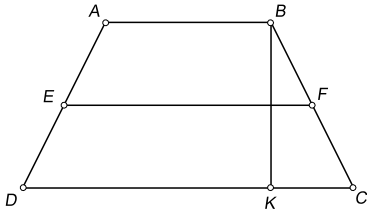


285. (005, חורף תשע"ב - 2012, לוחמים) בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel DC$),



BK הוא גובה לבסיס DC.

EF הוא קטע אמצעים.

א. הוכח כי המשולש KFC הוא שווה-שוקיים.

ב. הוכח כי המרובע EFKD הוא מקבילית.

ג. נתון: $DC = 2AB$.

חשב את היחס בין שטח המרובע ABFE לשטח המרובע EFCD.

בעמוד זה חסרים הציורים בספר. הנה הציורים החסרים.

286. (804, קיץ תשע"ב - 2012, מועד א)

במרובע ABCD נקודה E היא אמצע הצלע AB,

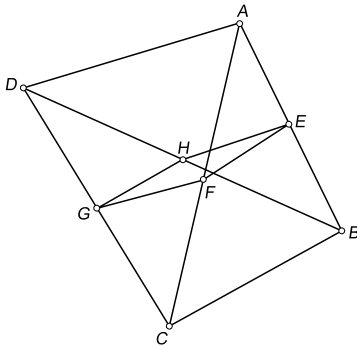
ונקודה G היא אמצע הצלע DC.

נקודה F היא אמצע האלכסון AC,

ונקודה H היא אמצע האלכסון DB.

הוכח: א. $EF \parallel HG$.

ב. $\triangle EHG \cong \triangle EFG$.



287. (005, קיץ תשע"ב - 2012, מועד א) נתון ריבוע ABCD.

אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה O.

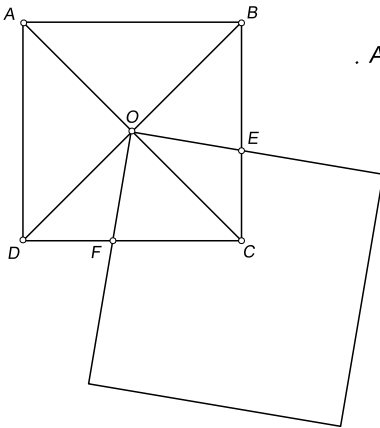
בנקודה O נמצא קדקוד של ריבוע אחר.

שתי צלעות סמוכות של הריבוע האחר חותכות את הצלעות BC ו-DC בנקודות E ו-F בהתאמה.

א. הוכח כי $\triangle OEC \cong \triangle OFD$.

ב. נתון כי שטח הריבוע ABCD הוא 100 סמ"ר.

חשב את שטח המרובע OFCE.



סדרה חשבונית

בפסוק ג' במזמור קכ"ט בתהילים יש 6 מילים.

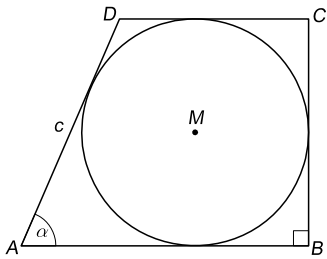
מספר האותיות שלהם הוא סדרה חשבונית:

המילה הראשונה בת שתי אותיות, השניה בת שלוש אותיות, השלישית בת ארבע אותיות,

וכך הלאה עד המילה השישית שלה שבע אותיות.

287. ב. $S_{OFCE} = 25$ (סמ"ר)

285. ג. $\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{5}{7}$



31. (4 יח', קיץ תשל"ב - 72 (א'), קיץ תשנ"א - 91 (א', ב'))

בטרפז ישר-זווית חסום מעגל בעל מרכז M ,

אורך השוק הגדולה בו הוא c ,

והזווית החדה שע"י הבסיס הגדול היא α .

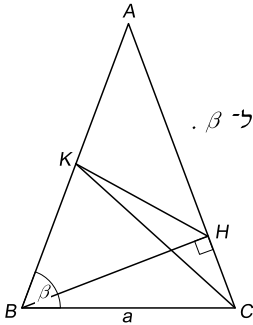
א. הבע את אורכי הבסיסים באמצעות c ו- α ,

והוכח, כי היחס בין אורך הבסיס הגדול

לבין אורכו של הבסיס הקטן הוא $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

ב. הראה כי כאשר $\alpha = 60^\circ$, היחס בין הבסיס הגדול לבסיס הקטן הוא $\sqrt{3}$.

שים לב: מרכז המעגל M הוא מפגש חוצי-זוויות הטרפז.



32. (4 יח', חורף תשל"ב - 72)

במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) שווה הבסיס ל- a , והזווית לידו ל- β .

הקטע BH הוא גובה לשוק AC .

הקטע CK הוא תיכון לשוק AB .

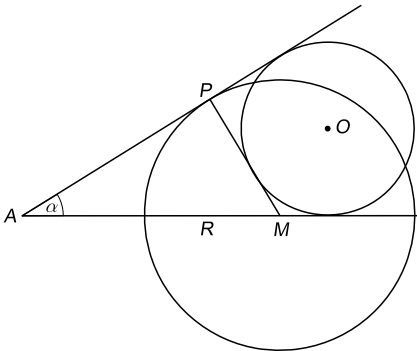
הבע את שטח משולש AKH באמצעות a ו- β .

33. (5 יח', אביב תשל"ב - 72)

במשולש ABC נתון: $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$.

במשולש חסום מעגל שמרכזו M . דרך מרכז זה M ודרך קצות הצלע BC העבירו מעגל.

הבע את רדיוס המעגל, החוסם את המשולש MBC , באמצעות a ו- α .



34. (5 יח', קיץ תשל"ב - 72)

נתון מעגל בעל מרכז M ורדיוס R .

דרך נקודה A מחוץ למעגל M העבירו משיק למעגל

בנקודה P שעליו, ואת הישר AM . $\angle PAM = \alpha$.

מעגל שמרכזו O נוגע בקטע PM

ובהמשכי הקטעים AP ו- AM .

הבע את רדיוס המעגל שמרכזו O באמצעות R ו- α .

תשובות

33. $R = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$ (יחידות אורך)

31. ג. $DC = c \sin \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2})$ (יחידות אורך)

$AB = \frac{c}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha + 1)$ (יחידות אורך)

34. $R_O = \frac{R \sin 45^\circ \sin (45^\circ + \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ (יחידות ריבועיות)

32. $S_{\triangle AKH} = -\frac{a^2 \sin \beta \cos 2\beta}{8 \cos \beta}$

74. (004, קיץ תשס"ה - 2005, מועד א') נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{-8x+4}{x^2+2x+1}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k הישר $y = kx$ אינו חותך את גרף הפונקציה. נמק.

75. (004, קיץ תשס"ה - 2005, מועד ב') נתונה הפונקציה: $y = 1 + \frac{Ax^2}{x^2-4}$ (A פרמטר).

לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית $y = 4$.

א. מצא את הערך של הפרמטר A.

ב. הצב בפונקציה את הערך של A שמצאת בסעיף א',

ומצא את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.

(4) שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוג הקיצון.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

76. (006, קיץ תשס"ה - 2005, מועד ב') נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+ax}{x^2+8}$, פרמטר a.

גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. הפונקציה הנתונה היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ (כלומר: $g'(x) = f(x)$).

מצא את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$. נמק.

תשובות

74. א. (1) $x \neq -1$, (2) $(\frac{1}{2}, 0)$, (3) $x = -1, y = 0$, (4) $\min(2, -\frac{4}{3})$

ב. עמ' 250. ג. $k < -\frac{4}{3}$

75. א. A = 3. ב. (1) $x \neq \pm 2$, (2) $(\pm 1, 0)$, (3) $x = \pm 2$, (4) $\max(0, 1)$. ג. עמ' 250

76. א. a = 8. ב. $\max(4, 2)$, $\min(-2, -1)$. ג. $(0, 0)$. ד. עמ' 250

ה. $\nearrow (g): (x < -8) \cup (x > 0)$, $\searrow (g): -8 < x < 0$

חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות - פונקציות טריגונומטריות

1. (4 יח', קיץ תשכ"ז - 67) נתונה הפונקציה: $y = 2 \sin x + \sin 2x$.

- א. מה הוא תחום קיום הפונקציה?
- ב. מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
- ג. באיזה תחום חלקי של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ עולה הפונקציה ובאיזה תחום חלקי היא יורדת?
- ד. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את ציר x, ובאיזה נקודה - את ציר y?
- ה. שרטט ע"ס התשובות בסעיפים ב'-ד' סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

2. (5 יח', אביב תשכ"ט - 69) נתונה הפונקציה: $y = \sin x \sin 2x$.

- א. באיזה תחום מוגדרת הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
- ג. באיזה תחום עולה הפונקציה ובאיזה תחום היא יורדת?
- ד. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את ציר x ובאיזה נקודה - את ציר y?
- ה. שרטט על-סמך הסעיפים א' - ד' סקיצה של גרף הפונקציה.

3. (4 יח', קיץ תשכ"ט - 69, 5 יח', אביב תשל"א - 73) נתונה הפונקציה: $y = 3 \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

- א. באיזה תחום מוגדרת הפונקציה?
- ב. מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה הנתונה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
- ג. באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ הפונקציה עולה, ובאילו היא יורדת?
- ד. מה הן נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x ועם ציר y בתחום הנ"ל?
- ה. שרטט ע"ס התשובות א'-ד' סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות

1. א. $\forall x$. ב. $\max_{ep.}(2\pi, 0)$, $\min(\frac{5}{3}\pi, -\frac{3}{2}\sqrt{3})$, $\max(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$, $\min_{ep.}(0, 0)$. ד. $(2\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, 0)$. ה. עמ' 277

ג. $\nearrow: \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$, $\searrow: (\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi) \cup (0 < x < \frac{\pi}{3})$

2. א. $\forall x$. ד. $(\frac{3}{2}\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, 0)$. ה. עמ' 277

ב. $\min_{ep.}(0, 0)$, $\max(0.96, \frac{4}{9}\sqrt{3})$, $\min(2.19, -\frac{4}{9}\sqrt{3})$, $\max(\pi, 0)$

ג. $\min(4.1, -\frac{4}{9}\sqrt{3})$, $\max(5.33, \frac{4}{9}\sqrt{3})$, $\min_{ep.}(2\pi, 0)$

ג. $\nearrow: (4.1 < x < 5.33) \cup (2.19 < x < \pi) \cup (0 < x < 0.96)$

ג. $\searrow: (5.33 < x < 2\pi) \cup (\pi < x < 4.1) \cup (0.96 < x < 2.19)$

3. א. $\forall x$. ב. $\max_{ep.}(2\pi, \sqrt{3})$, $\min(\frac{4}{3}\pi, -2\sqrt{3})$, $\max(\frac{\pi}{3}, 2\sqrt{3})$, $\min_{ep.}(0, \sqrt{3})$

ג. $\searrow: \frac{\pi}{3} < x < \frac{4}{3}\pi$, $\nearrow: (\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi) \cup (0 < x < \frac{\pi}{3})$

ד. $(0, \sqrt{3})$, $(\frac{11}{6}\pi, 0)$, $(\frac{5}{6}\pi, 0)$. ה. עמ' 277

4. (4 יח', חורף תש"ל - 70) נתונה הפונקציה: $y = \cos x + \cos 2x$.

- א. מאיזה תחום מוגדרת הפונקציה?
 ב. מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
 ג. באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ עולה הפונקציה ובאילו היא יורדת?
 ד. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה (בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$) את ציר x ובאילו - את ציר y ?
 ה. שרטט ע"פ הסעיפים א-ד' סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

5. (4 יח', חורף תשל"א - 71, קיץ תשל"ג - 73) נתונה הפונקציה: $y = \sin 2x + 2 \cos x$.

- א. באיזה תחום מוגדרת הפונקציה?
 ב. מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
 ג. באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ עולה הפונקציה ובאילו היא יורדת?
 ד. מה הן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x ועם ציר y בתחום הנ"ל?
 ה. שרטט ע"ס התשובות א-ד' סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

6. (5 יח', חורף תשל"א - 71) נתונה הפונקציה: $y = \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2}$.

- א. באיזה תחום מוגדרת הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
 ג. באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ עולה הפונקציה, ובאילו היא יורדת?
 ד. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את הצירים x ו- y בתחום הנ"ל?
 ה. שרטט על-סמך הסעיפים א-ד' סקיצה של גרף הפונקציה.

'בארץ ישראל - מי שאינו מאמין בניסים - אינו ריאלי'. (דוד בן גוריון)

תשובות

4. א. $\forall x$ ב. $\max_{ep.}(0, 2)$, $\min(1.82, -\frac{9}{8})$, $\max(\pi, 0)$, $\min(4.46, -\frac{9}{8})$, $\max_{ep.}(2\pi, 2)$

ד. $(0, 2)$, $(\frac{5}{3}\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\frac{\pi}{3}, 0)$

ג. \nearrow : $(\pi < x < 4.46) \cup (0 < x < 1.82)$, \searrow : $(1.82 < x < \pi) \cup (4.46 < x < 2\pi)$, ה. עמ' 277

5. א. $\forall x$ ב. $\max_{ep.}(2\pi, 2)$, $\min(\frac{5}{6}\pi, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$, $\max(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$, $\min_{ep.}(0, 2)$

ג. $(\frac{3}{2}\pi, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, 2)$ ד. \nearrow : $(0 < x < \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5}{6}\pi < x < 2\pi)$, \searrow : $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$, ה. עמ' 277

6. א. $\forall x$ ב. $\max_{ep.}(2\pi, 2)$, $\min(\frac{3}{2}\pi, 0)$, $\max(\frac{5}{6}\pi, 2\frac{1}{4})$, $\min(\frac{\pi}{2}, 2)$, $\max(\frac{\pi}{6}, 2\frac{1}{4})$, $\min_{ep.}(0, 2)$

ד. $(\frac{3}{2}\pi, 0)$, $(0, 2)$ ה. עמ' 277

ג. \nearrow : $(\frac{5}{6}\pi < x < 2\pi) \cup (\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi) \cup (0 < x < \frac{\pi}{6})$, \searrow : $(\frac{5}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2})$

7. (5 יח', קיץ תשל"ג - 73)

נתונה הפונקציה: $y = 2 \cos x - \frac{8}{3} \cos^3 x$.

- א. מצא את נקודות המינימום והמקסימום בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- ב. באילו תחומים חלקיים של התחום הנתון עולה הפונקציה, ובאילו תחומים חלקיים היא יורדת?
- ג. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את ציר x ?
- ד. שרטט על-סמך הסעיפים א' - ג' סקיצה של גרף הפונקציה הנתונה בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

8. (4-5 יח', קיץ תשל"ה - 75) נתונה הפונקציה: $y = 2 \sin x - \sin 2x$.

- א. מהו תחום הגדרת הפונקציה?
- ב. מהן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
- ג. באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ עולה הפונקציה ובאילו היא יורדת?
- ד. שרטט ע"פ א'-ג' סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

9. (4 יח', קיץ תשל"ט - 79) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x}{2} + \cos x$.

- א. באיזו נקודה חותך גרף הפונקציה את ציר y ?
- ב. מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
- ג. באילו תחומים חלקיים של התחום הנתון עולה הפונקציה ובאיזה תחום חלקי היא יורדת?
- ד. שרטט ע"ס א'-ג' סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. האם חותך גרף הפונקציה את ציר x בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$? נמק.

באחד הויכוחים שהיו לגולדה מאיר בהיותה ראש הממשלה, עם שר החוץ האמריקאי הנרי קיסינג'ר, אמר לה קיסינג'ר: 'אני קודם כל מזוכיר המדינה, אחר-כך אני אמריקאי ורק אחר-כך אני יהודי'. ענתה לו גולדה: 'זה בסדר, אנחנו, בעברית, קוראים מימין לשמאל...'.
(סיפור דומה מסופר גם על בן גוריון שאמר זאת למי שהציג את עצמו כליברל-צרפתי-יהודי)

תהליך

7. א. $\min_{ep}(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$, $\max(-\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3})$, $\min(0, -\frac{2}{3})$, $\max(\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3})$ ג. $(0, -\frac{2}{3})$, $(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pm \frac{\pi}{6}, 0)$

ב. $\angle: (0 < x < \frac{\pi}{3}) \cup (-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3})$, $\searrow: (\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{3} < x < 0)$ ד. עמ 277

8. א. $\forall x$ ב. $\min_{ep}(0, 0)$, $\max(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2}\sqrt{3})$, $\min(\frac{4}{3}\pi, -\frac{3}{2}\sqrt{3})$, $\max_{ep}(2\pi, 0)$

ג. $\angle: (0 < x < \frac{2}{3}\pi) \cup (\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi)$, $\searrow: \frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$ ד. עמ 277

9. א. $(0, 1)$ ב. $\min_{ep}(0, 1)$, $\max(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\min(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\max_{ep}(2\pi, 1 + \pi)$

ג. $\angle: (0 < x < \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5}{6}\pi < x < \pi)$, $\searrow: \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ ד. עמ 277 ה. לא