יעקב רזניק

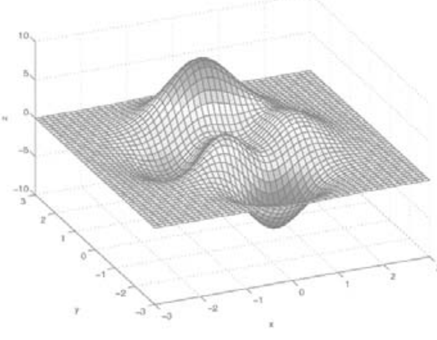
חשבון אינפיניטסימלי-2
(חדו"א-2)

למעלה מ־700 תרגילים עם פתרונות מלאים

+

הגדרות, משפטים ונוסחאות

מהדורה רביעית - 2021



הוצאת שורש

הוצאת שורש (אלי מיטב) - 052-2671210

email: **elmtv@017.net.il** web: **http://www.shoresh1.co.il**

הקדמה

ספר זה מיועד לסטודנטים שלומדים קורס אינפי-2 (חדו״א-2) בפקולטות שונות של אוניברסיטאות ומכללות. מחבר הספר לימד את הקורס במשך שנים רבות במוסדות להשכלה גבוהה ותמיד, כחלק של הקורס, הציע לסטודנטים להשתמש בחוברת תרגילים פתורים שפותחה על ידיו. הניסיון מראה באופן חד משמעי כי שימוש בחוברת מאפשר לסטודנט להבין ולהפנים ביתר קלות את החומר הנלמד. בדרך זאת יעילות החוברת עברה בדיקה לאורך שנים. החומר של החוברת בצורה מורחבת מהווה בסיס של הספר הזה.

הספר כולל יותר מ- 700 תרגילים עם פתרונות מלאים והסברים. בספר 25 פרקים. כל פרק הוא נושא מסוים של תוכנית הלימודים והוא כולל תרגילים, חומר תיאורטי נחוץ (הגדרות, משפטים, נוסחאות) והפתרונות. התרגילים והחומר התיאורטי מאוחדים בחלק הראשון של הספר. פתרונות התרגילים נמצאים בחלק השני (שנקרא ״פתרונות״). תרגילים שמיועדים להעמקת הידע מסומנים בכוכבית (*). אחד מפרקי הספר מוקדש לשימוש בסימטריה בחישובי אינטגרלים רב-ממדיים. נושא זה מיועד לסטודנטים שלומדים פיזיקה ולפי דרישות הקורס צריכים לדעת להשתמש בסימטריה של בעיה כדי לכתוב אינטגרל חד-ממדי במקום אינטגרל משולש. הספר, בנוסף לתרגילים מקוריים, כולל גם שאלות המופיעות באוספי תרגילים ידועים. הרשימה הביבליוגרפית הובאה בסוף הספר.

המחבר מקווה שהספר יעזור לסטודנטים בלימודי אינפי-2 (חדו״א-2) ויהיה יעיל גם למרצים ומתרגלים.

כל ההערות ותגובות יתקבלו בתודה בכתובת דוא״ל jacobr@hit.ac.il .

תוכן עניינים

תרגילים

פתרונות

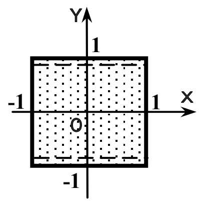
תרגילים,

הגדרות, משפטים ונוסחאות

1. מושגים יסודיים

הגדרה: פונקציה של n משתנים $y=f\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)$ היא כלל, שמתאים לכל נקודה $\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)$ בתחום D של המרחב ה-n- ממדי R^n ערך ממשי אחד של המשתנה y.
במקרה הזה: קואורדינטות הנקודה $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ הן משתנים בלתי תלויים, y- הוא משתנה תלוי (ערך הפונקציה), D הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
במקרה פרטי, כאשר z היא פונקציה של שני משתנים $z=f\left(x,y\right)$, תחום ההגדרה D הוא חלק של המישור XY.

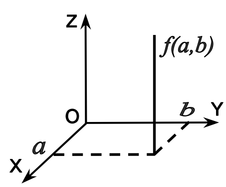
דוגמה 1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $z=\sqrt{1-|x|}+\ln\left(1-|y|\right)$ ושרטט אותו במישור XY.



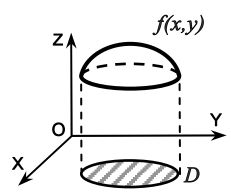
פתרון: $z=\sqrt{1-|x|}+\ln\left(1-|y|\right)\ \Rightarrow$

$$\begin{cases}1-|x|\ge 0 \ \Rightarrow\ |x|\le 1\ \Rightarrow\ -1\le x\le 1\\ 1-|y|>0\ \Rightarrow\ |y|<1\ \Rightarrow\ -1<y<1\end{cases}$$ וגם

תחום ההגדרה של הפונקציה: $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|-1\le x\le 1\ ,\ -1<y<1\right\}$. מבחינה גיאומטרית D הוא תחום ריבועי במישור XY כך, שעבור כל הנקודות מתקיים: $-1\le x\le 1\ ,\ -1<y<1$ (לא כולל הצלעות $y=-1\ ,\ y=1$).

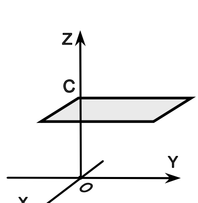


ערך הפונקציה $z=f\left(x,y\right)$ בנקודה $\left(a,b\right)$ $\left(z=f\left(a,b\right)\right)$ הוא קטע שמאונך למישור XY (מקביל לציר ה-Z). אם הפונקציה $z=f\left(x,y\right)$ מוגדרת בתחום D, אז אוסף של כל הנקודות בעלות הקואורדינטות $\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)$ הוא גרף הפונקציה (משטח במרחב תלת-מימדי R^3).

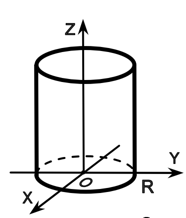


משוואות המשטחים השימושיים ביותר: משוואת המישור (משוואה לינארית): $Ax+By+Cz+D=0$. למשל: $6x-3y+2z-12=0$ או בצורה $z=-3x+\frac{3}{2}y+6$. משוואה של מישור שמאונך לציר ה-Z: $z=C$.

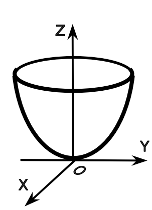
משוואה של גליל ישר: $x^2+y^2=R^2$, משוואה של פרבולואיד: $z=x^2+y^2$, משוואה של חרוט $z^2=x^2+y^2$, משוואה של ספרה (sphere, מעטפת של כדור): $x^2+y^2+z^2=R^2$.



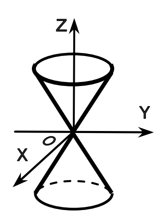
$z=C$



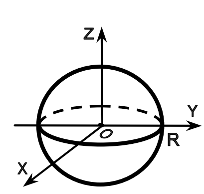
$x^2+y^2=R^2$



$z=x^2+y^2$



$z^2=x^2+y^2$



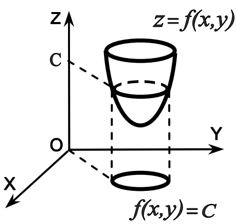
$x^2+y^2+z^2=R^2$

כאשר נחתכים שני משטחים, למשל מישור $Ax+By+Cz+D=0$ עם גרף הפונקציה $z=f\left(x,y\right)$, מתקבל קו החיתוך (במרחב תלת-מימדי). אם נציב $z=-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y-\frac{D}{C}$ במשוואה $z=f\left(x,y\right)$, נקבל משוואה בלי z, ז"א משוואת ההיטל של קו החיתוך על המישור XY. לדוגמה: אם המישור $z=1-2x-2y$ חותך את גרף הפונקציה $z=3-x^2-y^2$ (פרבולואיד), אז מתקבל קו החיתוך

במרחב תלת ממדי ומשוואת ההיטל של הקו על המישור XY נוכל למצוא על ידי ההצבה:

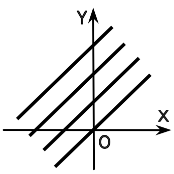
$$1-2x-2y=3-x^2-y^2 \;\Rightarrow\; x^2-2x+y^2-2y=2 \;\Rightarrow\; \left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)=4 \;\Rightarrow$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4 \quad\Rightarrow$$ (מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(1,1)$).



הגדרה: העקום $f(x,y)=C$ נקרא קו הגובה של הפונקציה $z=f(x,y)$ המתאים לערך של C. מבחינה גיאומטרית קו הגובה הוא קו החיתוך של גרף הפונקציה $z=f\left(x,y\right)$ עם המישור $z=C$, ו- $f\left(x,y\right)=C$ היא משוואת ההיטל של קו החיתוך הנ"ל על המישור XY.

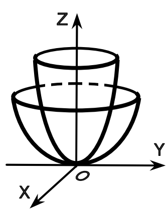
באופן דומה: אם u היא פונקציה של שלושה משתנים $u=f\left(x,y,z\right)$ אז המשטח $f\left(x,y,z\right)=C$ נקרא משטח הרמה של הפונקציה u המתאים לערך של C (משטח, שבכל נקודה שלו ערך הפונקציה שווה ל-C).



דוגמה 2. מצא את קווי הגובה של הפונקציה $z=\sqrt{y-x}$.

פתרון: $z=\sqrt{y-x} \;\Rightarrow\; C=\sqrt{y-x} \;\Rightarrow\; y-x=C^2 \;\Rightarrow\; y=x+C^2$

קווי הגובה הם ישרים מקבילים (החל מ- $y=x$ "ומעלה").



דוגמה 3. מצא את משטחי הרמה של הפונקציה $(z>0)$ $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

פתרון: $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}\;(z>0) \Rightarrow C=\dfrac{z}{x^2+y^2}\;(C>0)\,,\; z=C\left(x^2+y^2\right)$

כל משטח רמה הוא פרבולואיד (לא כולל הנקודה $(0,0,0)$).

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ושרטט אותו במערכת צירים:

1) $z=\sqrt{y-5}\,e^{x/(y-5)}$

2) $z=\begin{cases}\dfrac{\arctan(x-y)}{\sqrt{4-y^2}}, & y\neq -2\\ 0, & y=-2\end{cases}$

3) $z=\dfrac{\left(x^2+y^2-9\right)^{xy}}{x^2+y^2}$

4) $z=\dfrac{\sqrt{y}}{x^2+1}\sqrt[6]{36-4x^2-9y^2}$

5) $z=\sqrt{\dfrac{9-x^2-y^2}{x}}+\ln x$

6) $z=\dfrac{\sqrt{16-x^2-4y^2}}{1+\left|\arcsin y\right|}$

7) $z=\ln\ln\left(x-y\right)$

8) $z=\sqrt{-\left|x^2-y^2-4\right|}$

מצא את קווי הגובה (משטחי הרמה) של הפונקציה:

9) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$

10) $z=\sqrt{xy}$

11) $z=e^{y-x^2}$

12) $z=\arctan\left(y-x\right)$

13) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

14) $u=z-x^2-y^2$

15) $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\;\left(z>0\right)$

2. גבול ורציפות של פונקציה של משתנים אחדים

תהי $z=f(x,y)$ פונקציה שמוגדרת בתחום D ו- $M_0(a,b)$ היא נקודה שבכל סביבה שלה, קטנה ככל שיהיה, קיימת לפחות נקודה אחת השייכת לתחום D (ז"א M_0 היא "נקודת הצטברות").

הגדרה (בלשון ε-δ): המספר L הוא גבול של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(a,b)$, אם עבור כל $\varepsilon>0$, קטן ככל שיהיה, קיים $\delta>0$ כך, שמתקיים $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ כאשר $|x-a|<\delta$, $|y-b|<\delta$.

ההגדרה האקוויוולנטית של גבול הפונקציה **בלשון הסדרות**:

המספר L הוא גבול של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(a,b)$, אם עבור כל סדרת הנקודות $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ $(M_i \in D)$ המתכנסת לנקודה M_0, הסדרה המתאימה של ערכי הפונקציה $f(M_1), f(M_2), f(M_3), \dots, f(M_n), \dots$ מתכנסת ל- L. ורושמים:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=L \quad \text{או} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \quad \text{או} \quad f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} L$$

נדגיש שגבול הפונקציה בנקודה M_0 קיים רק אם הוא **לא תלוי** במסלול ההתקרבות ל- M_0.

דוגמה 1. הוכח שהגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$ לא קיים.

פתרון: נבחר בתור מסלול ההתקרבות לנקודה $(0,0)$ את הישר $y=kx$ ונקבל אחרי ההצבה:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y} = \left| y=kx \right| = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(1+k)} = \frac{1}{1+k}$$

הגבול לא קיים כי הוא תלוי בפרמטר k ז"א במסלול ההתקרבות לנקודה $(0,0)$.

כדי לחשב גבול של פונקציה אפשר להשתמש בהערכת ערכי הפונקציה בסביבת נקודת הצטברות:

דוגמה 2. חשב את הגבול: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^2+y^2}$.

פתרון: $0 \le \left|\dfrac{x^5}{x^2+y^2}\right| \le \left|\dfrac{x^5}{x^2}\right| = |x|^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. לפי משפט "סנדוויץ'" מגיעים למסקנה שהגבול המבוקש שווה ל-0. ניתן לחשב את הגבול גם באמצעות המעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^5}{x^2+y^2} = \begin{vmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{vmatrix} = \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^5\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^3\cos^5\varphi \ , \quad 0 \le \left| r^3\cos^5\varphi \right| \le \left| r^3 \right| \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

משתמשים בחישוב גבולות כדי לבדוק רציפות של פונקציה בנקודה.

הגדרה: תהי $z=f(x,y)$ פונקציה, שמוגדרת בתחום D ו- $M_0(a,b)\in D$. הפונקציה $f(x,y)$ רציפה בנקודה $M_0(a,b)$, אם מתקיים $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$.

א. חישוב גבול של פונקציה

חשב את הגבול הנתון או הוכח שהוא לא קיים:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$ **2)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+2y^2-3xy}{x^2+3y^2}$ **3)** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to \infty}} \left(1+\dfrac{x}{y}\right)^y$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)\cos\frac{1}{xy}$ **5)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(2xy)}{y}$ **6)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{xy}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **8)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^2}{x^3+y^3}$ **9)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln\left(1+3y^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$ **11)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ **12)** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 3}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

13) $\lim\limits_{\substack{x\to +0\\ y\to +0}} \frac{x^3+2y^3-x}{\sqrt{y^6+x^2}}$ **14)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **15)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4}{x^2+y^2}$

16) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\tan\left(x^3+y^3\right)}{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}$ **17)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\tan xy}{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}$

18) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^5-\cos\left(2x^2+2y^2\right)+1}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ **19)** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

20*) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^5-x^2y^3}{x^4+y^4}$ **21*)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4-x^3y-xy^3+y^4}{\sqrt{x^6+y^6}}$ **22*)** $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

ב. רציפות של פונקציה

בדוק את רציפות הפונקציה הנתונה $z=f(x,y)$ בנקודה $(0,0)$:

1) $z=\begin{cases}\frac{x^4+y^5}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **2)** $z=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{y}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

3) $z=\begin{cases}\frac{2x+y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **4)** $z=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^6+y^3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

5) $z=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{y}\sin\left(x^2\right)}{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **6)** $z=\begin{cases}\frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

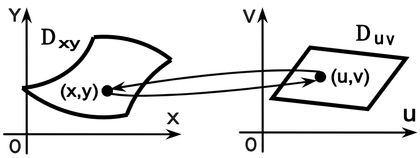
7) בדוק את רציפות הפונקציה הנתונה $f(x,y)$ בנקודה $(1,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}, & (x,y)\neq(1,0)\\ 2, & (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

14. החלפת משתנים באינטגרל כפול (מקרה כללי)

באמצעות החלפת משתנים (טרנספורמציית קואורדינטות, התמרת משתנים) ניתן לפשט חישוב של אינטגרל כפול.

תהי $f(x,y)$ פונקציה אינטגרבילית בתחום חסום וסגור D_{xy} במישור XY. אם $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ הן פונקציות רציפות, בעלות נגזרות חלקיות רציפות והדטרמיננטה הפונקציונלית (יעקוביאן הטרנספורמציה)



$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

אז הפונקציות $x(u,v), y(u,v)$ קובעות התאמה חד-חד-ערכית בין נקודות התחום D_{xy} במישור XY לנקודות התחום D_{uv} (תמונה של D_{xy}) במישור UV, שפת התחום D_{xy} עוברת לשפת התחום D_{uv} ומתקיים:

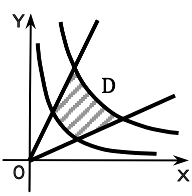
$$(*) \qquad \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|\,dudv$$

הערות:

1. כדי לחשב את היעקוביאן J אפשר להשתמש בנוסחה $\frac{1}{J} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & v'_x \\ u'_y & v'_y \end{vmatrix}$.
2. בנוסחה (*) ניתן להשתמש גם כאשר היעקוביאן J מתאפס בנקודות בודדות או על קווים בודדים בתחום האינטגרציה.
3. אלמנט של שטח $dS = dxdy$ בקואורדינטות החדשות u, v שווה ל- $dS = |J|dudv$. לכן שטח של תחום האינטגרציה D ניתן לחשב באמצעות האינטגרל $S = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} |J|dudv$.

דוגמה 1. חשב את האינטגרל $I = \iint\limits_{D} x^2y^2\,dxdy$ כאשר תחום האינטגרציה D מוגבל על-ידי הקווים:

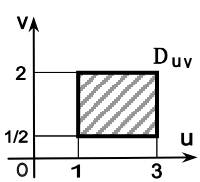
$$xy = 1\ ,\ xy = 3\ ,\quad y = x/2\ ,\quad y = 2x \quad (x > 0, y > 0)$$



פתרון. נעשה את החלפת המשתנים: $u = xy$, $v = y/x$. אז משוואות קווי שפת התחום במישור UV הם: $u = 1$, $u = 3$, $v = 1/2$, $v = 2$.

תחום האינטגרציה במישור UV הוא מלבן: $1/2 \le v \le 2$, $1 \le u \le 3$

יעקוביאן הטרנספורמציה:



$$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} u'_x & v'_x \\ u'_y & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & -y/x^2 \\ x & 1/x \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v \quad \Rightarrow \quad J = \frac{1}{2v}$$

האינטגרל הנתון בקואורדינאטות החדשות:

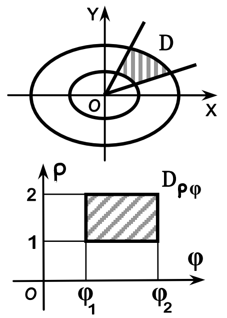
$$I = \iint\limits_{D} (xy)^2\,dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} u^2\frac{1}{2v}du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^3 u^2du \int_{1/2}^{2}\frac{dv}{v} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3}\Bigg|_1^3\right)\left(\ln v\Big|_{1/2}^{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(27-1)\left(\ln 2 - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{3}\ln 4\,.$$

קואורדינטות קוטביות מוכללות. משוואת אליפסה קנונית ניתן לרשום בצורה $\frac{x^2}{(aR)^2} + \frac{y^2}{(bR)^2} = 1$ או בצורה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2$ $\binom{*}{*}$. אז ההתמרה: $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

הופכת את המשוואה $\binom{*}{*}$ למשוואה $\rho = R$ במישור ρ,φ. יעקוביאן הטרנספורמציה הוא $J = ab\rho$.

דוגמה 2. חשב את השטח שכלוא בין שתי האליפסות: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=4$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ושני הישרים: $y = 2x$, $y = x/2$ ברביע הראשון.



פתרון. לפי הנתון $a = 3$, $b = 2$ לכן החלפת המשתנים היא: $x = 3\rho\cos\varphi$, $y = 2\rho\sin\varphi$. היעקוביאן: $J = ab\rho = 3\cdot 2\rho$. אחרי הצבת x ו-y למשוואות האליפסות מקבלים: $\rho = 1$, $\rho = 2$.
אחרי הצבת x ו-y למשוואות הישרים מקבלים את הערכים של φ:

$$2\rho\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot 3\rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; \tan\varphi = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \varphi = \arctan\frac{3}{4} = \varphi_1$$

$$2\rho\sin\varphi = 2\cdot 3\rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; \tan\varphi = 3 \;\Rightarrow\; \varphi = \arctan 3 = \varphi_2$$

$$S = \iint\limits_D dS = \iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} |J|\,d\varphi\,d\rho = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} 6\rho\,d\varphi\,d\rho = 6\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_1^2 \rho\,d\rho = 6(\varphi_2-\varphi_1)\left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_1^2\right) =$$

$$= 9(\varphi_2-\varphi_1) = 9\left(\arctan 3 - \arctan\frac{3}{4}\right)$$

חשב את האינטגרל הנתון I כאשר התחום D מוגבל על-ידי קווים נתונים:

1) $I = \iint\limits_D \frac{x+3y}{x^4} e^{y/x^3}\,dx\,dy \quad D:\; y = x^3 ,\; y = 4x^3 ,\; y = 1-x ,\; y = \frac{1}{2}-x$

2) $I = \iint\limits_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dxdy ,\quad D:\; xy = 1 ,\; xy = 9 ,\; y = x ,\; y = 4x \;\; (x>0 , y>0)$

3) $I = \iint\limits_D \frac{y-x}{2x+y}\,dxdy ,\quad D:\; y = x+4 ,\; y = x+1 ,\; y = 6-2x ,\; y = 8-2x$

4) $I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^4}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right) dxdy ,\quad D:\; y = 2x^2 ,\; y = 4x^2 ,\; y = \sqrt{x} ,\; y = \sqrt{2x}$

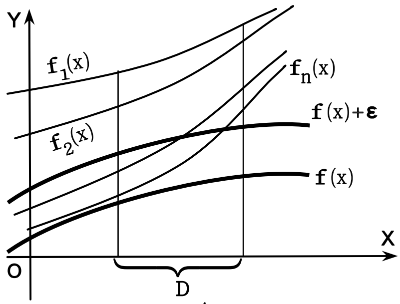
5) $I = \iint\limits_D (x^2 + 2xy)\,dxdy ,\quad D:\; y = \frac{1}{x^2} ,\; y = \frac{4}{x^2} ,\; y = x+1 ,\; y = x-1 \;\; (x>0 , y>0)$

6) $I = \iint\limits_D \frac{(x+y)^3\,dxdy}{x^2\left(1+(x+y)^3\right)} ,\quad D:\; y = 1-x ,\; y = 2-x ,\; y = \frac{1}{2}x ,\; y = 2x$

7) $I = \iint\limits_D \cos\frac{x-y}{x+y}\,dxdy ,\quad D:\; y = 0 ,\; x = 0 ,\; y = 1-x$
(השתמש בהחלפת המשתנים: $x-y = u$, $x+y = v$)

8) $I = \iint\limits_D \cos\frac{(x+y)^2}{2}\,dxdy ,\quad D:\; y = 1-x ,\; y = 2-x ,\; y = 2x ,\; x = 0$

אם הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת **לא** במידה שווה לפונקציה $f(x)$ בתחום D, אז אחרי בחירת $\varepsilon>0$ ובניית "פס" בעל עובי ε לא נוכל למצוא n_0 כך, שכאשר $n>n_0$, הגרף של $f_n(x)$ **<u>כולו</u>** (עבור כל $x\in D$) יהיה "בתוך הפס". תמיד חלק של $f_n(x)$ יהיה "מחוץ לפס". זאת אומרת עבור x-ים שונים יהיו שונים גם n-ים, שעבורם הגרף $f_n(x)$ יהיה כבר "בתוך הפס". במילים אחרות, במקרה של התכנסות לא במידה שווה n_0 תלוי לא רק ב-ε, אלא גם ב-x ($n_0=n_0(\varepsilon,x)$).



התכנסות לא במידה שווה

דוגמה 2. בדוק את ההתכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות $f_n(x)=\dfrac{x}{n}$ כאשר $0\le x<1$.

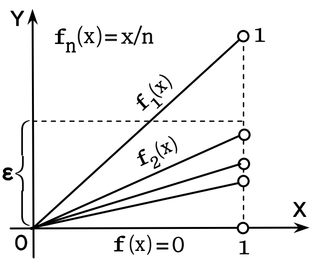
פתרון. הפונקציה הגבולית היא $f(x)=0$ כי מתקיים

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0\,.$$

לפי ההגדרה צריך להתקיים:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists n_0\in N,\ \ n>n_0 \quad\Rightarrow\quad \left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x}{n}-0\right|=\frac{x}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon \quad\Rightarrow\quad n>\frac{1}{\varepsilon}\quad\Rightarrow\quad n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$



עבור כל ε קיים n_0 שלא תלוי ב-x. לכן הסדרה הנתונה מתכנסת במידה שווה לפונקציה גבולית.

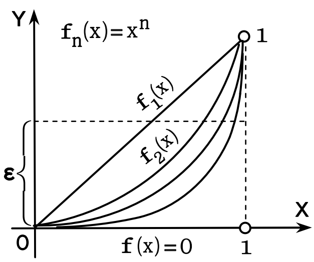
דוגמה 3. בדוק את ההתכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות $f_n(x)=x^n$ כאשר $0\le x<1$.

פתרון. הפונקציה הגבולית היא $f(x)=0$ כי מתקיים:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=0\,.$$

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists n_0\in N,\ \ n>n_0 \quad\Rightarrow\quad \left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

$$\left|x^n-0\right|=x^n<\varepsilon \quad\Rightarrow\quad n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\quad\Rightarrow\quad n_0=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]$$



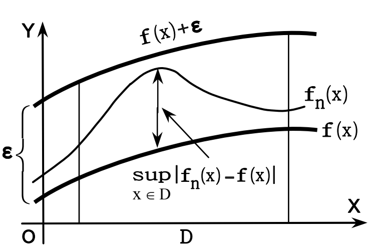
עבור כל ε קיים n_0 שתלוי ב-x. לכן הסדרה הנתונה מתכנסת לא במידה שווה לפונקציה גבולית.

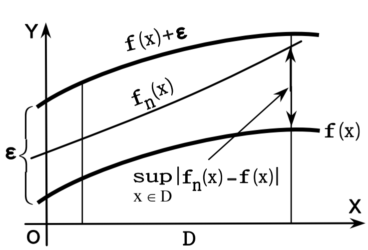
בהוכחות התכנסות במידה שווה נוח להשתמש בטענה ששקולה להגדרה 2:

סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה גבולית $f(x)$ בתחום D אם ורק אם:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$$

ההסבר "הגיאומטרי": אם ההפרש המקסימלי בין $f_n(x)$ ל- $f(x)$ שואף ל-0, אז החל מ- n מסוים גרף של $f_n(x)$ כולו יהיה בתוך הפס בעל עובי ε.





דוגמה 4. בדוק את ההתכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות $f_n(x)=\dfrac{nx}{2n+x}$, $0<x<1$.

פתרון. נמצא את הפונקציה הגבולית: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{2n+x}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{2+x/n}=\dfrac{x}{2}$.

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\frac{nx}{2n+x}-\frac{x}{2}\right|=\left|\frac{2nx-2nx-x^2}{4n+2x}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2n+x}$$

$$\frac{d}{dx}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2n+x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x(2n+x)-x^2}{(2n+x)^2}=\frac{4nx+x^2}{2(2n+x)^2}>0$$

$$\sup_{0<x<1}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left.\frac{x^2}{4n+2x}\right|_{x=1}=\frac{1}{4n+2}\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\sup_{0<x<1}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n+2}=0$$

הסדרה הנתונה מתכנסת במידה שווה.

נציין, שאם איברי הסדרה $\{f_n(x)\}_1^\infty$ הם פונקציות רציפות ב-D והסדרה מתכנסת במידה שווה לפונקציה גבולית $f(x)$, אז גם $f(x)$ היא פונקציה רציפה. מכאן נובע, שאם $f(x)$ לא רציפה, כאשר הפונקציות $f_n(x)$ רציפות, אז ההתכנסות של $f_n(x)$ ל- $f(x)$ ב-D היא לא במידה שווה.

התכנסות במידה שווה של טורי פונקציות

תהי נתונה $\{u_n(x)\}$ סדרה אינסופית של פונקציות המוגדרות בתחום D_0. סכום איברי הסדרה

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

נקרא טור פונקציות או טור פונקציונלי (בהמשך נשתמש גם בסימונים $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum u_n(x)$).

סכום (סופי) של n האיברים הראשונים של הטור $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)$ נקרא סכום חלקי של הטור.

הגדרה 3: הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ מתכנס בתחום ההתכנסות D לפונקציה $S(x)$ שנקראת סכום הטור, אם סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n(x)\}_1^\infty$ מתכנסת בתחום D ל- $S(x)$ (ז"א $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$).

בכל נקודה x_0 בתחום ההגדרה טור הפונקציות $\sum u_n(x)$ מהווה טור מספרי $\sum u_n(x_0)$ שמתבדר או מתכנס ותחום ההתכנסות D של טור הפונקציות הוא, בעצם, אוסף של כל הנקודות, שבהן הטור המספרי $\sum u_n(x_0)$ מתכנס למספר $S(x_0)$.

טור פונקציות אפשר להציג בצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\underbrace{u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)}_{S_n(x)}+\underbrace{u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+u_{n+3}(x)+\ldots}_{r_n(x)}=S_n(x)+r_n(x)$$

כאשר $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ הוא הסכום החלקי ו- $r_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$ היא "שארית" של הטור.

ברור, שאם $\sum u_n(x)$ מתכנס לסכום $S(x)$, אז מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\left|r_n(x)\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|S_n(x)-S(x)\right|=0$.

20*) $L=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^5-x^2y^3}{x^4+y^4}=\left|\begin{array}{l}x=r\cos\varphi\\y=r\sin\varphi\end{array}\right|=\lim_{r\to0}\frac{r\left(\cos^5\varphi-\cos^2\varphi\sin^3\varphi\right)}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$

$$0\le\left|r\cdot\frac{\cos^5\varphi-\cos^2\varphi\sin^3\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}\right|=r\cdot\frac{\left|\cos^5\varphi+\left(-\cos^2\varphi\sin^3\varphi\right)\right|}{\left|\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right|}\le$$

$$\le r\cdot\frac{\left|\cos^5\varphi\right|+\left|\cos^2\varphi\sin^3\varphi\right|}{\left|\left(\cos^4\varphi+2\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi\right)-2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right|}\le$$

$$\le\frac{r(1+1)}{\left|\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)^2-2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right|}=\frac{2r}{\left|1^2-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right|}\le\frac{2r}{\left|1-\frac{1}{2}\cdot1\right|}=4r\xrightarrow[r\to0]{}0$$

לפי משפט ״סנדוויץ׳״ $L=0$.

21*) $L=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^4-x^3y-xy^3+y^4}{\sqrt{x^6+y^6}}=\left|\begin{array}{l}x=r\cos\varphi\\y=r\sin\varphi\end{array}\right|=$

$$=\lim_{r\to0}\frac{r^4\left(\cos^4\varphi-\cos^3\varphi\sin\varphi-\cos\varphi\sin^3\varphi+\sin^4\varphi\right)}{r^3\sqrt{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}}$$

$$0\le\left|\frac{r\left(\cos^4\varphi-\cos^3\varphi\sin\varphi-\cos\varphi\sin^3\varphi+\sin^4\varphi\right)}{\sqrt{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}}\right|\le$$

$$\le\frac{r\cdot\left(\left|\cos^4\varphi\right|+\left|-\cos^3\varphi\sin\varphi\right|+\left|-\cos\varphi\sin^3\varphi\right|+\left|\sin^4\varphi\right|\right)}{\sqrt{\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)^3-3\cos^4\varphi\cdot\sin^2\varphi-3\cos^2\varphi\cdot\sin^4\varphi}}\le$$

$$\le\frac{r(1+1+1+1)}{\sqrt{1^3-\frac{3}{4}\cdot4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}}=\frac{4r}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi}}\le\frac{4r}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\cdot1}}=\frac{4r}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=$$

$$=8r\xrightarrow[r\to0]{}0$$

לפי משפט ״סנדוויץ׳״ $L=0$.

22*) $L=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

נעשה את הערכת ערכי הפונקציה. ברור, שעבור כל x ו-y מתקיים $(x-y)^2\ge0$. מכאן

$$x^2-2xy+y^2\ge0\ \Rightarrow\ x^2+y^2\ge2xy\ \Rightarrow\ \frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}\ ,\ \left(x^2+y^2\ne0\right)$$

$$0\le\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

לפי משפט ״סנדוויץ׳״ $L=0$.

ב. רציפות של פונקציה

1) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^5}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^4+y^5}{x^2+y^2}=\left|\begin{matrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{matrix}\right|=\lim_{r\to0}\frac{r^4\cos^4\varphi+r^5\sin^5\varphi}{r^2}=$$

$$=\lim_{r\to0} r^2\left(\cos^4\varphi+r\sin^5\varphi\right)=0\ \Rightarrow\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)\ \Rightarrow$$ (הפונקציה רציפה)

2) $$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{y} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נחשב את הגבול: $L=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{y}$.

$$0\le\left|(x+y)\sin\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{y}\right|=|x+y|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2}\right|\cdot\left|\cos\frac{1}{y}\right|\le\left(|x|+|y|\right)\cdot1\cdot1=$$

$$=|x|+|y|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0\quad\Rightarrow\quad L=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)\quad\Rightarrow$$ (הפונקציה רציפה)

3) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x+y^2}{\sqrt{x^2+y^4}} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2x+y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}=\left|y=k\sqrt{x}\right|=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\left(2+k^2\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+k^4}\right)}=\frac{2+k^2}{\sqrt{1+k^4}}$$

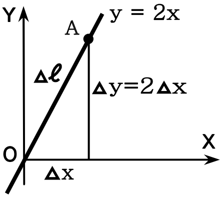
הגבול לא קיים כי $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq f(0,0)$ ולכן הפונקציה לא רציפה.

4) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^6+y^3} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{x^6+y^3}=\left|y=kx^2\right|=\lim_{x\to0}\frac{k^2\cancel{x^6}}{\cancel{x^6}\left(1+k^3\right)}=\frac{k^2}{1+k^3}$$

הגבול לא קיים כי $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq f(0,0)$ ולכן הפונקציה לא רציפה.

16) $u=\sqrt[3]{2xy^2}\ \ ,\ \ y=2x\ ,\ (0,0)$



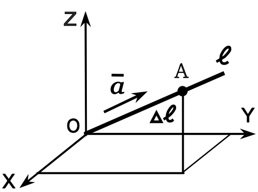
הפונקציה לא דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$. לכן נחשב את הנגזרת בנקודה $(0,0)$ לפי ההגדרה: תהי A נקודה על הישר $y=2x$, שנמצאת במרחק $\Delta\ell$ מהנקודה $(0,0)$. נגזרת הפונקציה

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}=\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{u(A)-u(0,0)}{\Delta\ell}=\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{u(0+\Delta x,0+\Delta y)-u(0,0)}{\Delta\ell}$$

בגלל כך ש-A נמצאת על הישר, קואורדינטות הנקודה הן $A(\Delta x,2\Delta x)$ והנגזרת ב-$(0,0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}=\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{u(\Delta x,2\Delta x)-u(0,0)}{\Delta\ell}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2\cdot\Delta x(2\Delta x)^2}-0}{\sqrt{\Delta x^2+(2\Delta x)^2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cancel{\Delta x}}{\sqrt{5}\,\cancel{\Delta x}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

17) $u=\sqrt[3]{xyz}\ \ ,\ \ \bar{a}(1,4,2)\ ,\ O(0,0,0)$



משוואת הישר ℓ העובר דרך הנקודה O בכיוון הווקטור $\vec{a}$ היא

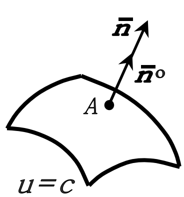
$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{4}=\frac{z-0}{2}=t\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=t\\ y=4t\\ z=2t\end{cases}$$

בנקודה $O(0,0,0)$ ערך הפרמטר $t=0$. ניתן ל- $t=0$ תוספת Δt ונקבל על הישר נקודה A, שקואורדינטות שלה $A(\Delta t,4\Delta t,2\Delta t)$. נסמן ב- $\Delta\ell$ את אורך הקטע OA. לפי ההגדרה נגזרת הפונקציה בנקודה $(0,0,0)$ בכיוון הווקטור $\overline{OA}$ היא:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}=\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{u(A)-u(0,0,0)}{\Delta\ell}=\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{u((\Delta t,4\Delta t,2\Delta t))-u(0,0,0)}{\Delta\ell}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta t\cdot 4\Delta t\cdot 2\Delta t}-0}{\sqrt{\Delta t^2+16\Delta t^2+4\Delta t^2}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\cancel{\Delta t}}{\sqrt{21}\,\cancel{\Delta t}}=\frac{2}{\sqrt{21}}$$

18) $u=x^2y+2xz\ \ ,\ \ A(2,-2,3)$



אם A היא נקודה על משטח הרמה של השדה u, אז הווקטור $\bar{n}=\operatorname{grad}u\big|_A$ הוא וקטור נורמלי (מאונך) למשטח בנקודה A.

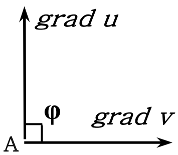
נמצא את גרדיאנט הפונקציה בנקודה A:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=(2xy+2z)\big|_A=-2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=x^2\big|_A=4\,,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=2x\big|_A=4$$

וקטור הנורמל למשטח הוא $\bar{n}=-2\bar{i}+4\bar{j}+4\bar{k}$. וקטור היחידה:

$$\bar{n}^o=\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}}\left(-2\bar{i}+4\bar{j}+4\bar{k}\right)=-\frac{1}{3}\bar{i}+\frac{2}{3}\bar{j}+\frac{2}{3}\bar{k}.$$

19) $\operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v$



לפי הנתון יש לחשב את הנגזרת הפונקציה $u(x,y,z)$ בכיוון המאונך לגרדיאנט של הפונקציה $u(x,y,z)$. בכיוון הזה $\frac{\partial u}{\partial \ell}=0$, כי מתקיים:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}=\left|\operatorname{grad} u\right|\cos\varphi=\left|\operatorname{grad} u\right|\cos 90^\circ=0$$

20) $u=2xz^2-3xy-4x$, $A(1,-1,2)$

קואורדינטות של הנקודה A מקיימות את משוואת משטח הרמה $2xz^2-3xy-4x=C$.
לכן $2\cdot1\cdot4+3\cdot1\cdot1-4\cdot1=C$. מכאן $C=7$ ומשוואת המשטח: $2xz^2-3xy-4x=7$.
הווקטור $\bar{n}=\operatorname{grad} u\big|_A$ הוא וקטור הנורמל למשטח הרמה בנקודה A.

$$\bar{n}=\operatorname{grad} u\big|_A=\left(2z^2-3y-4\right)\bar{i}-3x\,\bar{j}+4xz\,\bar{k}\Big|_{(1,-1,2)}=7\,\bar{i}-3\,\bar{j}+8\bar{k}$$

משוואת המישור המשיק למשטח (המאונך לווקטור $\bar{n}$) בנקודה $A(1,-1,2)$:

$$7(x-1)-3(y+1)+8(z-2)=0 \quad\Rightarrow\quad 7x-3y+8z-26=0$$

21) $u=yze^x$, $A(0,0,1)$

נגזרת של פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה בכיוון של גרדיאנט הפונקציה באותה הנקודה היא $\frac{\partial u}{\partial \ell}=\left|\operatorname{grad} u\right|$. לכן בנקודה הנתונה A: $\left.\frac{\partial u}{\partial \ell}\right|_A=\left|\operatorname{grad} u\right|\Big|_A$.

$$\operatorname{grad} u\big|_A=yze^x\,\bar{i}+ze^x\,\bar{j}+ye^x\,\bar{k}\Big|_{(0,0,1)}=0\,\bar{i}+\bar{j}+0\,\bar{k}=\bar{j} \;\Rightarrow\; \left.\frac{\partial u}{\partial \ell}\right|_A=\left|\operatorname{grad} u\right|\Big|_A=1$$

22) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,\ (x,y,z)\neq(0,0,0) \;\Rightarrow\; u=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $\left|\operatorname{grad} u\right|=1$

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\bar{i}+\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\bar{j}+\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\bar{k}$$

$$\left|\operatorname{grad} u\right|=\sqrt{\frac{x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+\frac{y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+\frac{z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\left|\operatorname{grad} u\right|=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=1 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2+z^2=1 \quad\Rightarrow$$ (ספרה)

23) $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$, $\bar{c}=\text{const}$

נניח $\bar{c}=(c_1\,,c_2\,,c_3)$ כאשר c_1, c_2, c_3 הם מספרים קבועים. אז $\bar{c}\cdot\bar{r}=c_1x+c_2y+c_3z$

$$\operatorname{grad}\left(\bar{c}\cdot\bar{r}\right)=\bar{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(c_1x+c_2y+c_3z\right)+\bar{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(c_1x+c_2y+c_3z\right)+\bar{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(c_1x+c_2y+c_3z\right)=$$

$$=c_1\bar{i}+c_2\bar{j}+c_3\bar{k}=\bar{c} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{grad}\left(\bar{c}\cdot\bar{r}\right)=\bar{c}$$

24a) $\operatorname{grad}(\lambda u)=\frac{\partial(\lambda u)}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial(\lambda u)}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial(\lambda u)}{\partial z}\bar{k}=$

$$=\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\lambda\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\lambda\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right)=\lambda\ \operatorname{grad}u$$

24b) $\operatorname{grad}(u+v)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(u+v)\right]\bar{i}+\left[\frac{\partial}{\partial y}(u+v)\right]\bar{j}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(u+v)\right]\bar{k}=$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\bar{k}=$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\bar{k}\right)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v$$

24c) $\operatorname{grad}(u\cdot v)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(uv)\right]\bar{i}+\left[\frac{\partial}{\partial y}(uv)\right]\bar{j}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(uv)\right]\bar{k}=$

$$=\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\bar{i}+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\bar{j}+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\bar{k}=$$

$$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\bar{k}\right)=v\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v$$

24d) $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right)\right]\bar{i}+\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right)\right]\bar{j}+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{v}\right)\right]\bar{k}=$

$$=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}v-u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}\bar{i}+\frac{\frac{\partial u}{\partial y}v-u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}\bar{j}+\frac{\frac{\partial u}{\partial z}v-u\frac{\partial v}{\partial z}}{v^2}\bar{k}=$$

$$=\frac{1}{v^2}\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right)-u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\bar{k}\right)\right]=\frac{v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v}{v^2}$$

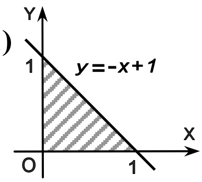
25) $u=(\bar{a}\cdot\bar{r})\cdot(\bar{b}\cdot\bar{r})$, $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$, $\bar{a}=\text{const}$, $\bar{b}=\text{const}$

נשתמש בנוסחאות: $\operatorname{grad}(u\cdot v)=v\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v$, $\operatorname{grad}(\bar{c}\cdot\bar{r})=\bar{c}$ כאשר $\bar{c}=\text{const}$

ו- $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$:

$$\operatorname{grad}\left[(\bar{a}\cdot\bar{r})\cdot(\bar{b}\cdot\bar{r})\right]=(\bar{b}\cdot\bar{r})\cdot\operatorname{grad}(\bar{a}\cdot\bar{r})+(\bar{a}\cdot\bar{r})\cdot\operatorname{grad}(\bar{b}\cdot\bar{r})=(\bar{b}\cdot\bar{r})\cdot\bar{a}+(\bar{a}\cdot\bar{r})\cdot\bar{b}$$

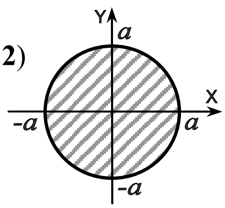
12. שינוי סדר האינטגרציה



1)

$$\int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$$

קביעת הגבולות: כאשר x משתנה מהנקודה $x=0$ עד לנקודה $x=1$ y משתנה מהקוו $y=0$ עד לקוו $y=1-x$ (את המשוואה האחרונה מקבלים ממשוואת הגבול העליון $x=1-y$).

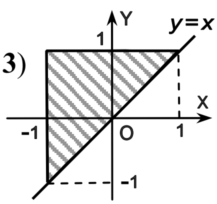


2)

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$$

כדי לעשות שרטוט ולמצוא את גבולות האינטגרציה יש לפתח את משוואות הקווים הנתונים:

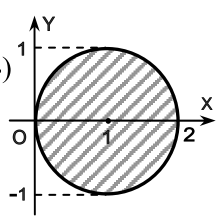
$$\left.\begin{array}{l} y=-\sqrt{a^2-x^2} \;\Rightarrow\; x^2+y^2=a^2 \;\; (y\le 0) \\ y=\sqrt{a^2-x^2} \;\Rightarrow\; x^2+y^2=a^2 \;\; (y\ge 0) \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{a^2-y^2}$$



3)

$$\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{y} f(x,y)dx = \int_{-1}^{1} dx \int_{x}^{1} f(x,y)dy$$

קביעת גבולות האינטגרציה: כאשר x משתנה בתחום: $-1\le x\le 1$ y משתנה מהקוו $y=x$ עד לקוו $y=1$.



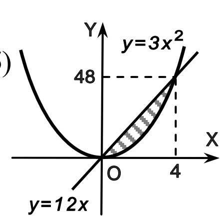
4)

$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

קביעת גבולות האינטגרציה:

$$y=-\sqrt{2x-x^2} \;\Rightarrow\; x^2-2x+y^2=0 \;\Rightarrow$$
$$\left(x^2-2x+1\right)+y^2=1 \;\Rightarrow\; (x-1)^2+y^2=1 \;\; (y\le 0)$$

מהמשוואה $y=\sqrt{2x-x^2}$ מתקבלת אותה משוואת המעגל (עבור $y\ge 0$). מכאן נובע ש- x כלוא בין הקווים $x=1\pm\sqrt{1-y^2}$ כאשר $-1\le y\le 1$.



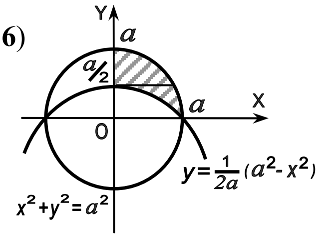
5)

$$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy = \int_0^{48} dy \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x,y)dx$$

קביעת גבולות האינטגרציה:

$$y=3x^2 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{y/3} \;\Rightarrow\; x=\sqrt{y/3}$$
$$y=12x \;\Rightarrow\; x=y/12$$

6)

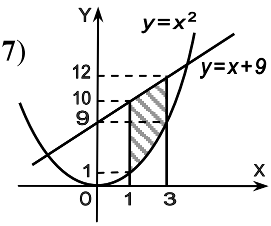


$$\int_0^a dx \int_{\frac{1}{2a}\left(a^2-x^2\right)}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^{a/2} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_{a/2}^{a} dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$$

קביעת גבולות האינטגרציה:

$$y=\frac{1}{2a}\left(a^2-x^2\right) \;\Rightarrow\; x=\sqrt{a^2-2ay} \;,\; y=\sqrt{a^2-x^2} \;\Rightarrow\; x=\sqrt{a^2-y^2}$$

7)

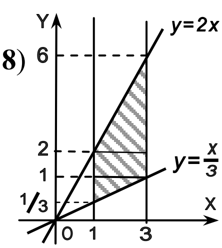


$$\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy = \int_1^9 dy \int_1^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_9^{10} dy \int_1^3 f(x,y)dx + \int_{10}^{12} dy \int_{y-9}^{3} f(x,y)dx$$

קביעת גבולות האינטגרציה:

$$y=x^2 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{y} \;\Rightarrow\; x=\sqrt{y} \;,\; y=x+9 \;\Rightarrow\; x=y-9$$

8)

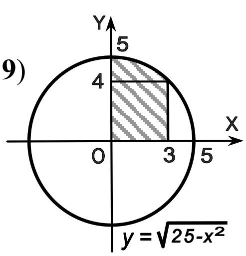


$$\int_1^3 dx \int_{x/3}^{2x} f(x,y)dy = \int_{1/3}^{1} dy \int_1^{3y} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_1^3 f(x,y)dx + \int_2^6 dy \int_{y/2}^{3} f(x,y)dx$$

קביעת גבולות האינטגרציה:

$$y=x/3 \;\Rightarrow\; x=3y \;,\; y=2x \;\Rightarrow\; x=y/2$$

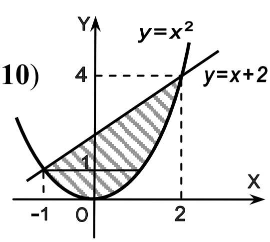
9)



$$\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^4 dy \int_0^3 f(x,y)dx + \int_4^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx$$

קביעת גבולות האינטגרציה: $y=\sqrt{25-x^2} \;\Rightarrow\; x=\sqrt{25-y^2}$

10)

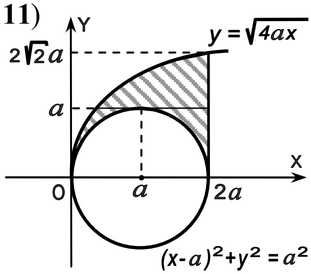


$$\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

קביעת גבולות האינטגרציה:

$$y=x^2 \;\Rightarrow\; x=\sqrt{y} \;,\; y=x+2 \;\Rightarrow\; x=y-2$$

11)



$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dy = \int_0^{a} dy \int_{y^2/4a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx +$$

$$+\int_0^{a} dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_a^{2\sqrt{2}a} dy \int_{y^2/4a}^{2a} f(x,y)dx$$

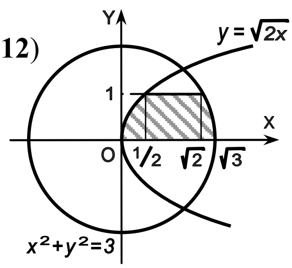
קביעת גבולות האינטגרציה:

$$y=\sqrt{2ax-x^2} \;\Rightarrow\; x^2-2ax+y^2=0 \;\Rightarrow$$

$$\left(x^2-2ax+a^2\right)+y^2=a^2 \;\Rightarrow\; (x-a)^2+y^2=a^2 \;\Rightarrow\; x=a\pm\sqrt{a^2-y^2} \;,$$

$$y=\sqrt{4ax} \;\Rightarrow\; x=y^2/4a$$

12)



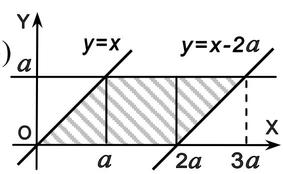
$$\int_0^{1} dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx = \int_0^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy +$$

$$+\int_{1/2}^{\sqrt{2}} dx \int_0^{1} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy$$

קביעת גבולות האינטגרציה:

$$x=\sqrt{3-y^2} \;\Rightarrow\; y=\sqrt{3-x^2} \;,\; x=y^2/2 \;\Rightarrow\; y=\sqrt{2x}$$

13)

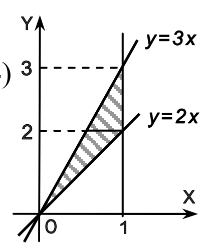


$$\int_0^{a} dx \int_0^{x} f(x,y)dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{a} f(x,y)dy +$$

$$+\int_{2a}^{3a} dx \int_{x-2a}^{a} f(x,y)dy = \int_0^{a} dy \int_y^{y+2a} f(x,y)dx$$

קביעת גבולות האינטגרציה:
$$y=x \;\Rightarrow\; x=y \;,\; y=x-2a \;\Rightarrow\; x=y+2a$$

14)

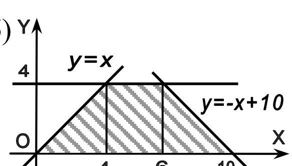


$$\int_0^{2} dy \int_{y/3}^{y/2} f(x,y)dx + \int_2^{3} dy \int_{y/3}^{1} f(x,y)dx = \int_0^{1} dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$$

קביעת גבולות האינטגרציה:

$$x=y/3 \;\Rightarrow\; y=3x \;,\; x=y/2 \;\Rightarrow\; y=2x$$

15)



$$\int_0^{4} dx \int_0^{x} f(x,y)dy + \int_4^{6} dx \int_0^{4} f(x,y)dy +$$

$$+\int_6^{10} dx \int_0^{10-x} f(x,y)dy = \int_0^{4} dy \int_y^{10-y} f(x,y)dx$$

קביעת גבולות האינטגרציה:
$$y=x \;\Rightarrow\; x=y \;,\; y=10-x \;\Rightarrow\; x=10-y$$

$$\textbf{9)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{2n}}{\sqrt[n]{n^n+1}} \quad\Rightarrow\quad u_n=\frac{3^n x^{2n}}{\sqrt[n]{n^n+1}}=\frac{3^n x^{2n}}{\sqrt[n]{n^n\left(1+1/n^n\right)}}=\frac{3^n x^{2n}}{n\left(1+1/n^n\right)^{1/n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=3|x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n\left(1+1/n^n\right)^{1/n}}}=3|x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+1/n^n\right)^{1/n^2}}=$$

$$=3|x|^2\cdot1\cdot1=3|x|^2 \quad\Rightarrow\quad 3|x|^2<1 \quad\Rightarrow\quad -1/\sqrt{3}<x<1/\sqrt{3}$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad\Rightarrow\quad u_n=\frac{3^n\left(1/3\right)^n}{\sqrt[n]{n^n+1}}=\frac{1}{n\left(1+1/n^n\right)^{1/n}} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(1+1/n^n\right)^{1/n}}$$

הטור המספרי מתבדר לפי קריטריון ההשוואה (השוואה עם טור הרמוני). לכן הטור הנתון מתכנס בתחום $-1/\sqrt{3}<x<1/\sqrt{3}$.

$$\textbf{10)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt[n]{n^{2n}-1}} \quad\Rightarrow\quad u_n=\frac{(x+1)^n}{\sqrt[n]{n^{2n}-1}}=\frac{(x+1)^n}{\sqrt[n]{n^{2n}\left(1+1/n^{2n}\right)}}=\frac{(x+1)^n}{n^2\left(1+1/n^{2n}\right)^{1/n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|}{\sqrt[n]{n^2\left(1+1/n^{2n}\right)^{1/n}}}=|x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+1/n^{2n}\right)^{1/n^2}}=$$

$$=|x+1|\cdot1\cdot1=|x+1| \quad\Rightarrow\quad |x+1|<1 \quad\Rightarrow\quad -2<x<0$$

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n^{2n}-1}}=\frac{1}{n^2\left(1+1/n^{2n}\right)^{1/n}} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\left(1+1/n^{2n}\right)^{1/n}}$$

הטור המספרי מתכנס לפי קריטריון ההשוואה (השוואה עם הטור המתכנס $\sum\frac{1}{n^2}$).

$$x=-2 \quad\Rightarrow\quad u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^{2n}-1}} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\left(1+1/n^{2n}\right)^{1/n}} \quad\Rightarrow$$ (מתכנס בהחלט)

הטור הנתון מתכנס בתחום $-2\le x\le 0$.

$$\textbf{11)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{\ln^4 n} \quad\Rightarrow\quad u_n=\frac{(-1)^n x^{2n}}{\ln^4 n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=|x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{\ln n})^4}=|x|^2\cdot1=|x|^2 \quad\Rightarrow\quad |x|^2<1 \quad\Rightarrow\quad -1<x<1$$

כאשר $x=\pm1$, הטור המספרי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln^4 n}$ מתכנס, כי מתקיימות הדרישות של משפט לייבניץ:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^4 n}=0 \quad,\quad b)\ \frac{1}{\ln^4 2}>\frac{1}{\ln^4 3}>\frac{1}{\ln^4 4}>\ \ldots$$

לכן הטור הנתון מתכנס בתחום $-1\le x\le 1$.

$$12)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\sqrt{\ln n}} \quad\Rightarrow\quad u_n=\frac{(x-3)^n}{n\sqrt{\ln n}} \quad,\quad u_{n+1}=\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|^{n+1}n\sqrt{\ln n}}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}|x-3|^n}=|x-3|\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)\sqrt{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}\right]=$$

$$=|x-3|\cdot 1\cdot\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=|x-3|\cdot\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)}}=|x-3|\cdot\sqrt{1}=|x-3| \quad\Rightarrow$$

$$|x-3|<1 \quad\Rightarrow\quad 2<x<4 \qquad\Rightarrow\quad x=4 \;\Rightarrow\; u_n=\frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{n\sqrt{\ln n}}=\lim_{N\to\infty}\int_2^{N}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln n}}=2\lim_{N\to\infty}\sqrt{\ln n}\Big|_2^N=2\lim_{N\to\infty}\left(\sqrt{\ln N}-\sqrt{\ln 2}\right)=\infty \quad\Rightarrow$$ (מתבדר)

בקצה השמאלי $x=2$ הטור המספרי המתקבל $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ מתכנס לפי משפט לייבניץ.

לכן הטור הנתון מתכנס בתחום $2\le x<4$.

$$13)\ \sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{e^n}\right)^n \quad\Rightarrow\quad u_n=n!\left(\frac{x}{e^n}\right)^n=\frac{n!}{e^{n^2}}x^n \quad,\quad u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{e^{(n+1)^2}}x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot e^{n^2}}{e^{(n+1)^2}\cdot n!}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^{(n+1)^2-n^2}}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^{2n+1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2e^{2n+1}}=0<1$$

הטור הנתון מתכנס על כל ציר המספרים.

$$14)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(e^n+1)} \quad\Rightarrow\quad u_n=\frac{x^n}{n(e^n+1)} \quad,\quad u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)(e^{n+1}+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n(e^n+1)}{(n+1)(e^{n+1}+1)}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{e^n(1+e^{-n})}{e^{n+1}(1+e^{-n-1})}=$$

$$=\frac{|x|}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/e^n}{1+1/e^{n+1}}=\frac{|x|}{e} \quad\Rightarrow\quad \frac{|x|}{e}<1 \quad\Rightarrow\quad -e<x<e$$

$$x=e \quad\Rightarrow\quad u_n=\frac{e^n}{n(e^n+1)}=\frac{1}{n(1+1/e^n)} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+1/e^n)}$$

הטור המספרי המתקבל מתבדר לפי קריטריון ההשוואה (השוואה עם טור הרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$).

29) $y' = \sin xy \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad n = 4$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4 + \ldots \quad , \quad \boxed{y(0) = 1}$$

$$y' = \sin xy \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'(0) = 0} \quad , \quad (y')' = (\sin xy)' \quad \Rightarrow \quad y'' = \cos xy(y + xy') \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{y''(0) = 1} \quad , \quad y''' = -\sin xy(y + xy')^2 + \cos xy(2y' + xy'') \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'''(0) = 0}$$

$$y^{IV} = -\cos xy(y + xy')^3 - \sin xy\left((y + xy')^2\right)' - \sin xy \cdot (xy)' \cdot (2y' + xy'') +$$

$$+\cos xy(3y'' + xy''') \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^{IV}(0) = 2}$$

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{4!}x^4 + \ldots \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \ldots$$

30) $y' - xy = e^y \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad n = 4$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4 + \ldots \quad , \quad \boxed{y(0) = 0}$$

$$y' = e^y + xy \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'(0) = 1} \quad , \quad (y')' = (e^y + xy)' \quad \Rightarrow \quad y'' = e^y y' + y + xy' \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{y''(0) = 1} \quad , \quad y''' = e^y\left(y'^2 + y''\right) + 2y' + xy'' \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'''(0) = 4}$$

$$y^{IV} = e^y\left(y'^3 + y'y''\right) + e^y\left(2y'y'' + y'''\right) + 3y'' + xy''' \quad \Rightarrow$$

$$y^{IV} = e^y\left(y'^3 + 3y'y'' + y'''\right) + 3y'' + xy''' \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^{IV}(0) = 11}$$

$$y(x) = x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \frac{11}{4!}x^4 + \ldots \quad \Rightarrow \quad y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{24}x^4 + \ldots$$

31) $y'' = x^2 y \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 1 \quad , \quad n = 5$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4 + \ldots , \quad \boxed{y(0) = 1} , \boxed{y'(0) = 1}$$

$$y'' = x^2 y \quad \Rightarrow \quad \boxed{y''(0) = 0} \quad , \quad (y'')' = (x^2 y)' \quad \Rightarrow \quad y''' = 2xy + x^2 y' \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'''(0) = 0}$$

$$y^{IV} = 2y + 2xy' + 2xy' + x^2 y'' = 2y + 4xy' + x^2 y'' \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^{IV}(0) = 2}$$

$$y^{V} = 2y' + 4y' + 4xy'' + 2xy'' + x^2 y''' = 6y' + 6xy'' + x^2 y''' \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^{V}(0) = 6}$$

$$y(x) = 1 + x + 0x^2 + 0x^3 + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{6}{5!}x^5 + \ldots \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 + x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + \ldots$$

פתרון המשוואה באמצעות "שיטת המקדמים הלא מוגדרים":

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots \quad , \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_0 = 1}$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots \quad , \quad y'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = 1}$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \ldots$$

נציב למשוואה הנתונה את y'' ו-y ונשווה את מקדמי החזקות בשני אגפי השוויון המתקבל:

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\ldots=x^2\left(1+x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots\right)$$

$x^0 \mid 2a_2=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_2=0}$

$x^1 \mid 6a_3=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_3=0}$

$x^2 \mid 12a_4=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_4=1/12}$

$x^3 \mid 20a_5=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_5=1/20} \qquad\Rightarrow\qquad y=1+x+\dfrac{1}{12}x^4+\dfrac{1}{20}x^5+\ldots$

32) $y''+\dfrac{1}{1-x}y=0 \ ,\ y(0)=0 \ ,\ y'(0)=1 \ ,\ n=5$

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4+\ldots\ ,\quad \boxed{y(0)=0}\ ,\ \boxed{y'(0)=1}$$

$y''+\dfrac{1}{1-x}y=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)y''=y \quad\Rightarrow\quad \boxed{y''(0)=0} \quad , \quad \left((x-1)y''\right)'=y' \quad\Rightarrow$

$y''+(x-1)y'''=y' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y'''(0)=-1} \quad , \quad \left(y''+(x-1)y'''\right)'=y'' \quad\Rightarrow$

$2y'''+(x-1)y^{IV}=y'' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^{IV}(0)=-2} \quad , \quad \left(2y'''+(x-1)y^{IV}\right)'=y''' \quad\Rightarrow$

$3y^{IV}+(x-1)y^{V}=y''' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^{V}(0)=-5}$

$$y(x)=x+0x^2-\frac{1}{3!}x^3-\frac{2}{4!}x^4-\frac{5}{5!}x^5+\ldots \qquad\Rightarrow\qquad y(x)=x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^5}{24}+\ldots$$

33) $y''-xy=0 \ ,\ y(0)=1 \ ,\ y'(0)=0 \ ,\ n=6$

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4+\ldots\ ,\quad \boxed{y(0)=1}\ ,\ \boxed{y'(0)=0}$$

$y''-xy=0 \quad\Rightarrow\quad y''=xy \quad\Rightarrow\quad \boxed{y''(0)=0} \quad , \quad y'''=y+xy' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y'''(0)=1}$

$y^{IV}=\left(y+xy'\right)' \quad\Rightarrow\quad y^{IV}=2y'+xy'' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^{IV}(0)=0}$

$y^{V}=\left(2y'+xy''\right)' \quad\Rightarrow\quad y^{V}=3y''+xy''' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^{V}(0)=0}$

$y^{VI}=\left(3y''+xy'''\right)' \quad\Rightarrow\quad y^{VI}=4y'''+xy^{IV} \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^{VI}(0)=4}$

$$y(x)=1+0x+0x^2+\frac{1}{3!}x^3+0x^4+0x^5+\frac{4}{6!}x^6+\ldots \qquad\Rightarrow\qquad y(x)=1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{180}+\ldots$$

34) $yy''-y'^2=0 \ ,\ y(0)=1 \ ,\ y'(0)=2 \ ,\ n=4$

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4+\ldots\ ,\quad \boxed{y(0)=1}\ ,\ \boxed{y'(0)=2}$$

$yy''=y'^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y''(0)=4} \quad , \quad \left(yy''\right)'=\left(y'^2\right)' \quad\Rightarrow\quad y'y''+yy'''=2y'y'' \quad\Rightarrow$

$yy'''=y'y'' \quad\Rightarrow\quad \boxed{y'''(0)=8} \quad , \quad \left(yy'''\right)'=\left(y'y''\right)' \quad\Rightarrow\quad y'y'''+yy^{IV}=y''^2+y'y''' \quad\Rightarrow$

$$yy^{IV} = y''^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^{IV}(0)=16}$$

$$y(x)=1+2x+\frac{4}{2!}x^2+\frac{8}{3!}x^3+\frac{16}{4!}x^4+\ldots \quad \Rightarrow \quad y(x)=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+\ldots$$

35) $y''+y'^2=2e^{-y}$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $n=4$

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4+\ldots, \quad \boxed{y(0)=0}, \boxed{y'(0)=2}$$

$$y''=2e^{-y}-y'^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y''(0)=-2} \quad , \; y'''=\left(2e^{-y}-y'^2\right)' \quad \Rightarrow$$

$$y'''=-2\left(e^{-y}y'+y'y''\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'''(0)=4} \quad , \; y^{IV}=-2\left(e^{-y}y'+y'y''\right)' \;\Rightarrow$$

$$y^{IV}=-2\left(-e^{-y}y'^2+e^{-y}y''+y''^2+y'y'''\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^{IV}(0)=-12}$$

$$y(x)=0+2x-\frac{2}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^3-\frac{12}{4!}x^4+\ldots \quad \Rightarrow \quad y(x)=2x-x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4+\ldots$$

ספרות

1. Berman G.N. A Problems Book in Mathematical Analysis. CBS Publishers & Distributors Pvt. Ltd., 2008

2. Demidovich B. Problems in Mathematical Analysis. Mir Publishers , 1989

3. Erdman J.M. Exercises and Problems in Calculus. Portland State University, 2010

4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, часть 1. Изд. МГУ, 2004

5. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, часть 2. Изд. МГУ, 2004