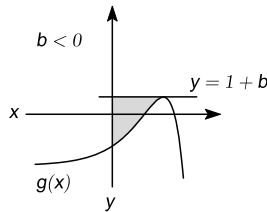
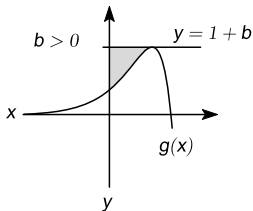
חיתוך בראשית הצירים.

מתקיים רק בגרף 1.

ד.

$$g(x) = f(x) + b \Rightarrow \max(\ln 2, 1 + b) \Rightarrow y = 1 + b$$

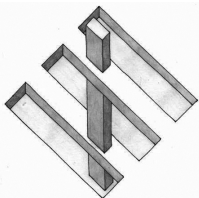
ה.



$$S = \int_0^{\ln 2} (1 + b - (f(x) + b)) dx = \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 4e^x + 4) dx = \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 4e^x + 4x \right) \Big|_0^{\ln 2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 4 \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 4 + 0 \right) = 2 - 8 + \ln 2^4 - \frac{1}{2} + 4$$

$$\Rightarrow S = -2\frac{1}{2} + \ln 16 = 0.27 \text{ (יחידה ריבועית)}$$



$$17^3 = 4913, \quad 4 + 9 + 1 + 3 = 17$$

$$18^3 = 5832, \quad 5 + 8 + 3 + 2 = 18$$

$$26^3 = 17576, \quad 1 + 7 + 5 + 7 + 6 = 26$$

$$27^3 = 19683, \quad 1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27$$

5. א.

$$f(x) = 3x \ln ax, \quad a > 0, \quad \ln ax \Rightarrow ax > 0 \Rightarrow x > 0$$

ב.

$$f'(x) = 3 \ln ax + 3x \cdot \frac{1}{ax} \cdot a = 3 \ln ax + 3 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{3e}\right) = 3 \ln \frac{a}{3e} + 3 = 0 \Rightarrow \ln \frac{a}{3e} = -1$$

נתון

$$\Rightarrow \frac{a}{3e} = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = 3$$

ג.

$$f(x) = 3x \ln 3x, \quad y = 0 \Rightarrow \ln 3x = 0 \Rightarrow 3x = e^0 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

ד.

$$f'(x) = 3 \ln 3x + 3 \Rightarrow f''(x) = 3 \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{3}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{3e}\right) > 0 \Rightarrow \min$$

$$f\left(\frac{1}{3e}\right) = 3 \cdot \frac{1}{3e} \ln \frac{3}{3e} = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (-1) \Rightarrow y_{\min} = -\frac{1}{e}$$

ה.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x \ln 3x = 0 \cdot (-\infty) = 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ (חור')}$$

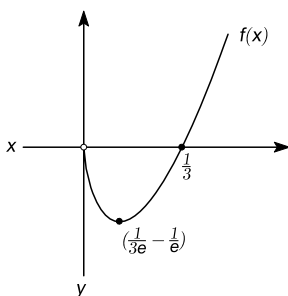
הפונקציה הפולינומיאלית 'מתקרבת' ל-0 יותר 'מהר',

מאשר הפונקציה הלוגריתמית 'מתקרבת' ל- $-\infty$.

לכן ה-0 הוא זה שיקבע את גבול המכפלה ל-0.

זה הסבר אינטואיטיבי. לא 'תקני'. הכלי הרלוונטי הוא 'כלל לופיטל' שאינו בחומר.

בתיכון בודקים על-ידי הצבה של ערכים קרובים ל-0. אז ממש, אבל ממש, לא הוכחה...

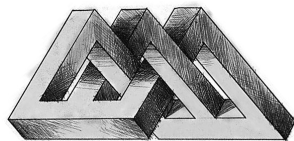


ו.

סימני חיוביות ושליליות - הפוך מהגרף

x	0		$\frac{1}{3}$	
$g' = -f$		+	0	-
g		↗	max	↘

$$\Rightarrow x_{\max} = \frac{1}{3}$$



מספר מחזורי

מספר מחזורי הוא מספר טבעי שמכפלתו בכל אחד מהמספרים 1 עד מספר הספרות שלו, מורכבת מספרות המספר עצמו ובאותו סדר, בהסתכלות על ספרות המספר סדורות במעגל.

דוגמה: 142, 857

$$142, 857 \times 1 = 142, 857$$

$$142, 857 \times 2 = 285, 714$$

$$142, 857 \times 3 = 428, 571$$

$$142, 857 \times 4 = 571, 428$$

$$142, 857 \times 5 = 714, 285$$

$$142, 857 \times 6 = 857, 142$$

$$142, 857 \times 7 = 999, 999$$

שימו לב: $\frac{1}{7} = 0.142857 142857 142857 \dots$

עוד דוגמה: 0, 588, 235, 294, 117, 647

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 1 = 0, 588, 235, 294, 117, 647$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 2 = 1, 176, 470, 588, 235, 294$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 3 = 1, 764, 705, 882, 352, 941$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 4 = 2, 352, 941, 176, 470, 588$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 5 = 2, 941, 176, 470, 588, 235$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 6 = 3, 529, 411, 764, 705, 882$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 7 = 4, 117, 647, 058, 823, 529$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 8 = 4, 705, 882, 352, 941, 176$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 9 = 5, 294, 117, 647, 058, 823$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 10 = 5, 882, 352, 941, 176, 470$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 11 = 6, 470, 588, 235, 294, 117$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 12 = 7, 058, 823, 529, 411, 764$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 13 = 7, 647, 058, 823, 529, 411$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 14 = 8, 235, 294, 117, 647, 058$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 15 = 8, 823, 529, 411, 764, 705$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 16 = 9, 411, 764, 705, 882, 352$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 17 = 0, 588, 235, 294, 117, 647$$

$$0, 588, 235, 294, 117, 647 \times 17 = 9, 999, 999, 999, 999, 999$$

שימו לב: $\frac{1}{17} = 0.0588235294117647 0588 \dots$

אפלטון: to be is to do . סוקרטס: to do is to be . פרנק סינטרה: do be do be do

ועוד דוגמה: 052, 631, 578, 947, 368, 421 .

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 1 = 052, 631, 578, 947, 368, 421$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 2 = 105, 263, 157, 894, 736, 842$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 3 = 157, 894, 736, 842, 105, 263$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 4 = 210, 526, 315, 789, 473, 684$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 5 = 263, 157, 894, 736, 842, 105$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 6 = 315, 789, 473, 684, 210, 526$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 7 = 368, 421, 052, 631, 578, 947$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 8 = 421, 052, 631, 578, 947, 368$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 9 = 473, 684, 210, 526, 315, 789$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 10 = 526, 315, 789, 473, 684, 210$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 11 = 578, 947, 368, 421, 052, 631$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 12 = 631, 578, 947, 368, 421, 052$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 13 = 684, 210, 526, 315, 789, 473$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 14 = 736, 842, 105, 263, 157, 894$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 15 = 789, 473, 684, 210, 526, 315$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 16 = 842, 105, 263, 157, 894, 736$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 17 = 894, 736, 842, 105, 263, 157$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 18 = 947, 368, 421, 052, 631, 578$$

$$052, 631, 578, 947, 368, 421 \times 19 = 999, 999, 999, 999, 999, 999$$

שימו לב: $\frac{1}{19} = 0.05263157894736842105263 \dots$

ברוגמה הראשונה המספר קשור ל- $\frac{1}{7}$. מספר ספרותיו $6 = 7 - 1$.

ומכפלתו ב-7 היא מספר המורכב מ-7 פעמים הספרה '9'.

ברוגמה הראשונה המספר קשור ל- $\frac{1}{17}$. מספר ספרותיו $16 = 17 - 1$.

ומכפלתו ב-17 היא מספר המורכב מ-17 פעמים '9'.

ברוגמה הראשונה המספר קשור ל- $\frac{1}{19}$. מספר ספרותיו $18 = 19 - 1$.

ומכפלתו ב-19 היא מספר המורכב מ-19 פעמים '9'.

ההשערה היא שיש אינסוף מספרים כאלה, אבל אין לכך הוכחה עדיין.

מיהו קומוניסט? תשובה: מי שקרא את מרקס

מיהו קפיטליסט? תשובה: מי שקרא את מרקס וגם הבין אותו...

בשבילך - 100

כיצד ניתן להגיע למספר 100 ע"י שימוש בכל הספרות מ-1 עד 9 (לא כולל 0), פעם אחת בכל ספרה, ועוד לפי הסדר שלהן (1, 2, 3, ...)?
לא להאמין, אבל יש לשאלה זו לא מעט תשובות:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 = 100$$

$$1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 - 6 + 7 + 8 \times 9 = 100$$

$$1 + 2 \times 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$$

$$1 \times 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9 = 100$$

$$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$$

$$12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 89 = 100$$

$$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100$$

$$123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100$$

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100$$

$$(1 + 2 - 3 - 4) \times (5 - 6 - 7 - 8 - 9) = 100$$

$$1 - 2 \times 3 + 4 \times 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 = 100$$

$$(1 + 2)^3 + 4 \times 5 + 6 + 7 \times 8 - 9 = 100$$

אם נרשה סדר ספרות יורד - יש לנו פתרון נוסף:

$$98 - 76 + 54 + 3 + 21 = 100$$

באנגליה התקימה פעם תחרות שבה התבקשו המתחרים למצוא תשובות לשאלה זו.

ילדה אחת, בת 13, הציעה 56 תשובות שונות! אחת מהן היא זו:

$$1^{2345} + 6 \times (7 + 8) + 9 = 100$$

אפשרויות נוספות:

$$1 - 2^{3+4} + 5 \times 6 \times 7 + 8 \times 9 = 100$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 6 - 7 + 8 \times 9 = 100$$

$$(12 - (3 + 4) + 5)^{-6+7+8-9} = 100$$

$$(1^{1+2} \sqrt{-3+4})^5 + 6 \times (7 + 8) + 9 = 100$$

$$(1 + (\sqrt[2]{3})^4 + 5) \times 6 - 7 + 8 + 9 = 100$$

אם נאפשר שימוש בשברים, ונוותר על סדר הספרות - נקבל את האפשרויות הבאות:

$$24\frac{3}{6} + 75\frac{9}{18} = 100$$

$$47\frac{3}{6} + 52\frac{9}{18} = 100$$

$$74\frac{3}{6} + 25\frac{9}{18} = 100$$

$$95\frac{3}{7} + 4\frac{16}{28} = 100$$

$$98\frac{3}{6} + 1\frac{27}{54} = 100$$

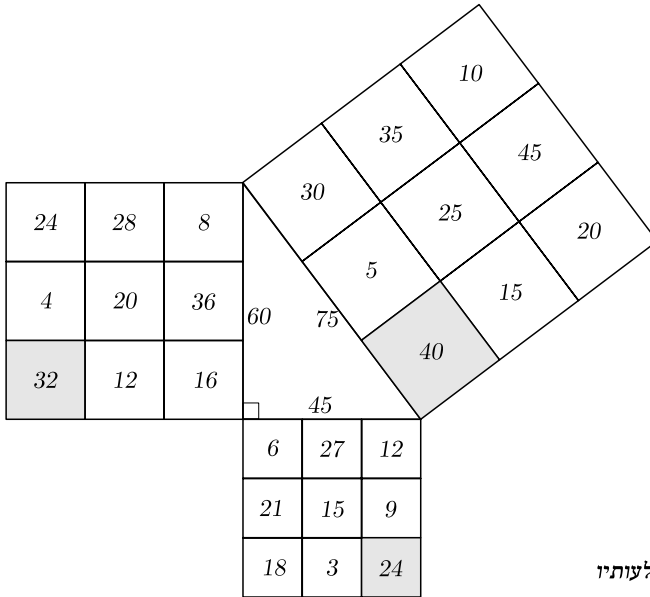
$$94\frac{1}{2} + 5\frac{28}{76} = 100$$

$$1\frac{6}{7} + 3 + 95\frac{4}{28} = 100$$

$$57\frac{3}{6} + 42\frac{9}{18} = 100$$



הכי פתגורס שיש



בציור משולש שאורכי צלעותיו

הינם 60, 45 ו-75 יחידות אורך.

שלשה זו, הינה שלשה פיתגורית: $45^2 + 60^2 = 75^2$.

על כל אחת מצלעות המשולש בנוי ריבוע קסם שסכום כל שורה, כל עמודה וכל אלכסון שלו שווה לאורך הצלע עליה הוא בנוי (בדוק).

מה שעוד יותר יפה כאן הוא שהמספרים המתאימים בריבועי הקסם, מהווים אף הם שלשה פיתגורית.

אם נשווה את מיקום תאי הריבועים

ע"פ התאים האפורים בציור (24, 32, 40),

כשהריבועים 'יושבים' זה על זה, באופן הבא:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 27 & 12 \\ \hline 21 & 15 & 9 \\ \hline 18 & 3 & 24 \\ \hline \end{array}^2 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 36 & 16 \\ \hline 28 & 20 & 12 \\ \hline 24 & 4 & 32 \\ \hline \end{array}^2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 10 & 45 & 20 \\ \hline 35 & 25 & 15 \\ \hline 30 & 5 & 40 \\ \hline \end{array}^2$$

נקבל 9 שלשות פיתגוריות:

$$6^2 + 8^2 = 10^2 ; \quad 27^2 + 36^2 = 45^2 ; \quad 12^2 + 16^2 = 20^2 ; \quad 21^2 + 28^2 = 35^2$$

$$15^2 + 20^2 = 25^2 ; \quad 9^2 + 12^2 = 15^2 ; \quad 18^2 + 24^2 = 30^2 ; \quad 3^2 + 4^2 = 5^2 ; \quad 24^2 + 32^2 = 40^2$$

וזה עוד לא הכל: נבחר מספר משבצות כלשהו באחד הריבועים, ונחבר את הסכום המתקבל מהם.

נבצע פעולה זו באותם תאים מתאימים בשני הריבועים האחרים.

קיבלנו שלושה מספרים שגם הם שלשה פיתגורית !!!

יש 502 אפשרויות כאלה (לא בחומר של שלוש יחידות): $(\frac{9}{2}) + (\frac{9}{3}) + (\frac{9}{4}) + \dots + (\frac{9}{9}) = 502$

ניקח לדוגמה, את ארבעת המספרים הבאים מהריבוע הקטן: $18 + 21 + 27 + 9 = 75$

המספרים המתאימים בריבועים האחרים הם: $24 + 28 + 36 + 12 = 100$ בריבוע הבינוני,

ו- $30 + 35 + 45 + 15 = 125$ בריבוע הגדול.

ואכן: $75^2 + 100^2 = 125^2$ (בדוק) !!!

אם ניקח, למשל, את סכום כל התאים נקבל את השלשה: $135^2 + 180^2 = 225^2$ (בדוק) !!!

מ ק ס י מ !!!



פול אַרְדֶּשׁ - סיפורו של נזיר מתמטי

פול ארדש, יהודי הונגרי, 1913-1996, עילוי מתמטי. שני הוריו היו מורים למתמטיקה. בגיל שלוש כבר הכפיל בע"פ מספרים בני שלוש ספרות. אז גם גילה את קיומם של המספרים השליליים. בגיל 21 קיבל תואר ד"ר במתמטיקה מאוניברסיטת בודפשט. היה חבר בסגל המתמטי במנצ'סטר, אנגליה. עם פרוץ מלחמת העולם השנייה היגר לארה"ב, המקום הבטוח ליהודים באותה עת.

ארדש הקדיש את כל חייו למתמטיקה עד כדי איבוד ענין בכל תענוגות העולם. גם כשמת, בגיל 83, 1996, היה זה עת עמל על משוואה. ארדש היה רווק, צרך גלולות קפאין, אספרסו ואפילו אמפטינים (סוג של סם) ע"מ להגביר את יכולתו האינטלקטואלית. הוא היה חסר רכוש כלשהו מכיון שלדבריו 'נכסים הם מטרה'. לא היה לו בית, מכונית או חשבון בנק. היתה לו מזוודה קטנה, בה ארז את כל מלבושיו. כל מלבושיו היו ממשי בגלל רגישותו הפיזית למגע כלשהו. את ידיו רחץ עשרות פעמים ביום.

ארדש היה הרמות הקלאסית של הפרופסור המפורז. הוא היה חותך פירות עם החלק הקהה של הסכין ומלכלך את סביבתו. בגיל 21 מרח בפעם הראשונה חמאה על פרוסת לחם בעצמו. עד אז היו עושות לו זאת אמו או המשרתת. רק בגיל 11 שרך לראשונה את נעליו בעצמו, ועדיין התקשה בקשירת שרוכי נעליו. לא פעם נעזר לשם כך בחבריו. היתה לו הליכה מוזרה, כשל קוף. גבו היה כפוף וזרועותיו מתנפנפות. הליכתו היתה מהירה מאוד. לעיתים היה רץ לעבר קיר, נעצר מולו בפתאומיות, מסתובב ורץ חזרה. פעם החמיץ את עצירתו מול הקיר, פגע בו ונפגע. לא פעם איבד את דרכו. הוא איבד את ראייתו באחת מעיניו מכיון שסרב לקבל טיפול רפואי מוחשש לאיבוד הזמן שבו עסק במתמטיקה. רק לאחר התעקשותם של אחד מידידיו המתמטיקאים ואשתו הסכים לניתוח השתלת קרנית. מתמטיקאי מממפיס הוזעק לחדר הניתוח על מנת שארדש יוכל לשוחח איתו בנושאים מתמטיים בזמן הניתוח. כשהחלים מהתקף לב שוכן בבית חולים עם חדר גדול על מנת להכיל את כל מבקריו. ארדש ניהל בחדרו שלוש שיחות מתמטיות בעת ובעונה אחת, בשלוש שפות, עם שלוש קבוצות שונות ששהו בחדרו: בהונגרית, בגרמנית ובאנגלית. כמעמד זה דרש מהרופאים שבאו לבודקו לחזור רק לאחר מספר שעות. הם נענו לו. הוא ניהל התכתבות עניפה עם מתמטיקאים רבים בעולם. תחילת מכתב טיפוסי שלו: "הואה (מתמטיקאי סיני) היקר, נניח שֶׁ־ הוא מספר ראשוני אי זוגי . . ."

בשנות החמישים, בתקופה בה רדפו בארה"ב את אוהדי הקומוניזם ('מקארתיזם', ע"ש הסנטור מקארטי), התעמת עם פקידים אמריקאים שתיחקרו אותו על דעותיו בנושא. כשהביע דעה ניטרלית, תוך ציון ערכו של קארל מרקס, נשללה ממנו אשרת הכניסה לארה"ב. את סוף שנות החמישים העביר בישראל. הוא התקיים מהרצאות במתמטיקה, אותן הירצה ברחבי העולם. בביקוריו בחו"ל התאכסן אצל מתמטיקאים מקומיים. את דמי האירוח שילם בהברקותיו המתמטיות. ארדש השפיע לא מעט על המתמטיקה של המאה העשרים. הוא גילה את המספרים הדיסקרטיים, שהם הבסיס למדעי המחשב. היה אשף בתורת המספרים ובכללי המספרים הראשוניים.

פעם הוא ראה על הלוח בעיה באנליזה פונקציונאלית (ענף מתמטי), תחום שארדש לא ידע עליו מאומה. הוא קרא את המשפט המתמטי הקשור בבעיה זו, שאל מספר שאלות על הסימונים המתמטיים שבבעיה, ואז ללא כל מאמץ כתב פתרון בן שתי שורות. על הבעיה הוזעקו קודם לכן שני אנליסטים וחיברו לה פתרון שאורכו 30 עמודים!). הוא כתב לבדו, או עם שותפים למעלה מ־1,500 מאמרים. כפותר חידות מעולה (ולא כמחבר תיאוריות), הוא זכה במספר גדול של פרסים, ביניהם מהנחשבים ביותר כמו פרס קול וולף (המוענק בישראל). כשבועיה הטרידה אותו הוא היה מוכן להציע עבורה הרבה כסף למי שיראה לו את פתרונה. ארדש היה כל כך מוערך מבחינה מקצועית אצל המתמטיקאים, עד כי התפתח ביניהם דירוג של מי שהשתתף איתו בכתיבת מאמר. מי שכתב איתו מאמר קיבל דירוג של 'ארדש ראשון'. מי שפרסם מאמר עם מישהו שפרסם מאמר עם ארדש קיבל את הדירוג 'ארדש 2'. כ־4,500 מתמטיקאים הם בעלי דירוג 'ארדש 2', ביניהם אלברט איינשטיין. הדירוג מגיע היום עד 'ארדש 7'. למי שמעולם לא פירסם מאמר מתמטי כלשהו יש 'ארדש ∞'.

סיווג שאלות המבחנים - חלק א

המספרים בסוגריים מרובעות - מספר עמוד. כל שאר המספרים - מספרי שאלות. את הסיווג הכין שרון חיים.

		גידול ודעיכה [1]
	בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה	הסיווג לפי הפרמטר הנדרש לחישוב בסעיף הראשון של השאלה
1, 4, 8, 9	הבעה באמצעות פרמטר	מצב התחלתי
7, 9	בעיות מעשיות	זמן
10	תנועה	קצב גידול/דעיכה
3, 6	הספק	מצב סופי
	סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת [37]	זמן מחצית החיים
	איברים/סכומים חיוביים/שליליים	
3, 4	איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים	
1, 2	סכום ריבועי האיברים	
5	ריבוע סכום האיברים	
6	בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה	
2, 3, 4, 5	הבעה באמצעות פרמטר	
3, 4		
	סדרות כלליות וסדרות נסיגה [45]	
	כסדרה חשבונית	
2, 11	כסדרה הנדסית	
1, 8, 9, 10	כסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת	
10	איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים	
5, 6, 10	שתי סדרות (a_n, b_n)	
2, 8, 9, 10, 11	מצאת ערך פרמטר	
8, 9, 11	הבעה באמצעות פרמטר	
2, 11		
	טריגונומטריה במרחב	
	מנסרה [53]	
	מנסרה ישרה משולשת שבסיסה:	
	משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים	
2, 6	משולש שווה-צלעות (משוכללת)	
5		
	תיבה	
1, 4	תיבה שבסיסה ריבוע	
3		
	חישובי זוויות (נתון או צ"ל)	
	בין שני ישרים	
1, 4	בין ישר למישור	
1, 4, 5, 6		
	פירמידה [58]	
	פירמידה ישרה משולשת שבסיסה:	
	משולש שווה-צלעות (משוכללת)	
1, 2, 6		
	פירמידה ישרה מרובעת שבסיסה:	
	מלבן	
3, 8, 9	ריבוע	
4, 5, 7		
	חישובי זוויות (נתון או צ"ל)	
	בין שני ישרים	
3, 7	בין ישר למישור	
1, 2, 3, 4, 6, 8		
		סדרה חשבונית [16]
		נוסחה האיבר הכללי ונוסחת סכום הסדרה
		הוכחת סדרה חשבונית ו/או תכונתיה
		סדרה יורדת/עולה
		איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
		איברים/סכומים חיוביים/שליליים
		סימנים מתחלפים/היפוך סימנים
		סדרה בת 2 איברים
		סדרה בת 3 איברים
		סדרה בת 4 איברים
		סכום איברים אחרונים
		שתי סדרות (a_n, b_n)
		איבר המסתיים בספרה מסוימת
		חלוקה במספר טבעי
		מחיקת איברים
		בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה
		הבעה באמצעות פרמטר
		בעיות מעשיות כללי
		קנייה ומכירה
		תנועה
		הספק
		סדרה הנדסית [30]
		נוסחה האיבר הכללי ונוסחת סכום הסדרה
		איברים עוקבים
		איברים/סכומים חיוביים/שליליים
		איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
		סדרה בת 2 איברים
		סכום איברים אחרונים
		שתי סדרות (a_n, b_n)
		שלוש סדרות (a_n, b_n, c_n)

חשבון אינטגרלי

פונקציות מעריכיות [122]
- מציאת פונקציה קדומה

- 8, 18 - פונקציה מעריכית (בסיס a)
- 3, 7, 20, 29 - פונקציה מעריכית (בסיס e)
- 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30 - חישוב ערך פרמטר
- 15, 28 - עם פונקציית שורש
- 23 - שטחים מורכבים
- 5, 30 - חיסור שטחים
- 2, 9, 11, 18, 24, 26 - שטחים עם משיק
- 1, 2, 4, 5, 6, 9, 11, 14, 17, 18, 19, 21, 24, 26, 29

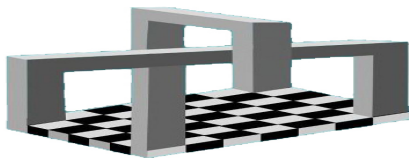
פונקציות שפתרון לוגריתמי [146]

- 6, 7 - חישוב ערך פרמטר
- 7, 8 - עם פונקציית שורש
- 7, 9, 12, 16, 17 - שטחים מורכבים
- 1 - חיסור שטחים
- 1, 3, 11, 12, 14 - שטחים עם משיק

פונקציות טריגונומטריות [163]

- 3, 11 - מציאת פונקציה קדומה
- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 31 - ללא פרמטר
- 10, 13, 20, 21, 24, 25, 30 - עם פרמטר
- 4, 7, 13, 15, 16, 23, 28 - שטחים מורכבים
- 6 - חיסור שטחים
- 1, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 22, 23, 28, 29, 31 - שטחים עם משיק

ואצרה ואצרה ואצרה



חשבון דיפרנציאלי

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות [65]
- פונקציה מעריכית (בסיס a)

- 7 - פונקציה מעריכית (בסיס e)
- 1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13 - פונקציה מעריכית עם פרמטר (בסיס e)
- 3, 4, 5 - פונקציה יורדת/עולה
- 2 - תחומי שליליות/חיוביות
- 12 - נקודות קיצון מוחלט
- 11 - הישר $y=k$
- 1 - התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
- 10, 12

פונקציות לוגריתמיות [78]

- 3, 11 - פונקציית LN
- 4, 5, 6, 8, 10, 13, 15, 16, 17, 18 - פונקציית LN עם פרמטר
- 1, 2, 7, 9, 12, 19 - פונקציית LN עם שני פרמטרים
- 14 - תחומי שליליות/חיוביות
- 16, 17 - נקודות קיצון מוחלט
- 4 - אסימפטוטות
- 13 - התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
- 13, 18

פונקציות טריגונומטריות [95]

- ללא פרמטר
- 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 19, 21, 22, 23, 24, 25 - עם פרמטר
- 3, 13, 17, 18, 20 - פונקציה יורדת/עולה
- 20 - נקודות קיצון מוחלט
- 3, 4, 5, 11, 13, 15, 16, 18, 21, 24 - אסימפטוטות
- 12, 14, 20, 23 - פונקציית $tg(x)$
- 14 - פונקציה טריגונומטרית עם שורש
- 21

$$\begin{aligned}
 4^2 &= 16 \\
 34^2 &= 1156 \\
 334^2 &= 111556 \\
 3334^2 &= 11115556 \\
 33334^2 &= 1111155556 \\
 &\vdots \\
 33334^3 &= 037, 059, 263, 704 \\
 037 + 059 + 263 + 704 &= 1000
 \end{aligned}$$

סיווג שאלות המבחנים - חלק ב

פענוח הרישום: שאלה/מבחן. דוגמה: 38/4 - מבחן 38 שאלה 4. את הסיווג הכין שרון חיים.

24/1	- איברים עוקבים	גידול ודעיכה
20/1, 24/1	- סדרה יורדת/עולה	הסיווג לפי הפרמטר הנדרש לחישוב בסעיף הראשון של השאלה - מצב התחלתי
20/1	- איברים/סכומים חיוביים/שליליים	- זמן
21/1	- סכום כל האיברים שאחרי איבר נתון	- קצב גידול/דעיכה
15/1	- אי-שוויון	- מצב סופי
22/1	- בעיות מעשיות תנועה	- זמן מחצית החיים
25/1, 27/1, 28/1, 29/1, 32/1, 42/1	סדרות נסיגה - כסדרה חשבונית	- הבעה באמצעות פרמטר
8/1, 10/1, 18/1	- כסדרה הנדסית	סדרות
18/1	- איברים עוקבים	סדרה חשבונית
27/1	- איבר אמצעי	- נוסחת האיבר הכללי ונוסחת סכום הסדרה
25/1, 28/1, 42/1	- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים	- סדרה יורדת/עולה
18/1	- סכום כל האיברים שאחרי איבר נתון	- איברים עוקבים
8/1, 10/1, 18/1, 25/1, 28/1, 29/1, 32/1	- שתי סדרות (a_n, b_n)	- איבר אמצעי
8/1, 10/1	- מציאת ערך פרמטר	- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
10/1, 28/1, 29/1	- הבעה באמצעות פרמטר	- איברים/סכומים חיוביים/שליליים
	טריגונומטריה במרחב	- איבר במקום $2n-1$
12/2, 27/2, 35/2, 41/2	מנסרה ישרה משולשת שבסיסה: - משולש שווה-שוקיים	- סכום כל האיברים שלפני איבר נתון
13/2, 37/2, 39/2	- משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים	- סדרה בת $2n$ איברים
10/2, 14/2, 22/2, 42/2	- משולש שווה-צלעות (משוכללת)	- שתי סדרות (a_n, b_n)
7/4, 19/2	תיבה	- שלוש סדרות (a_n, b_n, c_n)
43/2	- תיבה שבסיסה מלבן	- בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה
4/4, 8/4, 31/2	- תיבה שבסיסה ריבוע	- הבעה באמצעות פרמטר
23/2, 33/2, 34/2	קוביה	- בעיות מעשיות כללי
44/2	פירמידה משולשת שבסיסה: - משולש	- קנייה ומכירה
21/2, 45/2	פירמידה ישרה משולשת שבסיסה: - משולש ישר-זווית	- תנועה
18/2	- משולש שווה-שוקיים	סדרה הנדסית
3/4, 6/4, 29/2	- משולש שווה-צלעות (משוכללת)	- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
9/4, 18/2, 25/2, 26/2, 38/2, 40/2, 44/2	פירמידה ישרה מרובעת שבסיסה: - מלבן	- סכום איברים אחרונים
1/4, 2/4, 5/4, 11/2, 15/2, 16/2, 17/2, 24/2, 28/2, 30/2, 32/2, 36/2	- ריבוע	סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת
4/4, 6/4, 7/4, 8/4, 10/2, 11/2, 13/2, 14/2, 15/2, 16/2, 17/2, 20/2, 21/2, 22/2, 29/2, 31/2, 34/2, 36/2, 43/2	הבעה באמצעות פרמטר	- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
2/4, 5/4, 7/4, 9/4, 12/2, 16/2, 19/2, 20/2, 21/2, 23/2, 25/2, 26/2, 27/2, 34/2, 40/2, 43/2	חישובי זוויות (נתון או צ"ל) - בין ישרים	- איברים/סכומים חיוביים/שליליים
3/4, 4/4, 5/4, 6/4, 7/4, 8/4, 9/4, 10/2, 11/2, 12/2, 13/2, 14/2, 15/2, 17/2, 18/2, 20/2, 21/2, 22/2, 24/2, 25/2, 26/2, 27/2, 28/2, 29/2, 30/2, 31/2, 32/2, 33/2, 34/2, 35/2, 39/2, 40/2, 41/2, 42/2, 43/2, 44/2, 45/2	מעגל - רדיוס המעגל החוסם את בסיס הפירמידה	- סימונים מתחלים/סימונים
3/4, 20/2		- סכום ריבועי האיברים
		- שתי סדרות (a_n, b_n)
		- בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה
		- הבעה באמצעות פרמטר
		סדרות מעורבות
		- חשבונית-הנדסית
		- חשבונית-הנדסית אינסופית מתכנסת
		- חשבונית-הנדסית-הנדסית אינסופית מתכנסת

חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי סוג הפונקציה

פונקציה רציונלית
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
 1/2a, 17/5
 - חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות וללא פרמטר
 13/5a-e
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות ועם פרמטר
 5/2a, 6/3a-b
 - הבעה באמצעות פרמטר
 2/3

פונקציית שורש
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
 21/3

פונקציה טריגונומטרית
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
 11/3a-c, 12/3a, 16/3, 20/5a-c, 21/4, 22/3, 24/3, 25/3a, 26/3, 27/3a-b, 29/3a-c, 30/3a-d, 31/3a-b, 32/3a-d, 34/3, 36/3a-d, 37/3a-b, 38/3a-b, 39/3a-d
 41/3a-b1, 42/3a-e, 43/3a-d, 44/3, 45/3
 - חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות וללא פרמטר
 10/3
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות ועם פרמטר
 13/3, 15/4a-c, 17/4a, 18/4a, 33/3, 36/3e, 40/3
 - הבעה באמצעות פרמטר
 13/3
 - הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
 34/3, 43/3, 45/3
 - התאמת פונקציה לגרף
 42/3

פונקציה מעריכית (בסיס a)
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
 6/2a-e, 21/3, 37/5b
 - חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות וללא פרמטר
 31/4

פונקציה מעריכית (בסיס e)
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
 2/2, 4/2, 5/3, 9/2a-b, 11/4a-b, 13/4, 14/4a-c, 16/4, 17/3, 18/3, 26/4a, 27/4, 30/4a-b, 35/4, 41/4a-cz, 42/4a-e, 45/4a-c
 - חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות וללא פרמטר
 19/5a-b, 23/4, 25/4, 36/4a-d, 44/4
 - חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות ועם פרמטר
 26/5, 29/5, 31/5a, 32/5, 33/5, 39/5, 40/5, 41/5, 44/5

פונקציה מעריכית (בסיס e)
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
 5/2a, 6/3a-b
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
 13/3, 15/4a-c, 17/4a, 18/4a, 33/3, 36/3e, 40/3
 - חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות וללא פרמטר
 7/3a-b, 8/2a-b, 10/5b, 12/4, 15/5, 24/4, 28/4a-c, 32/4a-c, 33/4, 34/4, 43/4a-d, 45/4d
 - חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות ועם פרמטר
 14/5a-e, 16/5, 21/5, 27/5, 36/5, 43/5, 45/5
 - הבעה באמצעות פרמטר
 6/3a-b, 13/3
 - הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
 29/4, 38/5, 39/4, 40/4
 - התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
 12/4d, 25/4c, 29/4d, 33/4, 44/4
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
 13/4, 23/4, 44/4, 45/4

פונקציה לוגריתמית
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
 7/2, 10/4, 18/5
 - הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
 7/2d
 - התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
 18/5

פונקציית LN
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
 3/2a-b, 4/3, 7/2, 8/3, 9/3, 11/5, 16/5, 20/4, 23/5, 24/5, 25/5a, 28/5, 34/5, 37/4a, 38/4, 42/5
 - חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות וללא פרמטר
 26/5, 29/5, 31/5a, 32/5, 33/5, 39/5, 40/5, 41/5, 44/5
 - חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות ועם פרמטר
 14/5a-e, 16/5, 21/5, 27/5, 36/5, 43/5, 45/5
 - חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות ועם פרמטר
 19/4, 30/5, 35/5
 - הבעה באמצעות פרמטר
 16/5, 19/4
 - הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
 4/3c, 28/5f, 31/5b, 32/5c
 - התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
 3/2, 8/3, 9/3, 11/5, 14/5, 20/4, 21/5, 24/5, 30/5, 33/5, 43/5

חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי נושאים

חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
 - חקירת פונקציה רציונלית
 1/2a, 17/5
 - פונקציית שורש
 21/3
 - פונקציה טריגונומטרית
 11/3a-c, 12/3a, 16/3, 20/5a-c, 21/4, 22/3, 24/3, 25/3a, 26/3, 27/3a-b, 29/3a-c, 30/3a-d, 31/3a-b, 32/3a-d, 34/3, 36/3a-d, 37/3a-b, 38/3a-b, 39/3a-d
 41/3a-b1, 42/3a-e, 43/3a-d, 44/3, 45/3
 - פונקציה מעריכית (בסיס a)
 6/2a-e, 21/3, 37/5b
 - פונקציה מעריכית (בסיס e)
 2/2, 4/2, 5/3, 9/2a-b, 11/4a-b, 13/4, 14/4a-c, 16/4, 17/3, 18/3, 26/4a, 27/4, 30/4a-b, 35/4, 41/4a-cz, 42/4a-e, 45/4a-c
 - פונקציה לוגריתמית
 7/2, 10/4, 18/5
 - פונקציית LN
 3/2a-b, 4/3, 7/2, 8/3, 9/3, 11/5, 20/4, 23/5, 24/5, 25/5a, 28/5, 34/5, 37/4a, 38/4, 42/5

חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות וללא פרמטר
 - חקירת פונקציה רציונלית
 13/5a-e
 - פונקציה טריגונומטרית
 10/3
 - פונקציה מעריכית (בסיס a)
 31/4
 - פונקציה מעריכית (בסיס e)
 19/5a-b, 23/4, 25/4, 36/4a-d, 44/4
 - פונקציית LN
 26/5, 29/5, 31/5a, 32/5, 33/5, 39/5, 40/5, 41/5, 44/5

חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות ועם פרמטר
 - חקירת פונקציה רציונלית
 5/2a, 6/3a-b
 - פונקציה טריגונומטרית
 13/3, 15/4a-c, 17/4a, 18/4a, 33/3, 36/3e, 40/3
 - פונקציה מעריכית (בסיס e)
 7/3a-b, 8/2a-b, 10/5b, 12/4, 15/5, 24/4, 28/4a-c, 32/4a-c, 33/4, 34/4, 43/4a-d, 45/4d
 - פונקציית LN
 14/5a-e, 16/5, 21/5, 27/5, 36/5, 43/5, 45/5
 - פונקציה עם שני פרמטרים
 6/3a-b, 13/3

חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות ועם פרמטר
 - חקירת פונקציה מעריכית (בסיס e)
 29/4, 38/5, 39/4, 40/4
 - פונקציית LN
 19/4, 30/5, 35/5

הבעה באמצעות פרמטר
 - חקירת פונקציה רציונלית
 2/3
 - פונקציה טריגונומטרית
 13/3
 - פונקציה מעריכית (בסיס e)
 33/4
 - פונקציית LN
 16/5, 19/4

הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה
 - פונקציה טריגונומטרית
 34/3, 43/3, 45/3
 - פונקציה מעריכית (בסיס e)
 2/2, 12/4d, 25/4c, 29/4d, 33/4, 44/4
 - פונקציה לוגריתמית
 7/2d
 - פונקציית LN
 4/3c, 28/5f, 31/5b, 32/5c

התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
 - חקירת פונקציה רציונלית
 12/4d, 25/4c, 29/4d, 33/4, 44/4
 - פונקציה מעריכית (בסיס e)
 13/4, 23/4, 44/4, 45/4
 - פונקציה לוגריתמית
 7/2d
 - פונקציית LN
 4/3c, 28/5f, 31/5b, 32/5c
 - התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
 3/2, 8/3, 9/3, 11/5, 14/5, 20/4, 21/5, 24/5, 30/5, 33/5, 43/5

חשבון אינטגרלי
חישוב אינטגרלים ושטחים
- מציאת פונקציה קדומה

8/2, 11/4, 32/3, 35/3

- פונקציה רציונלית

1/2, 2/3, 5/2, 6/3, 13/5, 15/3b, 17/5

- פונקציה טריגונומטרית

10/3, 11/3, 12/3, 14/3, 15/4, 16/3, 17/4, 18/4, 19/3, 20/5, 21/4, 23/3, 24/3, 25/3, 27/3, 28/3, 29/3, 30/3, 31/3, 32/3, 33/3, 35/3, 37/3, 38/3, 39/3, 41/3

- פונקציה מעריכית (בסיס a)

6/2

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

2/2, 7/3, 8/2, 9/2, 11/4, 14/4, 16/4, 19/5, 22/5, 26/4, 27/4, 30/4, 32/4, 36/4, 41/4, 42/4, 43/4

- פונקציית LN

3/2, 12/5a, 25/5

- שטחים מורכבים

1/2, 5/2, 6/3, 15/3, 27/4, 36/4, 41/4

- שטחים עם משק

1/2, 5/2, 8/2, 9/2, 12/3, 12/5, 14/3, 15/3, 15/4, 17/5, 19/5, 21/4, 22/5, 23/3, 24/3, 25/3, 33/3, 38/3, 41/3

אינטגרל עם פרמטר
- פונקציה רציונלית

1/2, 2/3

- פונקציה טריגונומטרית

28/3

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

22/5, 45/4

- פונקציית LN

31/5

שטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת
- פונקציה טריגונומטרית

20/5, 27/3, 34/3, 39/3, 42/3, 43/3

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

28/4, 30/4

- פונקציה לוגריתמית

18/5

- פונקציית LN

14/5, 23/5, 24/5, 31/5, 37/4

חשבון דיפרנציאלי - נושאי חקירה נוספים
חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
- הרכבה של פונקציית שורש על פונקציה טריגונומטרית

20/5

תחמי שליליות וחיוביות
תחמי שליליות
- פונקציה פולינומאלית

40/5a

- פונקציה טריגונומטרית

43/3

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

29/4, 38/5

- פונקציה לוגריתמית

7/2

- פונקציית LN

7/2, 33/5

תחמי חיוביות
- פונקציה פולינומאלית

40/5a

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

16/4, 18/3, 34/4

- פונקציית LN

28/5, 33/5

תחמי ירידה ועלייה
פונקציה יורדת
- פונקציה מעריכית (בסיס e)

4/2, 5/3

פונקציה עולה
- פונקציה מעריכית (בסיס e)

30/4, 36/4a-d

- פונקציה לוגריתמית

18/5

אי-שוויונות
- פונקציה מעריכית (בסיס a)

6/2

- פונקציה מעריכית (בסיס e)

4/2

פונקציה זוגית/אי-זוגית
- פונקציה טריגונומטרית

36/3

נקודות קיצון מוחלט
- פונקציית שורש

21/3

- פונקציה טריגונומטרית

13/3, 15/4, 20/5, 21/4, 24/3, 25/3, 26/3, 41/3

- פונקציה מעריכית (בסיס a)

21/3

טרנספורמציה של פונקציה
- ערך מוחלט

40/4

- פונקציה הופכית

18/3

- שיקוף ביחס לציר x

29/5, 36/5, 43/4, 45/5

- שיקוף ביחס לציר x ומתיחה אנכית

31/4, 35/4, 38/4, 39/4, 42/5, 44/3

- הזזה אנכית

24/3, 26/5, 27/5, 30/3, 34/4, 36/3, 40/3, 41/3, 41/5, 42/5, 43/5, 44/5, 45/4



השערת רימן

השאלה המתאגרת ביותר היום במתמטיקה היא ההוכחה של 'השערת רימן', על שם המתמטיקאי הגרמני גיאורג פרידריך רימן (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866) שהעלה אותה, והיא עוסקת בפיוורם של המספרים הראשוניים. הבנת הבעיה עצמה דורש ידע מתמטי מעמיק מכדי להעלותה במסגרת זו. יש למעלה מ־500 מאמרים מתמטיים שתלויים בה. כל המאמרים האלו מתחילים במשפט: "אם השערת רימן נכונה . . .".

הנוסחאות הרשמי לארבע יחידות

אלגברה

נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

סדרות:

סדרה הנדסית	סדרה חשבונית	
$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$	כלל נסיגה
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	האיבר ה-n
$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ $S = \frac{a_1}{1 - q}$: סכום אינסופי	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \frac{n \cdot [2a_1 + (n - 1)d]}{2}$	סכום

חוקות: $(a \neq 0, b \neq 0)$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

לוגריתמים $(a, b, c > 0 ; a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

גאומטריה אנליטית

שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר $y = mx + b$ העובר בנקודה (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי נקודת האמצע $M(x_M, y_M)$ של קטע שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הם:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} , y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו- m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

משוואת מעגל שמרכזו (a, b) , ורדיוסו R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

היום אתה המבוגר ביותר שהיית והצעיר ביותר שתהיה.

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל- k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית, כאשר

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{כאשר } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{,} \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{הסתברות מותנית:}$$

טריגונומטריה

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (R - \text{רדיוס המעגל החוסם את המשולש})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \quad (\gamma \text{ היא הזווית הכלואה בין } a \text{ ל-} b)$$

$$S = \frac{1}{2} a R^2 \quad \text{אורך קשת של } \alpha \text{ רדיאנים: } l = aR, \quad \text{שטח גזרה של } \alpha \text{ רדיאנים:}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha \quad (\alpha \text{ היא הזווית הכלואה בין } b \text{ ל-} c)$$

$$V = B \cdot h \quad \text{נפח:} \quad (B - \text{שטח הבסיס, } h - \text{גובה הגוף})$$

$$M = P \cdot h \quad \text{שטח מעטפת:} \quad (P - \text{היקף הבסיס, } h - \text{גובה הגוף})$$

$$V = \frac{B \cdot h}{3} \quad \text{נפח:} \quad (B - \text{שטח הבסיס, } h - \text{גובה הגוף})$$

$$M = \pi R l \quad \text{שטח מעטפת:} \quad (R - \text{רדיוס העיגול, } l - \text{הקו היוצר})$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות:

$$(x^t)' = t x^{t-1}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{נגזרת של מכפלת פונקציות:}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{נגזרת של מנת פונקציות:}$$

$$[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x) \quad \text{נגזרת של פונקציה מורכבת:} \quad \text{כאשר: } u'(x) \text{ היא נגזרת}$$

של u לפי x (נגזרת פנימית) ו- $f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

$$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \quad \text{- אינטגרלים:}$$

$$\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + c \quad \text{אם } F(x) \text{ היא פונקציה קדומה של } f(x) \text{ אז:}$$