

חשבון דיפרנציאלי

פונקציות מעריכיות

1. (4 יח', חורף תשכ"ח - 68) חקור את הפונקציה $y = \frac{x^2}{e^x}$: א. תחום הגדרה ב. נקודות קיצון
 ג. תחומי עליה וירידה ד. חיתוך עם הצירים ה. ציור סקיצה של גרף הפונקציה
2. (4 יח', קיץ תשל"ב - 72) חקור את הפונקציה: $y = 4x^2 e^{-x}$: א. תחום הגדרה
 ב. חיתוך עם הצירים ג. נקודות קיצון ד. תחומי עליה וירידה ה. שרטוט סקיצת הגרף
3. (4 יח', חורף תשל"ח - 78) חקור את הפונקציה $y = x^2 e^x$: א. חיתוך עם הצירים
 ב. נקודות קיצון ג. תחומי עליה וירידה ד. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה
4. (4 יח', חורף תשמ"ט - 88) חקור את הפונקציה $y = x^3 e^{-x^2}$:
 א. תחום הגדרה ב. נקודות קיצון ופיתול
5. (4 יח', חורף תשנ"ב - 91) לפונקציה $y = 4xe^{-kx^2}$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = 1$.
 א. הראה ש- $k = \frac{1}{2}$. מצא את: ב. נקודות הקיצון ג. תחומי עליה וירידה

אמונה טפלה

פרופסור **נילס בוהר** (1885-1962) היה פיסיקאי דני ממוצא יהודי, מדען גרעין, חתן פרס נובל לפיסיקה (1922).
 במשרדו היתה תלויה פרסת סוס שאמונה טפלה מייחסת לה הגנה מפני 'עין הרע'.
 כשנשאל על-ידי מבקר נדהם האם הוא מאמין באותה אמונה טפלה,
 השיב בוהר שהוא בוודאי אינו מאמין בכך, אבל הוא שמע שזה עוזר גם אם אתה אינך מאמין . . .

תשבות

1. א. $\forall x$ ב. $\max(2, \frac{4}{e^2})$, $\min(0, 0)$ ג. $0 < x < 2$ ד. $(0, 0)$ ה. עמ' 133 (לא נדרש: $y = 0$ אסימפטוטה חד-צדדית)
 ז. $(x < 0) \cup (x > 2)$
2. א. $\forall x$ ב. $(0, 0)$ ג. $\max(2, \frac{16}{e^2})$, $\min(0, 0)$ ד. $0 < x < 2$ ה. עמ' 133
 ז. $(x < 0) \cup (x > 2)$
3. א. $(0, 0)$ ב. $\max(-2, \frac{4}{e^2})$, $\min(0, 0)$ ג. $-2 < x < 0$ ד. עמ' 133 (לא נדרש: $y = 0$ אסימפטוטה חד-צדדית)
 ז. $(x < -2) \cup (x > 0)$
4. א. $\forall x$ ב. פיתול: $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2\sqrt{2e}})$, $(\pm\sqrt{3}, \pm \frac{3\sqrt{3}}{e^3})$, $(0, 0)$
 ג. $\max(\sqrt{1.5}, \frac{1}{e^{1.5}})$, $\min(-\sqrt{1.5}, -\frac{1}{e^{1.5}})$ ציור (לא נדרש): עמ' 133
5. א. $\forall x$ ב. $\max(1, 4e^{-0.5})$, $\min(-1, -4e^{-0.5})$ ג. $-1 < x < 1$ ד. עמ' 133 (לא נדרש: $y = 0$ אסימפטוטה חד-צדדית, ציור (לא נדרש): עמ' 133)
 ז. $(x < -1) \cup (x > 1)$

3. א. נתונה פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא מקבילית.

נסמן: $\vec{SB} = \underline{u}$, $\vec{SD} = \underline{v}$, $\vec{SA} = \underline{w}$.

(1) הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את הוקטור \vec{SC} .

(2) נתון גם: $SA = SC$, $SD = SB$, $|\underline{u}| = a$, $|\underline{w}| = 2a$.

$\angle ASD = \alpha$, $\angle ASB = \beta$, $\angle DSB = 90^\circ$.

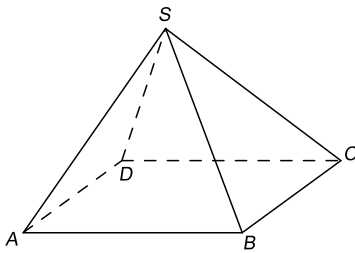
הראה כי $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$.

ב. z הוא מספר מרוכב.

(1) פתור את המשוואה $|z| + 2z = \sqrt{3}$.

(2) הראה כי כאשר n הוא מספר טבעי, אז z^{6n} יכול לקבל רק שני ערכים.

(אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.)



פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה פונקצית הנגזרת $f'(x) = \frac{2 \ln x (2 - \ln x)}{x (1 - \ln x)^2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של $f'(x)$.

(2) אחת משתי האסימפטוטות האנכיות של $f'(x)$ היא $x = 0$.

מצא את האסימפטוטה האנכית השניה.

(3) מצא את נקודות החיתוך של הגרף של $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ שלילית, ואת התחומים שבהם היא חיובית.

ב. ידוע כי לפונקצית הנגזרת $f'(x)$ יש גם אסימפטוטה אופקית, $y = 0$.

סרטט סקיצה של הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$.

ג. הישר $y = -4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x > e$.

(1) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה. נמק.

(2) הסבר מדוע $f(e^3) < -4$.

(3) השטח, המוגבל על-ידי הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$ ועל-ידי ציר x

בתחום $e^2 \leq x \leq e^3$, שווה לחצי יחידה ריבועית. מצא את הערך של $f(e^3)$.

תשובות

3. א. (1) $\vec{SC} = \underline{u} - \underline{w} + \underline{v}$ (1) ב. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ (1) (2) $z^{6n} = (-1)^n$

4. א. (1) $(0 < x < e) \cup (x > e)$ (2) $x = e$ (3) $(1, 0)$, $(e^2, 0)$

(4) $+$: $(1 < x < e) \cup (e < x < e^2)$, $-$: $(0 < x < 1) \cup (x > e^2)$

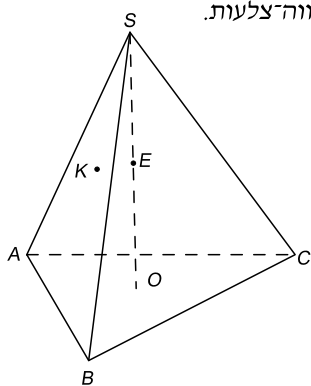
ב. בסוף הספר ג. $(e^2, -4)$ (1) $(e^3, -4.5)$ (3)

מבחן 17 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד א

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 ושאלה אחת מהשאלות 4-5.

פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. א. מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי של הנקודות, שהמרחק של כל אחת מהן מהישר $-5x + 12y + 13 = 0$, הוא 3 יחידות אורך.
 ב. מהי משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים בשתי נקודות למקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א?
 ג. האם ציר y יכול להשיק בנקודה $(0, 0)$ לאחד המעגלים שבסעיף ב? נמק.



2. נתונה פירמידה ישרה $SABC$, שבסיסה ABC הוא משולש שווה-צלעות.

- גובה הפירמידה הוא SO .
 נקודה E היא אמצע SO .
 נקודה F מקיימת: $\vec{SF} = t \vec{SC}$.
 נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{OS} = \underline{w}$.
 נקודה K מקיימת: $\vec{SK} = \frac{1}{9}\underline{u} - \frac{2}{9}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$.
 מצא את הערך של t , אם ידוע שהנקודות F , K , ו- E נמצאות על ישר אחד.

3. א. סרטט במישור גאוס סקיצה של המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z

המקיימים: $|z + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$. נמק.

ב. המקום הגאומטרי שבסעיף א נפגש עם ציר x בנקודה z_1 .

נתונה הנקודה $M(-3, \sqrt{3})$. נסמן ב- O את ראשית הצירים.

המספר המרוכב z_2 נמצא על המקום הגאומטרי שבסעיף א,

כך שהמרובע $z_1 M z_2 O$ הוא דלתון. מצא את הזווית החדה של הדלתון.

ג. (1) מצא את הארגומנט של z_2 .

(2) מביין המספרים המרוכבים z שבסעיף א, מהו המספר שיש לו הארגומנט הגדול ביותר?

מהו ארגומנט זה?

תשובות

1. א. $5x - 12y - 26 = 0$ (2), $5x - 12y - 52 = 0$ (1) ב. $5x - 12y - 13 = 0$ (הישר הנתון) ג. לא

2. $t = \frac{1}{3}$

3. א. $(x+3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 3$, בסוף הספר ב. 60° ג. $\arg(z_2) = 120^\circ$ (2) $\arg(z_1) = 180^\circ$