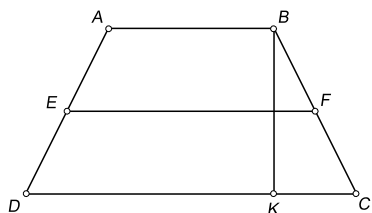


285. (005, חורף תשע"ב - 2012, **לוחמים**) בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel DC$),



BK הוא גובה לבסיס DC .

EF הוא קטע אמצעים.

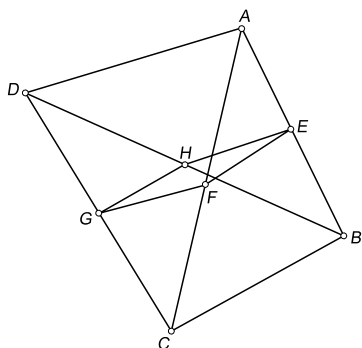
א. הוכח כי המשולש KFC הוא שווה-שוקיים.

ב. הוכח כי המרובע $EFKD$ הוא מקבילית.

ג. נתון: $DC = 2AB$.

חשב את היחס בין שטח המרובע $ABFE$ לבין שטח המרובע $EFCD$.

בעמוד זה חסרים הציורים בספר. הנה הציורים החסרים.



286. (804, קיץ תשע"ב - 2012, מועד א)

במרובע $ABCD$ נקודה E היא אמצע הצלע AB ,

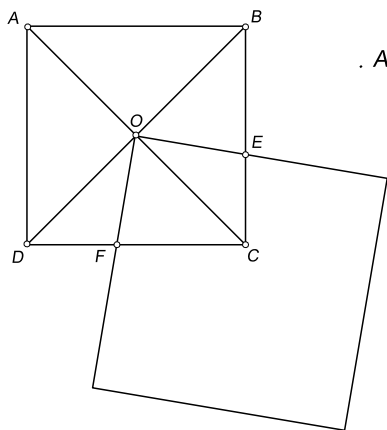
ונקודה G היא אמצע הצלע DC .

נקודה F היא אמצע האלכסון AC ,

ונקודה H היא אמצע האלכסון DB .

הוכח: א. $EF \parallel HG$.

ב. $\triangle EHG \cong \triangle EFG$.



287. (005, קיץ תשע"ב - 2012, מועד א) נתון ריבוע $ABCD$.

אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה O .

בנקודה O נמצא קדקוד של ריבוע אחר.

שתי צלעות סמוכות של הריבוע האחר חותכות את

הצלעות BC ו- DC בנקודות E ו- F בהתאמה.

א. הוכח כי $\triangle OEC \cong \triangle OFD$.

ב. נתון כי שטח הריבוע $ABCD$ הוא 100 סמ"ר.

חשב את שטח המרובע $OFCE$.

סדרה חשבונית

בפסוק ג' במזמור קכ"ט בתהילים יש 6 מילים.

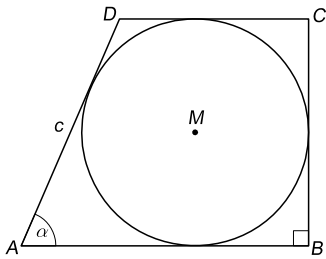
מספר האותיות שלהם הוא סדרה חשבונית:

המילה הראשונה בת שתי אותיות, השניה בת שלוש אותיות, השלישית בת ארבע אותיות,

וכך הלאה עד המילה השישית שלה שבע אותיות.

287. ב. $S_{OFCE} = 25$ (סמ"ר)

285. ג. $\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{5}{7}$



31. (4 יח', קיץ תשל"ב - 72 (א'), קיץ תשנ"א - 91 (א', ב'))

בטרפז ישר-זווית חסום מעגל בעל מרכז M,

אורך השוק הגדולה בו הוא c,

והזווית החדה שע"י הבסיס הגדול היא α .

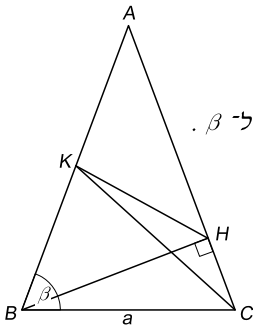
א. הבע את אורכי הבסיסים באמצעות c ו- α ,

והוכח, כי היחס בין אורך הבסיס הגדול

לבין אורכו של הבסיס הקטן הוא $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

ב. הראה כי כאשר $\alpha = 60^\circ$, היחס בין הבסיס הגדול לבסיס הקטן הוא $\sqrt{3}$.

שים לב: מרכז המעגל M הוא מפגש חוצי-זוויות הטרפז.



32. (4 יח', חורף תשל"ב - 72)

במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) שווה הבסיס a, והזווית לידו ל- β .

הקטע BH הוא גובה לשוק AC.

הקטע CK הוא תיכון לשוק AB.

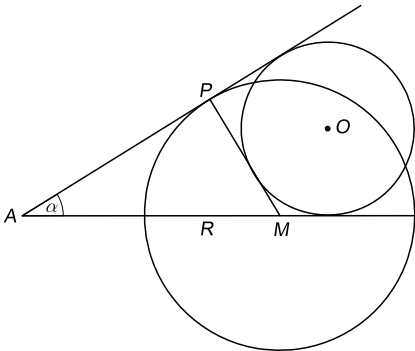
הבע את שטח משולש AKH באמצעות a ו- β .

33. (5 יח', אביב תשל"ב - 72)

במשולש ABC נתון: $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$.

במשולש חסום מעגל שמרכזו M. דרך מרכז זה M ודרך קצות הצלע BC העבירו מעגל.

הבע את רדיוס המעגל, החוסם את המשולש MBC, באמצעות a ו- α .



34. (5 יח', קיץ תשל"ב - 72)

נתון מעגל בעל מרכז M ורדיוס R.

דרך נקודה A מחוץ למעגל M העבירו משיק למעגל

בנקודה P שעליו, ואת הישר AM. $\angle PAM = \alpha$.

מעגל שמרכזו O נוגע בקטע PM

ובהמשכי הקטעים AP ו-AM.

הבע את רדיוס המעגל שמרכזו O באמצעות R ו- α .

תשובות

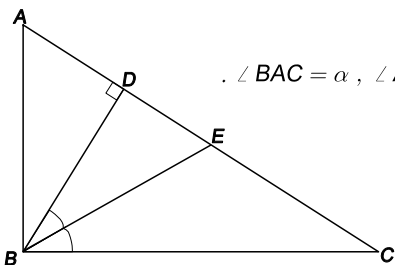
33. $R = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$ (יחידות אורך)

31. ב. $DC = c \sin \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2})$ (יחידות אורך)

(יחידות אורך) $AB = \frac{c}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha + 1)$

34. $R_O = \frac{R \sin 45^\circ \sin (45^\circ + \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ (יחידות ריבועיות)

32. $S_{\triangle AKH} = -\frac{a^2 \sin \beta \cos 2\beta}{8 \cos \beta}$



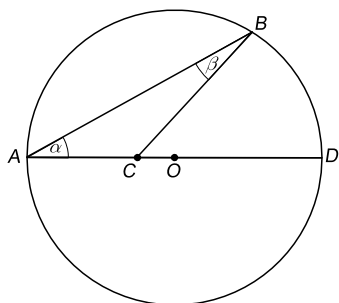
166. (4 יח', חורף תש"ס - 2001)

במשולש ישר-זווית ABC נתון: $AB = 6\text{ cm}$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$.

BD הוא גובה ליתר.

BE הוא חוצה-זווית $\angle DBC$.

הבע את אורך הקטע EC באמצעות α .



167. (4 יח', קיץ תשס"א - 2001)

הקדקודים A ו-B של משולש ABC

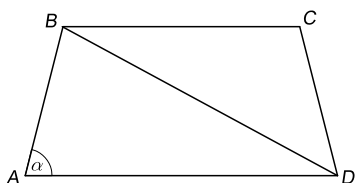
נמצאים על היקף מעגל שרדיוסו 8 cm ומרכזו O.

הקדקוד השלישי C נמצא על רדיוסו AO.

$\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$

א. הבע באמצעות α ו- β את שטח המשולש ABC.

ב. מהו היחס בין שטח המשולש ABD לשטח המשולש ABC?



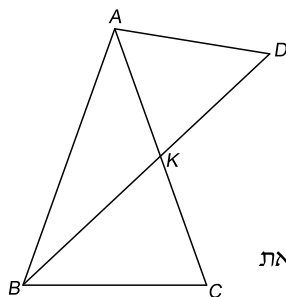
168. (4 יח', קיץ תשס"א - 2001, מועד ב')

בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB = CD$)

אורך הבסיס הגדול, AD, שווה לאורך האלכסון.

זווית הבסיס היא α ($\alpha > 60^\circ$).

בטא באמצעות α את היחס שבין שטח המשולש BCD לשטח המשולש ABD.



169. (5 יח', קיץ תשס"א - 2001, מועד ב')

במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$), BK הוא תיכון לשוק.

$\angle BAC = 40^\circ$. רדיוס המעגל החוסם את $\triangle ABC$ הוא $R = 10\text{ cm}$.

א. מצא את גודל הזווית BKC.

ב. ממשיכים את BK עד לנקודה D כך שרדיוס המעגל החוסם את

המשולש ABD הוא 12 cm . מצא את שטח המשולש AKD.

תשובות

166. $EC = 6 \tan \frac{\alpha}{2} \tan \alpha \text{ cm}$

167. א. $S_{\triangle ABC} = \frac{128 \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \text{ cm}^2}$ ב. $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ABC} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$

168. $S_{\triangle BCD} : S_{\triangle ABD} = -\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$

169. א. $\angle BKC = 67.52^\circ$ ב. $S_{\triangle AKD} = 45.56 \text{ cm}^2$

74. (004, קיץ תשס"ה - 2005, מועד א') נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{-8x+4}{x^2+2x+1}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k הישר $y = k$ אינו חותך את גרף הפונקציה. נמק.

75. (004, קיץ תשס"ה - 2005, מועד ב') נתונה הפונקציה: $y = 1 + \frac{Ax^2}{x^2-4}$ (A פרמטר).

לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית $y = 4$.

א. מצא את הערך של הפרמטר A.

ב. הצב בפונקציה את הערך של A שמצאת בסעיף א',

ומצא את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.

(4) שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוג הקיצון.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

76. (006, קיץ תשס"ה - 2005, מועד ב') נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+ax}{x^2+8}$, a פרמטר.

גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. הפונקציה הנתונה היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ (כלומר: $(g'(x) = f(x))$).

מצא את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$. נמק.

תשובות

74. א. (1) $x \neq -1$, (2) $(\frac{1}{2}, 0)$, (3) $x = -1$, $y = 0$, (4) $\min(2, -\frac{4}{3})$

ב. עמ' 250. ג. $k < -\frac{4}{3}$

75. א. $A = 3$, ב. (1) $x \neq \pm 2$, (2) $(\pm 1, 0)$, (3) $x = \pm 2$, (4) $\max(0, 1)$, ג. עמ' 250

76. א. $a = 8$, ב. $\max(4, 2)$, ג. $\min(-2, -1)$, ד. עמ' 250, $(-8, 0)$, $(0, 0)$

ה. $\nearrow (g): (x < -8) \cup (x > 0)$, $\searrow (g): -8 < x < 0$

חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות - פונקציות טריגונומטריות

1. (4 יח', קיץ תשכ"ז - 67) נתונה הפונקציה: $y = 2 \sin x + \sin 2x$.

א. מה הוא תחום קיום הפונקציה?

ב. מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?

ג. באיזה תחום חלקי של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ עולה הפונקציה ובאיזה תחום חלקי היא יורדת?

ד. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את ציר x , ובאיזה נקודה - את ציר y ?

ה. שרטט ע"ס התשובות בסעיפים ב'-ד' סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

2. (5 יח', אביב תשכ"ט - 69) נתונה הפונקציה: $y = \sin x \sin 2x$.

א. באיזה תחום מוגדרת הפונקציה?

ב. מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ג. באיזה תחום עולה הפונקציה ובאיזה תחום היא יורדת?

ד. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את ציר x ובאיזה נקודה - את ציר y ?

ה. שרטט על-סמך הסעיפים א' - ד' סקיצה של גרף הפונקציה.

3. (4 יח', קיץ תשכ"ט - 69, 5 יח', אביב תשל"א - 73) נתונה הפונקציה: $y = 3 \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

א. באיזה תחום מוגדרת הפונקציה?

ב. מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?

ג. באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ הפונקציה עולה, ובאילו היא יורדת?

ד. מה הן נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x ועם ציר y בתחום הנ"ל?

ה. שרטט ע"ס התשובות א'-ד' סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות

1. א. $\forall x$. ב. $\max_{ep.}(2\pi, 0)$, $\min(\frac{5}{3}\pi, -\frac{3}{2}\sqrt{3})$, $\max(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$, $\min_{ep.}(0, 0)$. ד. $(2\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, 0)$.

ג. $\searrow: (\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi) \cup (0 < x < \frac{\pi}{3})$, $\nearrow: \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$. ה. עמ' 277

2. א. $\forall x$. ד. $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\frac{3}{2}\pi, 0)$. ה. עמ' 277

ב. $\min_{ep.}(0, 0)$, $\max(0.96, \frac{4}{9}\sqrt{3})$, $\min(2.19, -\frac{4}{9}\sqrt{3})$, $\max(\pi, 0)$

$\min(4.1, -\frac{4}{9}\sqrt{3})$, $\max(5.33, \frac{4}{9}\sqrt{3})$, $\min_{ep.}(2\pi, 0)$

ג. $\nearrow: (4.1 < x < 5.33) \cup (2.19 < x < \pi) \cup (0 < x < 0.96)$

$\searrow: (5.33 < x < 2\pi) \cup (\pi < x < 4.1) \cup (0.96 < x < 2.19)$

3. א. $\forall x$. ב. $\max_{ep.}(2\pi, \sqrt{3})$, $\min(\frac{4}{3}\pi, -2\sqrt{3})$, $\max(\frac{\pi}{3}, 2\sqrt{3})$, $\min_{ep.}(0, \sqrt{3})$

ג. $\searrow: \frac{\pi}{3} < x < \frac{4}{3}\pi$, $\nearrow: (\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi) \cup (0 < x < \frac{\pi}{3})$

ד. $(0, \sqrt{3})$, $(\frac{11}{6}\pi, 0)$, $(\frac{5}{6}\pi, 0)$. ה. עמ' 277

4. (4 יח', חורף תש"ל - 70) נתונה הפונקציה: $y = \cos x + \cos 2x$.

- מאיזה תחום מוגדרת הפונקציה?
- מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
- באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ עולה הפונקציה ובאילו היא יורדת?
- באילו נקודות חותך גרף הפונקציה (בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$) את ציר x ובאילו את ציר y ?
- שרטט ע"פ הסעיפים א"ד סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

5. (4 יח', חורף תשל"א - 71, קיץ תשל"ג - 73) נתונה הפונקציה: $y = \sin 2x + 2 \cos x$.

- באיזה תחום מוגדרת הפונקציה?
- מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
- באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ עולה הפונקציה ובאילו היא יורדת?
- מה הן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x ועם ציר y בתחום הנ"ל?
- שרטט ע"ס התשובות א"ד סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

6. (5 יח', חורף תשל"א - 71) נתונה הפונקציה: $y = \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2}$.

- באיזה תחום מוגדרת הפונקציה?
- מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
- באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ עולה הפונקציה, ובאילו היא יורדת?
- באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את הצירים x ו- y בתחום הנ"ל?
- שרטט על-סמך הסעיפים א-ד סקיצה של גרף הפונקציה.

'בארץ ישראל - מי שאינו מאמין בניסים - אינו ריאלי'. (דוד בן גוריון)

תשובות

4. א. $\forall x$ ב. $\max_{\text{ep.}}(2\pi, 2)$, $\min(4.46, -\frac{9}{8})$, $\max(\pi, 0)$, $\min(1.82, -\frac{9}{8})$, $\max_{\text{ep.}}(0, 2)$

ד. $(0, 2)$, $(\frac{5}{3}\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\frac{\pi}{3}, 0)$

ג. $\nearrow: (\pi < x < 4.46) \cup (0 < x < 1.82)$, $\searrow: (1.82 < x < \pi) \cup (4.46 < x < 2\pi)$ ה. עמ' 277

5. א. $\forall x$ ב. $\max_{\text{ep.}}(2\pi, 2)$, $\max(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$, $\min(\frac{5}{6}\pi, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$, $\min_{\text{ep.}}(0, 2)$

ג. $(0, 2)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{3}{2}\pi, 0)$ ד. $\nearrow: (0 < x < \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5}{6}\pi < x < 2\pi)$, $\searrow: \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ ה. עמ' 277

6. א. $\forall x$ ב. $\max_{\text{ep.}}(2\pi, 2)$, $\min(\frac{3}{2}\pi, 0)$, $\max(\frac{5}{6}\pi, 2\frac{1}{4})$, $\min(\frac{\pi}{2}, 2)$, $\max(\frac{\pi}{6}, 2\frac{1}{4})$, $\min_{\text{ep.}}(0, 2)$

ד. $(0, 2)$, $(\frac{3}{2}\pi, 0)$ ה. עמ' 277

ג. $\nearrow: (\frac{5}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2})$, $\searrow: (\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi) \cup (\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi) \cup (0 < x < \frac{\pi}{6})$

7. (5 יח', קיץ תשל"ג - 73)

נתונה הפונקציה: $y = 2 \cos x - \frac{8}{3} \cos^3 x$.

- מצא את נקודות המינימום והמקסימום בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- באילו תחומים חלקיים של התחום הנתון עולה הפונקציה, ובאילו תחומים חלקיים היא יורדת?
- באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את ציר x ?
- שרטט על-סמך הסעיפים א' - ג' סקיצה של גרף הפונקציה הנתונה בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

8. (4-5 יח', קיץ תשל"ה - 75) נתונה הפונקציה: $y = 2 \sin x - \sin 2x$.

- מהו תחום הגדרת הפונקציה?
- מהן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
- באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ עולה הפונקציה ובאילו היא יורדת?
- שרטט ע"פ א'-ג' סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

9. (4 יח', קיץ תשל"ט - 79) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x}{2} + \cos x$.

- באיזו נקודה חותך גרף הפונקציה את ציר y ?
- מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
- באילו תחומים חלקיים של התחום הנתון עולה הפונקציה ובאיזה תחום חלקי היא יורדת?
- שרטט ע"ס א'-ג' סקיצה של גרף הפונקציה.
- האם חותך גרף הפונקציה את ציר x בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$ נמק.

באחד הויכוחים שהיו לגולדה מאיר בהיותה ראש הממשלה, עם שר החוץ האמריקאי הנרי קסינג'ר, אמר לה קסינג'ר: 'אני קודם כל מזכיר המדינה, אחר-כך אני אמריקאי ורק אחר-כך אני יהודי'. ענתה לו גולדה: 'זה בסדר, אנחנו, בעברית, קוראים מימין לשמאל...'. (סיפור דומה מסופר גם על בן גוריון שאמר זאת למי שהציג את עצמו כליברל-צרפתי-יהודי)

תשובות

7. א. $\min_{ep}(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$, $\max(-\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3})$, $\min(0, -\frac{2}{3})$, $\max(\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3})$. ג. $(0, -\frac{2}{3})$, $(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pm \frac{\pi}{6}, 0)$.

ב. $\angle: (0 < x < \frac{\pi}{3}) \cup (-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3})$, $\searrow: (\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{3} < x < 0)$. ד. עמ' 277

8. א. $\forall x$. ב. $\min_{ep}(0, 0)$, $\max(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2}\sqrt{3})$, $\min(\frac{4}{3}\pi, -\frac{3}{2}\sqrt{3})$, $\max_{ep}(2\pi, 0)$.

ג. $\angle: (0 < x < \frac{2}{3}\pi) \cup (\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi)$, $\searrow: \frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$. ד. עמ' 277

9. א. $(0, 1)$. ב. $\min_{ep}(0, 1)$, $\max(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\min(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\max_{ep}(2\pi, 1 + \pi)$.

ג. $\angle: (0 < x < \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5}{6}\pi < x < \pi)$, $\searrow: \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$. ד. עמ' 277. ה. לא

10. (4 יח', חורף תשמ"ז - 86) נתונה הפונקציה: $y = 2x - \lg x$, $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

א. מצא את נקודות המקסימום והמינימום בתחום הנ"ל.

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה בתחום הנ"ל.

ג. שרטט את גרף הפונקציה בתחום $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, ע"פ סעיפים א' ו-ב'.

11. (5 יח', חורף תשמ"ז - 86) השאלה הקודמת עבור התחום $-\frac{2}{5}\pi \leq x \leq \frac{2}{5}\pi$.

12. (4 יח', קיץ תש"ן - 90) מצא את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט

של הפונקציה: $f(x) = x + \cos 2x$ בקטע הסגור $[\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}]$.

13. (5 יח', קיץ תש"ן - 90, חורף תשס"א - 2001) נתונה הפונקציה $f(x) = a \sin^2 x - bx$

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{12}$ מקביל לציר x .

א. הוכח: $a = 2b$.

ב. נתון: $a > 0$. מצא את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה בקטע $[0, 2\pi]$.

ג. בעזרת הסעיפים הקודמים, או בדרך אחרת, הוכח: $2 \sin^2 x > x$ לכל x בתחום $\frac{\pi}{5} \leq x \leq \frac{7\pi}{12}$.

14. (4 יח', מבחן לדוגמה) הוכח כי הפונקציה $f(x) = \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{3}$ יורדת בתחום $\pi < x < 2\pi$.

15. (5 יח', קיץ תשנ"א - 91) נתונה הפונקציה $f(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$ בתחום $[0, 2\pi]$.

א. מצא את הנקודות בתחום שעבורן $f(x) = 0$.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות

10. א. $\max_{ep.}(-\frac{\pi}{3}, -0.36)$, $\min(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} + 1)$, $\max(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - 1)$, $\min_{ep.}(\frac{\pi}{3}, 0.36)$

ב. \searrow : $(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}) \cup (-\frac{\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{4})$, \nearrow : $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ עמ' 277

11. א. $\max_{ep.}(-\frac{2}{5}\pi, 0.56)$, $\min(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} + 1)$, $\max(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - 1)$, $\min_{ep.}(\frac{2}{5}\pi, -0.56)$

ב. \searrow : $(\frac{\pi}{4} < x < \frac{2}{5}\pi) \cup (-\frac{2}{5}\pi < x < -\frac{\pi}{4})$, \nearrow : $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ עמ' 277

12. $\min_{ab.}(\frac{5\pi}{12}, 0.44)$, $\max_{ab.}(\frac{\pi}{10}, 1.12)$

13. א. $\max_{ep.}(0, 0)$, $\min(\frac{\pi}{12}, -0.064a)$, $\max(\frac{5\pi}{12}, 0.278a)$

ב. $\min(\frac{13\pi}{12}, -1.635a)$, $\max(\frac{17\pi}{12}, -1.292a)$, $\min_{ep.}(2\pi, -2b\pi)$

ג. \searrow : $(0 < x < \frac{\pi}{12}) \cup (\frac{5\pi}{12} < x < \frac{13\pi}{12}) \cup (\frac{17\pi}{12} < x < 2\pi)$, \nearrow : $(\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}) \cup (\frac{13\pi}{12} < x < \frac{17\pi}{12})$

15. א. $(\frac{\pi}{3}, 0)$, $(\frac{5\pi}{3}, 0)$, $(\pi, 0)$

ב. $\max_{ab.}(0, 2)$, $\min(1.82, -1.13)$, $\max(\pi, 0)$, $\min(4.46, -1.13)$, $\max_{ab.}(2\pi, 2)$ עמ' 277

16. 5) יח', קיץ תשנ"ב - 92) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

א. הוכח כי $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ב. מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$.

ג. היעזר בסעיפים א' ו-ב', ותאר סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $-\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$.

ד. עבור אילו ערכים של m אין פתרון למשוואה: $\sin^4 x + \cos^4 x = m$ בתחום $-\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$?

17. 4) יח', חורף תשנ"ד - 93) נתונה הפונקציה $y = \sin 2x + a \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$.

א. חשב את a .

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום, וקבע את סוג הקיצון.

18. 4) יח', קיץ תשנ"ג - 93) נתונה הפונקציה $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

19. 5) יח', קיץ תשנ"ג - 93) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin x + \cos 2x$ בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$.

א. מצא את הנקודות בתחום שעבורן $f(x) = 0$.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

20. 4) יח', קיץ תשנ"ד - 94) נתונה הפונקציה: $y = 7 \sin x - \cos 2x - 3$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. מה הן נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים?

ב. מצא את שתי הנקודות בתחום הנתון שעבורן $y' = 0$.

ג. מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה בתחום הנתון.

תשובות

16. ב. $\max_{\text{ep.}}(0, 1), \min(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}), \max(\frac{\pi}{2}, 1), \min_{\text{ep.}}(\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{8})$ ג. עמ' 277 ז. $(m < \frac{1}{2}) \cup (m > 1)$

17. א. $a = 2$ ב. $\min_{\text{ep.}}(0, 2), \max(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\sqrt{3}), \min(\frac{5}{6}\pi, -\frac{3}{2}\sqrt{3}), \max_{\text{ep.}}(\pi, -2)$

18. א. $(0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0)$ ב. $\max_{\text{ep.}}(2\pi, 0), \min(\frac{5}{3}\pi, -\frac{3}{4}\sqrt{3}), \max(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}), \min_{\text{ep.}}(0, 0)$ ג. עמ' 277

19. א. $(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{7\pi}{6}, 0), (\frac{11\pi}{6}, 0)$

ב. $\max_{\text{ep.}}(2\pi, 1), \min(\frac{3\pi}{2}, -2), \max(2.8889, 1.12), \min_{\text{ep.}}(\frac{\pi}{2}, 0)$ ג. עמ' 277

20. א. $(0, -4), (\frac{\pi}{6}, 0), (\frac{5}{6}\pi, 0)$ ב. $(\frac{\pi}{2}, 5), (\frac{3}{2}\pi, -9)$ ג. $\max_{\text{ab.}} = 5, \min_{\text{ab.}} = -9$

21. (4 יח', חורף תשנ"ה - 95) נתונה הפונקציה: $y = \sin^2 x + p \sin x - 6$, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$.

א. חשב את p , ורשום את הפונקציה.

ב. מצא מה הם שיעורי x של נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון.

22. (4 יח', חורף תשנ"ז - 97) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2 \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. מצא את שלוש הנקודות שעבורן $f'(x) = 0$ בתחום הנתון.

ב. לגבי כל אחת משלוש הנקודות (שמצאת בסעיף א') קבע אם היא נקודת מקסימום,

נקודת מינימום או שאינה נקודת קיצון.

23. (5 יח', חורף תשנ"ז - 97) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x - 2 \cos x + 1$, בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

א. מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום.

ב. באילו תחומים עולה הפונקציה ובאילו תחומים היא יורדת?

24. (4 יח', חורף תשנ"ח - 98) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \sin x$.

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה בקטע $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

25. (4 יח', קיץ תשנ"ט - 99) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin x + \frac{1}{a} \cos ax$, $0 < a < 2$.

לפונקציה נקודת קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{3}$.

א. מצא את הערך של a .

ב. קבע את הסוג של נקודת הקיצון ב- $x = \frac{\pi}{3}$ (מינימום או מקסימום).

26. (5 יח', קיץ תשס"ב - 2002 - מועד ב') נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.

עבור $0 \leq x \leq \pi$: א. מצא את שלוש האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר y .

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ג. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר x .

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תהליך

21. א. $p = -1$. ב. $\max: x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; $\max_{ep}: x = 0$; $\min: x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; $\min_{ep}: x = 2\pi$.

22. א-ב. $\min(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi - 2)$, $\neq \min \neq \max(\pi, \pi)$, $\max(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2)$.

23. א. $\max_{ep}(\frac{\pi}{2}, 0)$; $\min(\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{2})$, $\max(0, 0)$, $\min(-\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{2})$; $\min_{ep}(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

ב. $\searrow: (-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3}) \cup (0 < x < \frac{\pi}{3})$, $\nearrow: (-\frac{\pi}{3} < x < 0) \cup (\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2})$.

24. $\searrow: \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$, $\nearrow: 0 < x < \frac{\pi}{6}$. א. $a = \frac{1}{2}$. ב. \max .

26. א. $x = 1, x = \pi, x = \frac{\pi}{2}$. ב. $\min(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2})$. ג. $(\frac{3\pi}{4}, 0)$. ד. עמ' 278.

27. (4 יח', קיץ תשס"ג - 2003) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - 4 \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

מצא את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה בתחום הנתון.

28. (קיץ תשס"ג - 2003 - מועד ב') נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$.

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq \pi$, וקבע את סוגן.

(השתמש בזהות $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$.)

29. (שאלון 004, קיץ תשס"ד - 2004, מועד א')

נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 + \sin 3x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$

א. האם לפונקציה יש נקודות חיתוך עם ציר x? נמק.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

30. (שאלון 006, קיץ תשס"ד - 2004, מועד א')

נתונה הפונקציה $f(x) = a \sin^3 x - 3b \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$

ישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$, מקביל לציר x.

א. הראה כי $a = 4b$.

ב. נתון: $b > 0$. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון

(הבע באמצעות b לפי הצורך), וקבע את סוגן.

31. (שאלון 004, קיץ תשס"ד - 2004, מועד ב')

נתונה הפונקציה: $f(x) = x - \sin 2x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

א. מצא בתחום הנתון את שיעורי x של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. מצא את משוואות הישרים המשיקים לפונקציה בנקודות הקיצון שלה בתחום הנתון.

מספרי יחידה ראשוניים

המספר המורכב מפעמיים הספרה '1' או מ-19 או מ-317 או מ-1031 פעמים '1' - הוא מספר ראשוני

תשובות

27. $\min_{ab.} = 3, \max_{ab.} = 5$

28. $\min_{ep.}(0, -1), \max(\frac{\pi}{2}, 1), \min_{ep.}(\pi, -1)$

29. א. לא ב. $\min_{ep.}(0, 2), \max(\frac{\pi}{6}, 3), \min(\frac{\pi}{2}, 1), \max(\frac{5\pi}{6}, 3), \min_{ep.}(\pi, 2)$

30. ב. $\max(0, 0), \min(\frac{\pi}{6}, -b), \max(\frac{\pi}{2}, b), \min(\frac{5\pi}{6}, -b), \max(\pi, 0)$

31. א. $x_{\min(ep)} = -\frac{\pi}{2}, x_{\max} = -\frac{\pi}{6}, x_{\min} = \frac{\pi}{6}, x_{\max(ep)} = \frac{\pi}{2}$

ב. $x = -\frac{\pi}{6}: y = 0.3424, x = \frac{\pi}{6}: y = -0.3424$

32. (שאלון 006, קיץ תשס"ד - 2004, מועד ב)

נתונה הפונקציה: $y = \frac{x^2}{4} - \sin x$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. (1) מצא בתחום הנתון את שיעורי x ו- y של נקודות הפיתול של הפונקציה.

(2) מצא באילו תחומים הפונקציה קעורה כלפי מעלה (—),

ובאילו תחומים היא קעורה כלפי מטה (—).

ב. ידוע שבתחום הנתון הנגזרת של הפונקציה מתאפסת רק ב- $x = 1.025$ בקירוב.

על סמך הנתונים, ועל סמך סעיף א, שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

33. (שאלון 006, חורף תשס"ה - 2005) נתונה הפונקציה $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

א. גזור והוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא $y' = -\sin 4x$.

בתחום הנתון מצא את: ב. שיעורי x של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. שיעורי x של נקודות הפיתול של הפונקציה.

ד. התחומים שבהם הפונקציה קעורה כלפי מטה (—).

34. (שאלון 004, קיץ תשס"ה - 2005, מועד א) נתונה הפונקציה $f(x) = \cos 2x + a \sin x$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$ הוא $\sqrt{3}$.

א. מצא את a .

ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$, וקבע את סוגן.

35. (שאלון 004, קיץ תשס"ה - 2005, מועד ב) נתונה הפונקציה $y = 2 - 4 \sin 2x$ בתחום $0 < x < \pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של שתי נקודות הקיצון בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ג. העבירו משיקים לגרף הפונקציה בנקודות הקיצון שמצאת בסעיף ב'.

מצא את המרחק בין המשיקים.

תשובות

32. א. (1) $(\frac{11}{6}\pi, 8.79)$, $(\frac{7}{6}\pi, 3.86)$

(2) $\supseteq: \frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$, $\supseteq: (0 < x < \frac{7}{6}\pi) \cup (\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi)$, ב. עמ' 278

33. ב. $\max_{ep.}(0, 1)$, $\min(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$, $\max_{ep.}(\frac{\pi}{2}, 1)$, ג. $x_1 = \frac{\pi}{8}$, $x_2 = \frac{3\pi}{8}$

ד. $\supseteq: (0 < x < \frac{\pi}{8}) \cup (\frac{3\pi}{8} < x < \frac{\pi}{2})$

34. א. $a = 4$, ב. $\max_{ab.}(\frac{\pi}{2}, 3)$, $\min_{ab.}(\frac{3\pi}{2}, -5)$

35. א. $(0, 2)$, $(\frac{\pi}{12}, 0)$, $(\frac{5\pi}{12}, 0)$

ב. $\max_{ep.}(0, 2)$, $\min(\frac{\pi}{4}, -2)$, $\max(\frac{3\pi}{4}, 6)$, $\min_{ep.}(\pi, 2)$, ג. $d = 8$ (יחידות אורך)

41. (שאלון 006, קיץ תשס"ז - 2007, מועד א)

נתונה הפונקציה $f(x) = 8 \sin^2 x - \cos 4x$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{4\pi}{5}$.

א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. מצא את התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מעלה \cup ,

ואת התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מטה \cap בתחום הנתון.

ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0$ בתחום הנתון. נמק.

42. (שאלון 004, קיץ תשס"ז - 2007, מועד ב מיוחד)

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin 2x - 2 \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43. (שאלון 004, קיץ תשס"ז - 2007, מועד ב רגיל)

נתונה הפונקציה $f(x) = 5 \sin x - 2 \cos^2 x - 1$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. באחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x בתחום הנתון,

העבירו ישר משיק לגרף הפונקציה, ששיפועו חיובי.

מצא את משוואת הישר המשיק.

44. (שאלון 006, קיץ תשס"ז - 2007, מועד ב מיוחד) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{6} (\sin 4x - \cos 4x)$.

הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$ מקביל לישר $x + y - \frac{\pi}{2} = 0$.

א. מצא את ערך הפרמטר b .

ב. מצא את תחומי העליה של הפונקציה בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

ג. עבור איזה ערך של m יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק שלושה פתרונות בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$?

תשובות

41. א. $\min_{ep.}(0, -1)$, $\max(\frac{\pi}{2}, 7)$, $\min_{ep.}(\frac{4\pi}{5}, 3.59)$

ב. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{5}$, \cap ; $0 < x < \frac{\pi}{6}$, \cup . אחד

42. א. $(0, -2)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{3\pi}{2}, 0)$

ב. $\min_{ep.}(0, -2)$, $\max(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$, $\min(\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$, $\max_{ep.}(2\pi, -2)$ ג. עמ' 278

43. א. $(\frac{5\pi}{6}, 0)$, $(\frac{\pi}{6}, 0)$, $(0, -3)$ ב. $y = \frac{7\sqrt{3}}{2}x - \frac{7\sqrt{3}\pi}{12} = 6.06x - 3.17$

44. א. $b = 4$ ב. $(\frac{7}{16}\pi < x < \frac{\pi}{2}) \cup (0 < x < \frac{3}{16}\pi)$ ג. $m = -\frac{1}{4}$

