

## מספר מילים לפני

ספר זה מכיל שאלות ממבחני בגרות מהשנים 2013-2004 שנערכו במתכונת ה'צבירה', המתאימות לשאלון 482 (805) בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. לכל השאלות תשובות סופיות בעמוד השאלה ופתרון מלא בהמשך עם הפניה לעמוד המתאים (המספר המעובה בסוגריים משמאל לכל שאלה). בחלקו השני של ספר זה מובאים 36 מבחני הבגרות לשאלון 482 שנערכו עד כה במתכונת הנוכחית עם פתרון מלא. סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

$\forall$  - לכל,  $\in$  - שייך,  $\nearrow$  - עליה,  $\searrow$  - ירידה, even - זוגי, odd - לא זוגי  
 $\cup$  - איחוד: היחס 'או',  $\cap$  - חיתוך: היחס 'וגם',  $\emptyset$  - קבוצה ריקה (אין פתרון)  
 $\surd$  - אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח, ab. - מוחלט, ep. - נקודת קצה (end point)  
 'ללא הגבלת הכלליות' - קביעה ערך מייצג, במקום פרמטר (שאמור ל'היעלם' בהמשך).

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוטי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוטי עריכה. דיוקים נדרשים הושטמו בכונה.

**סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ-2012 עד 2017 (מועד א), כפי שהם בספר, נמצאים באתר ההוצאה במקושת (internet), בעלות שנתית מגוחכת של 20 (עשרים) שקלים בלבד. ראו נגב הכריכה.**

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי ברואל. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורה שריף אמארה מכפר נְלָפָה.

לאחר כל מבחן בגרות שיערך בשנה הקרובה (התש"פ - 2020), אינן בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את החללים שבין השאלות והפתרונות לקלחתי בהבזקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקדויות לאומיות או יהודיות.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על-ידי חברת 'קל-ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

## ב ה צ ל ח ה

א/י איטכ

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יצאו גם לשאלונים 382-481-581-582

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יצאו לשאלונים 481-482-581-582

© כל הזכויות על השאלות שמורות למדינת ישראל - משרד החינוך, התרבות והספורט

כל הזכויות על הקדך ועל הפתרונות שמורות למחבר

**אלגברה**

**גידול ודעיכה - שאלות** (כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 004).

1. (חורף ס"ז - 2006) במדינה מסוימת נערך לראשונה מפקד אוכלוסין.
  - 9 שנים אחרי מפקד האוכלוסין הראשון נערך מפקד שני, ונמצא שהאוכלוסיה גדלה פי שניים. הנח שהאוכלוסיה גדלה בצורה מעריכית.
    - א. פי כמה גדלה האוכלוסיה 17 שנים אחרי המפקד הראשון?
    - ב. כמה שנים אחרי המפקד הראשון גדלה האוכלוסיה ב-75%? (8)
  
2. (קיץ ס"ז - 2006, מועד א) אדם קנה מכונית חדשה. ערך המכונית יורד בצורה מעריכית.
  - כעבור 10 שנים מיום הקניה ירד ערך המכונית ב-75%.
    - א. כעבור כמה שנים מיום הקניה, ירד ערך המכונית ב-80%?
    - ב. בכמה אחוזים ירד ערך המכונית כעבור 6 שנים מיום הקניה? (8)
  
3. (קיץ ס"ז - 2006, מועד ב) אדם הפקיד בשני בנקים A ו-B, באותו יום את אותו סכום כסף בכל אחד מהבנקים הסכום גדל באחוז קבוע בכל שנה.
  - כעבור 7 שנים מיום ההפקדה היה הסכום בבנק A - 6580 ש', ובבנק B - 6150 ש'.
  - כעבור 3 שנים נוספות היה הסכום בבנק A - 7402.5 ש'.
  - מצא בכמה אחוזים גדל כל שנה סכום הכסף:
    - א. בבנק A
    - ב. בבנק B
  
4. (קיץ ס"ז - 2006, מועד מיוחד) מברכה מלאה שבה 1200 מ"ק מים מוציאים מים. כמות המים יורדת בצורה מעריכית. לאחר 10 שעות נשארים בברכה 719 מ"ק מים.
  - א. מצא את כמות המים שהוצאו מהברכה בשעתיים הראשונות.
  - ב. כעבור כמה שעות מתחילת הוצאת המים תתרוקן הברכה עד מחציתה? (9)
  
5. (סתיו ס"ז - 2006, מועד לוחמים) א. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא שלוש שנים.
  - (1) כעבור כמה זמן תקטן כמות החומר עד ל-20% מן הכמות ההתחלתית?
  - (2) אם כיום נותרה במעבדה כמות של 350 gr מחומר רדיואקטיבי זה, איזו כמות תנותר ממנו בעוד שנתיים? (9)



1. א. פי 3.7    ב. 7.27 (שנים)
2. א. 11.61 שנים    ב. 56.46%
3. א. 4%    ב. 3%
4. א.  $117 m^3$     ב. 13.51 (שעות)
5. א. (1)  $t = 6.97 \text{ years}$     ב. (2)  $m_2 = 220.49 \text{ gr}$

6. (חורף ס"ז - 2007) בתאריך 1/1/2000 התפרסמה תחזית בנוגע לגודל האוכלוסיה בעיר מסוימת. לפי תחזית זו, ב־ 12 השנים הקרובות יקטן כל שנה מספר התושבים בעיר ב־ 5%, וכעבור שנים אלה יגדל כל שנה מספר התושבים ב־ 3.8%. כעבור כמה שנים מיום התחזית יהיה מספר התושבים בעיר שווה למספר התושבים שהיו בעיר ביום התחזית? (9)

7. (קיץ ס"ז - 2007, מועד א) בתאריך 1/1/1990 קנה אדם מגרש באזור המיועד לבנייה. עד התאריך 1/1/1994 ירד ערך המגרש כל שנה באחוז קבוע. בסך הכל ב־ 4 השנים הראשונות מיום הקנייה ירד ערך המגרש ב־ 40%.

א. מצא את האחוז הקבוע שבו ירד ערך המגרש בכל שנה.

ב. בתאריך 1/1/1994 התקבל אישור לתכניות בנייה באזור. עם קבלת האישור עלה ערך המגרש כל שנה באחוז הגדול פי 1.5 מהאחוז שבו ירד ערכו כל שנה לפני כן.

מצא כעבור כמה שנים מתאריך 1/1/1994 יהיה ערך המגרש גדול ב־ 40% מערכו ביום הקניה. (10)

8. (קיץ ס"ז - 2007, מועד ב מיוחד)

תרופה מסוימת הנלקחת מדי יום בכמות קבועה, הורגת במשך 7 ימים חמישית מחיידקי מחלה. הרס החיידקים נעשה בצורה מעריכית.

כאשר כמות החיידקים יורדת ל־ 50% מהכמות ההתחלתית, ניתן להפחית את כמות התרופה היומית מבלי לפגוע בקצב הרס החיידקים.

א. לאחר כמה ימים בערך ניתן להפחית את כמות התרופה היומית?

ב. כאשר כמות החיידקים מגיעה ל־ 5% מהכמות ההתחלתית ניתן להפסיק את התרופה, והחיידקים הנותרים יומתו בעזרת שאריות התרופה שנשארה בגוף.

לאחר כמה ימים בערך אפשר להפסיק את מתן התרופה? (10)

9. (קיץ ס"ז - 2007, מועד ב)

בתאריך 1/12/06 היו בבריכה אחת 160,000 דגים, שכמותם גְדָלָה כל שבוע ב־ 2.5%. בבריכה שניה היו בתאריך זה 148,000 דגים, שכמותם גְדָלָה כל שבוע ב־ 3.5%.

א. אחרי כמה שבועות מהתאריך 1/12/06 יהיו כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?

ב. אחרי כמה שבועות מהיום שבו היו כמויות הדגים שוות,

תהיה כמות הדגים בבריכה השניה גדולה פי 2 מכמות הדגים בבריכה הראשונה? (10)



6. 28.5 שנים      8. א. 22 (ימים)      ב. 94 (ימים)

7. א. 12%      ב. 5.12 (שנים)      9. א. 8.03 weeks      ב. 71.39 weeks

- 11.** (חורף ס"ח - 2008) בתרבית אחת היו בשעה  $08^{00}$  בבוקר 32,000 חיידקים, ובשעה  $10^{00}$  היו בתרבית 38,720 חיידקים.  
בתרבית שניה היו בשעה  $08^{00}$  בבוקר 8,000 חיידקים, ובשעה  $10^{00}$  היו בתרבית 11,520 חיידקים.  
בכל אחת מהתרביות הגידול הוא מעריכי.
- א.** באיזו שעה בקירוב יהיה מספר החיידקים בתרבית הראשונה גדול פי 2 ממספר החיידקים בתרבית השנייה?
- ב.** בכמה אחוזים מספר החיידקים שהיו בשתי התרביות יחד בשעה  $09^{00}$  גדול ממספר החיידקים שהיו בשתי התרביות יחד בשעה  $08^{00}$  ? (11)
- 11.** (קיץ ס"ח - 2008, מועד לוחמים) ביום הקמת המדינה היו בשמורת טבע א' 300 ציפורים, ובשמורה ב' היו 400 ציפורים. לאחר 10 שנים היו בשמורה א' 500 ציפורים. קצב הגידול השנתי של מספר הציפורים בשמורה א' גדול פי 1.02 מקצב הגידול השנתי של מספר הציפורים בשמורה ב'.  
בשתי השמורות הגידול הוא מעריכי.  
מצא כעבור כמה שנים מיום הקמת המדינה יהיה מספר הציפורים בשמורה א' גדול פי 2 ממספר הציפורים בשמורה ב'. (11)
- 12.** (סתיו ס"ט - 2008) כמות חומר רדיואקטיבי פוחתת בצורה מעריכית. מ'  $1/10/2001$  עד  $1/10/2006$  פחתה כמות החומר הרדיואקטיבי ב' 40%.  
**א.** חשב בכמה אחוזים פוחתת כמות החומר הרדיואקטיבי בכל שנה.  
**ב.** כמה אחוזים מהחומר הרדיואקטיבי שהיה ב'  $1/10/2001$  נשארו ב'  $1/10/2005$  ?  
**ג.** חשב כעבור כמה שנים כמות החומר שהיתה ב'  $1/10/2006$  תפחת ב' 46% ? (11)
- 13.** (חורף ס"ט - 2009) כמויות של שני חומרים רדיואקטיביים, חומר א' וחומר ב', קטנות בצורה מעריכית. מ'  $250_{gr}$  של חומר ב' נשארו  $100_{gr}$  כעבור 5 שנים.  
**א.** מצא בכמה אחוזים קטנה הכמות של חומר ב' בכל שנה.  
**ב.** פרק הזמן שבסופו נשארת מחצית מהכמות ההתחלתית של חומר א' שווה לפרק הזמן שבסופו נשארת רבע מהכמות ההתחלתית של חומר ב'.  
מצא בכמה אחוזים קטנה הכמות של חומר א' בכל שנה. (12)



- 10.** א.  $16^{00}$  ב. 12%  
**12.** א. 9.71% ב. 66.46% ג. 6.03 (שנים)
- 13.** א. 16.74% ב. 8.75%  
**11.** 49.53 years

**14.** (חורף ס"ט - 2009, מועד מיוחד) אברהם הפקיד בתכנית חיסכון בבנק סכום של 20,000 ש', לפי ריבית של 4%. לאחר 5 שנות חיסכון הוא משך את כספו, הוסיף עליו עוד 6,000 ש', והפקיד את הסכום החדש באותה תכנית חיסכון.

כעבור כמה שנים מההפקדה האחרונה יהיה בתכנית החיסכון סכום של 40,000 ש' ? (12)

**15.** (חורף ס"ט - 2009, מועד לוחמים) א. פתור את המשוואה:  $\log_{25}(2x^2 - 5x + 4) \cdot \log_x 5 = 1$ .

ב. הכמות של חומר רדיואקטיבי פוחתת בצורה מעריכית.

אחרי 35 שנה נותרה מחצית מהכמות ההתחלתית של החומר הרדיואקטיבי.

מצא כעבור כמה שנים תיוותר רק  $\frac{1}{6}$  מהכמות ההתחלתית של החומר. (12)

**16.** (אביב ס"ח - 2008, לוחמים) כמות חיידקים בשתי תרביות, א ו ב, קטנה בצורה מעריכית.

בשעה  $09^{00}$  בבוקר היה בתרבית א מספר מסוים של חיידקים.

בשעה  $11^{00}$  בבוקר נותרו בה  $\frac{1}{4}$  ממספר החיידקים.

בשעה  $09^{00}$  בבוקר היו בתרבית ב 10,000 חיידקים.

בשעה  $11^{00}$  נותרו בה 6400 חיידקים.

א. מצא איזה חלק ממספר החיידקים המקורי נותר בתרבית א בשעה  $13^{00}$  בצהריים.

ב. בשעה  $13^{00}$  בצהריים היה מספר החיידקים בשתי התרביות שווה.

מצא את מספר החיידקים שהיה בתרבית א בשעה  $09^{00}$  בבוקר. (13)

**17.** (קיץ תש"ע - 2010, מועד ב)

נתונות כמויות שוות של שני חומרים רדיואקטיביים, חומר I וחומר II.

החומרים מתפרקים בצורה מעריכית.

כמות חומר I פחתה ב- 17% במשך 12 שנים.

כמות חומר II פחתה ב- 29% במשך 10 שנים.

מצא כעבור כמה שנים כמות חומר II תהיה קטנה פי 3 מכמות חומר I

(מהרגע שבו היו הכמויות שוות). (13)

המתמטיקה - מלכת המדעים ושפתם

תשובות

**14.** 7.05 (שנים) **15.** א.  $x = 4$  ב.  $t = 90.52$  years

**16.** א.  $\frac{1}{16}$  ב. 65,536 (חיידקים)

**17.**  $t = 58.56$  (שנים)

18. (קיץ תש"ע - 2010, לוחמים)

חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית.

מחודש ינואר בשנת 2001 עד חודש ינואר בשנת 2004 קטנה כמות החומר ב־ 14%.

א. מצא בכמה אחוזים קטנה כמות החומר הרדיואקטיבי מדי שנה.

ב. כעבור כמה שנים תקטן ב־ 40% כמות החומר הרדיואקטיבי שנמדדה בינואר 2001?

ג. אם בינואר 2001 היו 220 גרם חומר רדיואקטיבי,

כמה גרם מהחומר יישארו בינואר 2012? (13)

19. (קיץ תשע"א - 2011, לוחמים)

ערך הקרקע באזור מסוים עלה באחוז קבוע בכל שנה, במשך 5 שנים,

החל מינואר 2000 עד ינואר 2005.

בינואר 2005 היה ערך הקרקע גבוה ב־ 40% מערכה בינואר 2000.

מינואר 2005 והלאה ירד ערך הקרקע באחוז הגדול פי שניים

מאחוז העלייה שלו מדי שנה ב־ 5 השנים הקודמות.

א. בכמה אחוזים עלה ערך הקרקע מדי שנה ב־ 5 השנים הראשונות?

ב. באיזו שנה הגיע ערך הקרקע ל־ 89% מערכה בינואר 2000? (13)

20. (קיץ תש"ע - 2010, מועד א - המבחן הגנוז)

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי א' הוא  $\frac{1}{2}$  שעה.

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי ב' הוא שעה אחת.

חומר א' דועך כל שעה פי  $q_1$ , וחומר ב' דועך כל שעה פי  $q_2$ .

א. מצא את  $q_1$  ואת  $q_2$ .

ב. נתונה תערובת המכילה kg חומר א' ו־  $7 \text{ kg}$  חומר ב'.

(בתערובת מתרחשת רק התפרקות רדיואקטיבית).

כעבור כמה זמן סכום הכמויות של שני החומרים בתערובת יהיה  $6 \text{ kg}$ ? (14)

המספר הראשוני הגדול ביותר שיש לו 20 ספרות הוא: 99, 999, 999, 999, 999, 999, 989



18. א. 5% ב. 9.96 (שנים) ג.  $125.14 \text{ gr}$

19. א. 6.96% ב. 2008

20. א.  $q_1 = 0.25, q_2 = 0.5$  ב.  $t = 0.74 \text{ hours} = 44.22 \text{ minutes}$

21. (סתיו תש"עב - 2011, לווחמים)

אדם קנה בית והחליט לשפץ אותו.

לאחר סיום השיפוצים החל מחיר הבית לעלות בצורה מעריכית באחוז קבוע מידי שנה.

כעבור 4 שנים היה מחיר הבית גבוה ב־ 25% ממחירו לאחר סיום השיפוצים.

א. כעבור כמה שנים היה מחיר הבית גבוה פי 1.48 ממחירו לאחר סיום השיפוצים?

ב. פי כמה התייקר הבית 15 שנים אחרי סיום השיפוצים?

ג. בכמה אחוזים התייקר הבית 15 שנים אחרי סיום השיפוצים? (14)

22. (חורף תשע"ב - 2012, לווחמים)

סכומי כסף הופקדו בשני חשבונות בנק. הסכומים גדלים בכל שנה באחוז קבוע.

בחשבון I הופקדו  $a$  שקלים שגדלים ב־  $p\%$  בשנה.

כעבור שנתיים היו בחשבון 11,664 שקלים, כעבור 5 שנים נוספות היו בחשבון 17,138 שקלים.

א. (1) מצא את  $p$ , אחוז הגדילה לשנה בחשבון I.

(2) מצא את הערך של  $a$ .

ב. בחשבון II הופקדו  $a$  שקלים, והם גדלים ב־  $m\%$  בשנה.

כעבור שנתיים היו בחשבון II 11,881 שקלים.

כעבור כמה שנים מיום ההפקדה, יהיה בחשבון II סכום הגדול ב־ 20% מהסכום שיהיה

באותו זמן בחשבון I? (14)

23. (קיץ תשע"ב - 2012, מועד א)

ב. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי מסוים הוא 14 דקות.

כמות החומר דועכת בצורה מעריכית. ברגע מסוים היו לחוקר 1000 גרם של החומר.

(1) כמה גרם של החומר יהיו לחוקר כעבור 28 דקות? (15)

(2) כעבור כמה דקות (מהרגע שהיו לו 1000 גרם) יהיו לחוקר פחות מ־20 גרם חומר.

המספר הראשוני ה־230 מכיל 6400 ספרות, מהן 6399 ספרות '9', ורק ספרה '8' אחת!



21. א.  $t = 7.03$  (שנים) ב. 2.3089 ג. 130.89%

22. א. (1)  $p = 8$  (2) 10,000 (שקלים) ב. 19.78 (שנים)

23. ב. (1) 250<sub>gr</sub> (2) 79.01 (דקות)

אלגברה - גידול ודעיכה - פתרונות

1. א.

$$t = 9, \frac{u_9}{u_0} = 2, \frac{u_{17}}{u_0} = ?$$

$$\frac{u_9}{u_0} = 2 \Rightarrow u_9 = 2 u_0 \Rightarrow 2 u_0 = u_0 \cdot q^9 \Rightarrow q^9 = 2 / \sqrt[9]{\phantom{x}} \Rightarrow q = 1.08$$

$$u_{17} = u_0 \cdot 1.08^{17} = 3.7 \Rightarrow \frac{u_{17}}{u_0} = 3.7$$

ב.

$$\frac{u_x}{u_0} = 1.75 \Rightarrow u_x = 1.75 u_0 = u_0 \cdot 1.08^x \Rightarrow u_0 \cdot 1.08^x = 1.75 u_0 \Rightarrow 1.08^x = 1.75$$

$$1.08^x = 1.75 \Rightarrow x = \frac{\log 1.75}{\log 1.08} \Rightarrow x = 7.27 \text{ (שנים)}$$

2. א.

$$t = 10, q^{10} = 1 - 0.75 = 0.25, t = ? \Rightarrow q^t = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$q^{10} = 0.25 / ( )^{\frac{1}{10}} \Rightarrow q = 0.25^{0.1} = 0.8706$$

$$q^t = 0.2 \Rightarrow 0.8706^t = 0.2 \Rightarrow \ln 0.8706^t = \ln 0.2$$

$$\Rightarrow t \cdot \ln 0.8706 = \ln 0.2 \Rightarrow t = \frac{\ln 0.2}{\ln 0.8706} \Rightarrow t = 11.61 \text{ (שנים)}$$

ב.

$$q^6 = 0.8706^6 = 0.4354, 1 - 0.4354 = 0.5646 = 56.46\%$$

3. א.

נסמן: x - סכום הכסף שהופקד, q<sub>1</sub> - שיעור הגידול בבנק A, q<sub>2</sub> - שיעור הגידול בבנק B

$$(I) x \cdot q_1^7 = 6580$$

$$(II) x \cdot q_1^{10} = 7402.5 \Rightarrow \frac{(II)}{(I)} = q_1^3 = \frac{7402.5}{6580} = 1.125 / \sqrt[3]{\phantom{x}} \Rightarrow q_1 = 1.04 \Rightarrow A = 4\%$$

ב.

$$(I) x \cdot 1.04^7 = 6580 / : 1.04^7 \Rightarrow x = 5,000_{sh}$$

$$5000 \cdot q_2^7 = 6150 \Rightarrow q_2^7 = \frac{6150}{5000} = 1.23 / ( )^{\frac{1}{7}} \Rightarrow q_2 = 1.03 \Rightarrow B = 3\%$$

**רקורסיה סינית**

פתגם סיני עתיק אומר, שאם אין לך מה להגיד - תגיד פתגם סיני עתיק. . .



4. א.

$$m_t = m_0 \cdot q^t, \quad m_0 = 1200, \quad t = 10, \quad m_{10} = 719, \quad 1200 - m_2 = ?$$

$$m_{10} = m_0 \cdot q^{10} \Rightarrow 719 = 1200 \cdot q^{10} \Rightarrow q^{10} = \frac{719}{1200} = 0.5992 \quad / \left( \frac{1}{10} \right) \Rightarrow \underline{q = 0.95}$$

$$m_2 = 1200 \cdot 0.95^2 = 1083 \Rightarrow 1200 - 1083 = \underline{117 m^3}$$

ב.

$$m_0 = 1, \quad q = 0.95, \quad m_t = 0.5, \quad t = ?$$

$$0.5 = 1 \cdot 0.95^t \Rightarrow \ln 0.5 = \ln 0.95^t = t \ln 0.95 \Rightarrow t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.95} \Rightarrow \underline{t = 13.51 \text{ (שעות)}}$$

5. א. (1)

$$m_t = m_0 \cdot q^t, \quad m_0 = 1, \quad m_3 = 0.5 \Rightarrow 0.5 = 1 \cdot q^3 \Rightarrow q = 0.7937$$

$$m_0 = 1, \quad q = 0.7937, \quad m_t = 0.2, \quad t = ?$$

$$0.2 = 1 \cdot 0.7937^t \Rightarrow t = \frac{\ln 0.2}{\ln 0.7937} \Rightarrow \underline{t = 6.97 \text{ years}}$$

(2)

$$m_0 = 350 \text{ gr}, \quad q = 0.7937, \quad t = 2 \Rightarrow m_2 = 350 \cdot 0.7937^2 \Rightarrow \underline{m_2 = 220.49 \text{ gr}}$$

6. הנוסחה:  $m_t = m_0 \cdot q^t$

נסמן:  $m_0$  - מספר התושבים בעיר בתאריך הנתון (היינו יכולים לבחור גם  $m_0 = 1$ ).

$x$  - מספר השנים המבוקש (מיום התחזית עד שמספר התושבים יהיה שווה

למספר התושבים בתאריך הנתון)

$$\text{נתון: } t = 12, \quad q = 0.95, \quad -5\%$$

$$\text{לאחר 12 שנים יהיה מספר התושבים: } m_0 \cdot 0.95^{12}$$

במשך  $x - 12$  השנים שלאחר מכן נתון:  $t = x - 12, \quad q = 1.038, \quad +3.8\%$

לאחר אותן  $(x - 12)$  שנים יהיה מספר התושבים:  $(m_0 \cdot 0.95^{12}) \cdot 1.038^{x-12}$

אז ישווה מספר התושבים למספר הראשון -  $m_0$ , ולכן:

$$(m_0 \cdot 0.95^{12}) \cdot 1.038^{x-12} = m_0 \quad / : m_0 \Rightarrow 0.95^{12} \cdot 1.038^{x-12} = 1 \quad / : 0.95^{12}$$

$$\Rightarrow 1.038^{x-12} = 1.85062 \Rightarrow \ln 1.038^{x-12} = \ln 1.85062$$

$$\Rightarrow (x - 12) \ln 1.038 = \ln 1.85062$$

$$\Rightarrow x - 12 = \frac{\ln 1.85062}{\ln 1.038} = 16.5038 \quad / + 12 \Rightarrow \underline{x = 28.5 \text{ (שנים)}}$$

(\*) הוא אשר אמרתי: היינו יכולים לבחור  $m_0 = 1$ .

7. א. ללא הגבלת הכלליות:  $m_0 = 1$ .

$$m_0 = 1, t = 4, m_4 = 0.6, q = ?$$

$$0.6 = 1 \cdot q^4 \Rightarrow q = 0.88011 = 1 - \frac{p}{100} \Rightarrow \frac{p}{100} = 1 - 0.88011 = 0.11989 \Rightarrow p = 12\%$$

ב.

$$m_0 = 0.6, q = 1 + \frac{12 \cdot 1.5}{100} = 1.18, m_t = 1.4, t = ?$$

$$1.4 = 0.6 \cdot 1.18^t \quad / : 0.6 \Rightarrow 1.18^t = 2\frac{2}{3} \Rightarrow \log 1.18^t = \log 2\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow t \log 1.18 = \log 2\frac{2}{3} \Rightarrow t = \frac{\log 2\frac{2}{3}}{\log 1.18} \Rightarrow t = 5.12 \text{ years}$$

8. א.

$$m_0 = 1, m_7 = 0.8, q = ? \Rightarrow 0.8 = 1 \cdot q^7 \quad / ( )^{\frac{1}{7}} \Rightarrow q = 0.9686$$

$$m_0 = 1, m_t = 0.5, t = ? \Rightarrow 0.5 = 1 \cdot 0.9686^t$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.9686} \Rightarrow t = 21.74 \approx 22 \text{ days}$$

ב.

$$m_0 = 1, m_t = 0.05, t = ? \Rightarrow 0.05 = 1 \cdot 0.9686^t$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 0.05}{\ln 0.9686} \Rightarrow t = 93.9 \approx 94 \text{ days}$$

9. א.

$$m_0 = 160,000, q = 1.025 \Rightarrow m_t = 160,000 \cdot 1.025^t \quad \text{הבריכה הראשונה:}$$

$$m_0 = 148,000, q = 1.035 \Rightarrow m_t = 148,000 \cdot 1.035^t \quad \text{הבריכה השנייה:}$$

$$160,000 \cdot 1.025^t = 148,000 \cdot 1.035^t \Rightarrow \frac{1.025^t}{1.035^t} = \frac{148,000}{160,000}$$

$$\Rightarrow \ln \left( \frac{1.025}{1.035} \right)^t = \ln \frac{37}{40} \Rightarrow t \ln \frac{1.025}{1.035} = \ln \frac{37}{40}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln \frac{37}{40}}{\ln \frac{1.025}{1.035}} \Rightarrow t = 8.03 \text{ weeks}$$

ב. ללא הגבלת הכלליות:  $m_0 = 1$ .

$$1 \cdot 1.035^t = 2 \cdot 1 \cdot 1.025^t \Rightarrow \left( \frac{1.035}{1.025} \right)^t = 2 \Rightarrow \ln \left( \frac{1.035}{1.025} \right)^t = \ln 2$$

$$\Rightarrow t \ln \frac{1.035}{1.025} = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln \frac{1.035}{1.025}} \Rightarrow t = 71.39 \text{ weeks}$$

20. (004, קיץ תש"ע - 2010, מועד א - המבחן הגנזי)

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{1 - \sin x}$ , בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $a \neq 0$  פרמטר.  
בתחום הנתון מצא את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) האסמפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר  $y$ .

(3) סימן הפרמטר  $a$ , אם ידוע כי בנקודה שבה  $x = \pi$  הפונקציה יורדת.

ב. (1) גרף הפונקציה חותך בתחום הנתון את הישר  $y = 1$  בשלוש נקודות

שבהן:  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ,  $x = 2\pi$ . מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

(2) הצב את הערך של  $a$  שמצאת, ומצא בתחום הנתון את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. עבור  $a$  שמצאת, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון. (116)

21. (804, קיץ תש"ע - 2010, מועד א)

נתונה הפונקציה  $f(x) = 2\sqrt{\cos x}$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. הסבר מדוע בתחום  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$  הפונקציה אינה מוגדרת. (117)

22. (804, קיץ תש"ע - 2010, מועד ב)

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ .

א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון. (118)

תשובות

20. א. (1)  $x \neq \frac{\pi}{2}$  (2)  $x = \frac{\pi}{2}$  (3)  $\text{sign}(a) = +$

ב. (1)  $a = 1$  (2)  $\max_{\text{ep.}}(2\pi, 1)$ ,  $\min_{\text{ep.}}(\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $\min_{\text{ep.}}(0, 1)$

21. א. (1)  $(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$ , (2)  $(0, 2)$  ב.  $\max_{\text{ab.}} : (0, 2)$ ,  $\min_{\text{ab.}} : (\pm \frac{\pi}{2}, 0)$

22. א.  $\max_{\text{ep.}}(2\pi, 0)$ ,  $\min_{\text{ep.}}(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ ,  $\max_{\text{ep.}}(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ,  $\min_{\text{ep.}}(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2})$

ב.  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$ ,  $(2\pi, 0)$

23. (004 , חורף תשע"ב - 2012 , לוחמים)

נתונה הפונקציה  $y = \frac{1}{\cos x} + 2$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

א. בתחום הנתון מצא את:

(1) האסימפטוטות של גרף הפונקציה המקבילות לציר  $y$ .

(2) נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר  $x$  ועם ציר  $y$  (אם יש כאלה).

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. הישר  $y = a$  הוא משיק לגרף הפונקציה. מצא את הערך של  $a$ . (119)

24. (004 , קיץ תשע"ב - 2012 , לוחמים)

נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin x \cos x$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ .

בתחום הנתון: א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר  $x$ .

ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. ראה עמ' 173 שאלה 29. (120)

25. (804 , קיץ תש"ע - 2010 , המבחן הגנרלי)

נתונה הפונקציה  $f(x) = x + \sin 2x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

בתחום הנתון:

א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ . (121)

ג. נסמן:  $g(x) = f'(x)$ .

(1) מצא את שיעור  $x$  של נקודת הקיצון הפנימית של  $g(x)$ , וקבע את סוגה.

(2) לא בחומר (בעיית קיצון).

מחיקה של כל ספרה מהמספר הראשוני 6173 - תציג מספר ראשוני תלת-ספרתי

תשבות

23. א. (1)  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  (2)  $(0, 3)$  ב.  $\min(0, 3)$  ד.  $a = 3$

24. א.  $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ ,  $(\pi, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $(0, 0)$

ב.  $\max_{ab.}(\frac{5\pi}{4}, \frac{1}{2})$ ,  $\max_{ab.}(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ ,  $\min_{ab.}(\frac{3\pi}{4}, -\frac{1}{2})$

25. א.  $\max_{ep.}(\pi, \pi)$ ,  $\min(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $\max(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $\min_{ep.}(0, 0)$  ב. (1)  $x_{\min} = \frac{\pi}{2}$

חשבון דיפרנציאלי פונקציות טריגונומטריות - פתרונות

א. 1.

$$y = 0 \Rightarrow 2 + \sin 3x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -2 \Rightarrow \underline{x = \emptyset} \Leftarrow -1 \leq \sin x \leq 1$$

ב.

$$f'(x) = 3 \cos 3x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{3}\pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{5\pi}{6}; y_1 = 3, y_2 = 1, y_3 = 3; y(0) = 2, y(\pi) = 2$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\pi$
f'		+	0	-	0	+	0	-	
f	2	↗	max	↘	min	↗	max	↘	2

$$\Rightarrow \min_{ep}: (0, 2), \max: (\frac{\pi}{6}, 3), \min: (\frac{\pi}{2}, 1), \max: (\frac{5\pi}{6}, 3), \min_{ep}: (\pi, 2)$$

א. 2.

$$f(x) = x - \sin 2x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = 1 - 2 \cos 2x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$f''(x) = 0 + 2 \cdot 2 \sin 2x$$

$$f''(-\frac{\pi}{6}) = 4 \sin(-\frac{\pi}{3}) = 4 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) < 0 \Rightarrow x_{\max} = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \nearrow \searrow \Rightarrow x_{\min(ep)} = -\frac{\pi}{6}$$

$$f''(\frac{\pi}{6}) = 4 \sin(\frac{\pi}{3}) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow x_{\min} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \searrow \nearrow \Rightarrow x_{\max(ep)} = \frac{\pi}{6}$$

ב.

$$f'(-\frac{\pi}{6}) = f'(\frac{\pi}{6}) = 0$$

$$f(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6} - \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.3424 \text{ :הוא } x = -\frac{\pi}{6} \text{ הישר המשיק בנקודה}$$

$$y = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -0.3424 \text{ :הוא } x = \frac{\pi}{6} \text{ הישר המשיק בנקודה}$$

$$f(x) = \cos 2x + a \sin x, \quad f'(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \quad \text{א. 3}$$

$$f'(x) = -2 \sin 2x + a \cos x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6}) = -2 \sin \frac{\pi}{3} + a \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$f'(\frac{\pi}{6}) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad / \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow -2 + a = 2 \Rightarrow a = 4$$

ב.

$$f(x) = \cos 2x + 4 \sin x \Rightarrow f'(x) = -2 \sin 2x + 4 \cos x \stackrel{?}{=} 0$$

$$f'(x) = -2 \cdot 2 \sin x \cos x + 4 \cos x = -4 \cos x (\sin x - 1) \stackrel{?}{=} 0$$

$$(1) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$(2) \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$f(0) = 1 + 0 = 1, \quad f(\frac{\pi}{2}) = -1 + 4 = 3, \quad f(\frac{3\pi}{2}) = -1 - 4 = -5, \quad f(2\pi) = 1 + 0 = 1$$

$$\Rightarrow \min_{abs.}: (\frac{3\pi}{2}, -5), \quad \max_{abs.}: (\frac{\pi}{2}, 3)$$

$$y = 2 - 4 \sin 2x, \quad 0 < x < \pi \quad \text{א. 4}$$

$x \neq 0$  (מחוץ לתחום הנתון)

$$y = 0 \Rightarrow 2 - 4 \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{12} \Rightarrow (\frac{\pi}{12}, 0)$$

$$2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow (\frac{5\pi}{12}, 0)$$

הפתרונות הנוספים הינם מחוץ לתחום הנתון ( $0 < x < \pi$ ).

ב.

$$y' = 0 - 4 \cdot 2 \cos 2x = -8 \cos 2x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} \quad (0 < x < \pi) \text{ הפתרונות הנוספים הינם מחוץ לתחום הנתון}$$

$$y_1 = 2 - 4 \sin \frac{\pi}{2} = 2 - 4 \cdot 1 = -2, \quad y_2 = 2 - 4 \sin \frac{3\pi}{2} = 2 - 4 \cdot (-1) = 2 + 4 = 6$$

$$y'' = (-8) \cdot (-2) \sin 2x = 16 \sin 2x$$

$$y''(\frac{\pi}{4}) = 16 \sin \frac{\pi}{2} = 16 \cdot 1 > 0 \Rightarrow \min(\frac{\pi}{4}, -2)$$

$$y''(\frac{3\pi}{4}) = 16 \sin \frac{3\pi}{2} = 16 \cdot (-1) < 0 \Rightarrow \max(\frac{3\pi}{4}, 6)$$

ג.

המשיק בנקודת המינימום הוא קו אופקי בגובה  $y = -2 \Leftarrow y_{min}$

המשיק בנקודת המקסימום הוא קו אופקי בגובה  $y = 6 \Leftarrow y_{max}$

$$\Rightarrow d = 6 - (-2) \Rightarrow d = 8 \text{ (יחידות אורך)}$$

6. א.

$$f(x) = \sin x - \cos^2 x - 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$$

$$f'(x) = \cos x - 2 \cos x (-\sin x) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \cos x (1 + 2 \sin x) = 0$$

$$(1) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$(2) 1 + 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$(2_1) x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x = 0 \quad (\text{אין פתרונות בתחום הנתון})$$

$$(2_2) x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_3 = \frac{7\pi}{6}$$

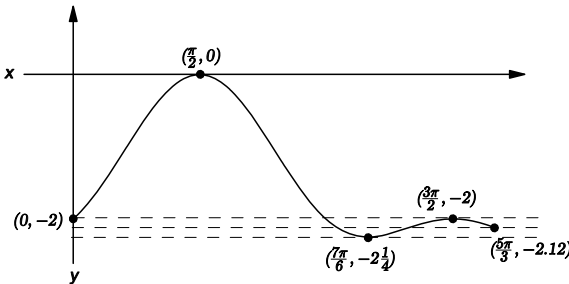
בדיקת ערך הפונקציה (y) בכל אחת מהנקודות בתחום שבהן הנגזרת מתאפסת,

ובנקודות הקצה:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 - 1^2 - 1 = -1 - 1 = -2 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 - 0^2 - 1 = 0 \\ f\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 1 = -2\frac{1}{4} \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= -1 - 0^2 - 1 = -2 \\ f\left(\frac{5\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} - 1 = -2.12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \min_{ab.} \left(\frac{7\pi}{6}, -2\frac{1}{4}\right), \quad \max_{ab.} \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

ב. גרף הפונקציה המבוקשת מוכרח מהנתונים שבסעיף א,

ללא צורך בכל חקירה נוספת.



### תוכיח!

**כריסטיאן גולדבך** (Goldbach C., 1690 – 1764) היה פרופסור למתמטיקה והיסטוריה באוניברסיטת פטרסבורג

(רוסיה), מורם של ילדי הצאר.

גולדבך שיער כי כל מספר זוגי (פרט ל-2) ניתן לתיאור כסכום של שני מספרים ראשוניים.

דוגמאות:  $8 = 5 + 3$ ,  $112 = 53 + 59$ ,  $250 = 11 + 239$ .

מאז נבדקו כ-300,000 מספרים זוגיים, ולא נמצא מקרה שיטתור את הטענה.

מצד שני, גם לא נמצאה הוכחה לטענה זו למרות הנסיונות הרבים.

לכן, תכונה זו ידועה היום כ'**השערת גולדבך**' (בניגוד ל'משפט' - טענה המוכחת מתמטית).

$f(x) = \sin^2 x - 4 \sin x$  ,  $0 \leq x \leq 2\pi$  .א .7

$f'(x) = 2 \sin x \cos x - 4 \cos x = 2 \cos x (\sin x - 2) = 0$

(1)  $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$  ,  $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

(2)  $\sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = 2 \Rightarrow \emptyset \Leftarrow -1 \leq \sin x \leq 1$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$2\pi$
y'		+-=-	0	---=+	0	+-=-	
y		\	min	/	max	\	

$\Rightarrow \searrow: (0 < x < \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi)$   $\nearrow: \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

$\sin^2 x - 4 \sin x = -1\frac{3}{4} = -\frac{7}{4} \cdot 4 \Rightarrow 4 \sin^2 x - 16 \sin x + 7 = 0$  .ב

$(\sin x)_{1,2} = \frac{16 \pm 12}{8} = \frac{4 \pm 3}{2} \Rightarrow (\sin x)_1 = \frac{7}{2} \Rightarrow \emptyset \Leftarrow -1 \leq \sin x \leq 1$

$(\sin x)_2 = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$  ,  $y = -1\frac{3}{4} \Rightarrow (\frac{\pi}{6}, -1\frac{3}{4})$

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{6}$  ,  $y = -1\frac{3}{4} \Rightarrow (\frac{5\pi}{6}, -1\frac{3}{4})$

.א .8

$f(x) = \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{3}$  ,  $\pi < x < 2\pi$

$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \frac{x}{3} = \frac{3}{4} \approx \sin 49^\circ$

(1)  $\frac{x}{3} = 49^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = 147^\circ + 1080^\circ k \Rightarrow x = \emptyset \Leftarrow 180^\circ < x < 360^\circ$

(2)  $\frac{x}{3} = \underset{180^\circ - 49^\circ}{131^\circ} + 360^\circ k \Rightarrow x = 393^\circ + 1080^\circ k \Rightarrow x = \emptyset \Leftarrow 180^\circ < x < 360^\circ$

כלומר: הנגזרת אינה מתאפסת באף לא נקודה אחת בתחום הנתון.

לכן היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת בכל התחום.

נבחר נקודה בתחום הנתון, למשל:  $x = \frac{3\pi}{2}$ , ונבדוק את סימן הנגזרת בה:

$f'(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \sin \frac{3\pi}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{12} < 0 \Rightarrow f \searrow \forall \{ \pi < x < 2\pi \}$  (✓)

$f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2 \cdot 4} + \cos \frac{3\pi}{2 \cdot 3} = \frac{3\pi}{8} + 0 = \frac{3\pi}{8}$  ,  $f'(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{1}{12}$  .ב

$y - \frac{3\pi}{8} = -\frac{1}{12}(x - \frac{3\pi}{2}) = -\frac{1}{12}x + \frac{\pi}{8} \Rightarrow y = -\frac{1}{12}x + \frac{4\pi}{8} \Rightarrow y = -\frac{1}{12}x + \frac{\pi}{2}$



$$f(x) = \sin 2x - 2 \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 - 2 \cdot 1 = -2 \Rightarrow (0, -2)$$

$$y = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos x (\sin x - 1) = 0$$

$$(1) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$$

$$(2) \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$$

ב.

$$f'(x) = 2 \cos 2x + 2 \sin x \Rightarrow f'(x) = 2(1 - 2 \sin^2 x + \sin x) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow (1) \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_2 = \frac{11\pi}{6}$$

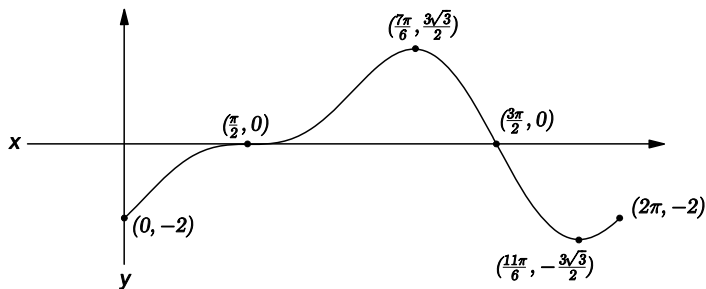
$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_3 = \frac{7\pi}{6}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		$2\pi$
f'		+	0	+	0	-	0	+	
f	min	↗	infl.	↗	max	↘	min	↗	max

$$f(2\pi) = 0 - 2 = -2, \quad f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \min_{ep}: (0, -2), \quad \max: \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \quad \min: \left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \quad \max_{ep}: (2\pi, -2)$$

ג.



א. 10

$$f(x) = 5 \sin x - 2 \cos^2 x - 1, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 5 \cdot 0 - 2 \cdot 1^2 - 1 = -3 \Rightarrow (0, -3)$$

$$y = 0 \Rightarrow 5 \sin x - 2(1 - \sin^2 x) - 1 = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{4}, \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$(1) \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$$

$$(2) \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$$

ב.

$$f'(x) = 5 \cos x - 2 \cdot 2 \cos x (-\sin x) = 5 \cos x + 4 \sin x \cos x = \cos x (5 + 4 \sin x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(5 + 4 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{2} > 0 \quad (\checkmark)$$

$$m = \frac{7\sqrt{3}}{2}, \quad \left(\frac{\pi}{6}, 0\right) \Rightarrow y - 0 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = \frac{7\sqrt{3}}{2}x - \frac{7\sqrt{3}\pi}{12} = 6.06x - 3.17$$

א. 11

$$f(x) = \cos 2x + 2x \sin 2x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$$

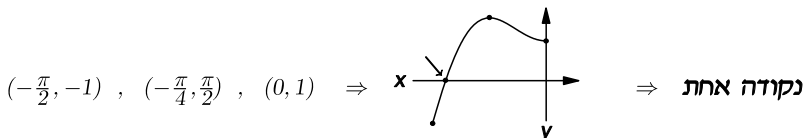
$$f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \sin 2x + 2x \cdot 2 \cos 2x = 4x \cos 2x \stackrel{?}{=} 0$$

$$(1) \quad x_1 = 0, \quad (2) \quad \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{4}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\pi) + 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(-\pi) = -1 + 0 = -1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} \cdot (-1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \min_{ab.} : \left(-\frac{\pi}{2}, -1\right), \quad \max_{ab.} : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(0) = \cos 0 + 2 \cdot 0 \cdot \sin 0 = 1 + 0 = 1$$



ב.

אחת מאבני הכותל המערבי היא אולי אבן הבניה הגדולה ביותר בעולם העתיק.

אורכה - 13.6 מ', גובהה - 3.3 מ' ועוביה - 4.6 מ'.

משקלה מוערך ב-570 טון, כמשקלם של 8 טנקים!

(ירושלים וכל נתיבותיה - הוצאת יד יצחק בן צבי)

$f(x) = a \cos x + \cos^2 x + 2$  ,  $-\pi \leq x \leq \pi$  ,  $f'(-\frac{\pi}{2}) - f'(\frac{\pi}{2}) = 4$  **א. 13**

$f'(x) = -a \sin x - 2 \cos x \sin x$

$f'(-\frac{\pi}{2}) = -a \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \cdot (-1) = a$  ,  $f'(\frac{\pi}{2}) = -a \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = -a$

$f'(-\frac{\pi}{2}) - f'(\frac{\pi}{2}) = 4 \Rightarrow a - (-a) = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$

**ב.**

$f(x) = 2 \cos x + \cos^2 x + 2$  ,  $f'(x) = -2 \sin x - 2 \cos x \sin x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow -2 \sin x (1 + \cos x) = 0$

(1)  $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k \Rightarrow x_1 = -\pi, x_2 = 0, x_3 = \pi$

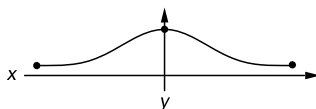
(2)  $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k \Rightarrow x = \pm\pi$  (קיבלנו פתרונות אלו בשורה לפני)

$f(-\pi) = 2 \cdot (-1) + (-1)^2 + 2 = 1$

$f(0) = 2 \cdot 1 + 1^2 + 2 = 5$

$f(\pi) = 2 \cdot (-1) + (-1)^2 + 2 = 1$

$\Rightarrow \min_{ab.} : (\pm\pi, 1)$  ,  $\max_{ab.} : (0, 5)$



**ג.**

$f'(-\frac{\pi}{2}) - f'(\frac{\pi}{2}) = 4 \Rightarrow f'(-\frac{\pi}{2}) \neq f'(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$  נחתכים

$f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$  ,  $0 \leq x \leq \pi \rightarrow (0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} < x \leq \pi)$  **א. 14**

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - 2x) = \infty - \pi = \infty \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

**ב-ג.**

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

(1)  $\cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

(2)  $\cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

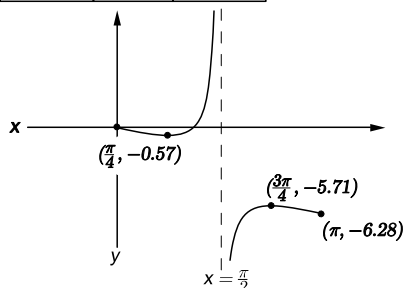
x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\pi$
y'		-	0	+	$\emptyset$	+	0	-	
y	0	\	min	/	asym.	/	max	\	$-2\pi$

$\searrow: (0 < x < \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4} < x < \pi)$

$\nearrow: (\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4})$

$f(0) = 0 - 0 = 0$  ,  $f(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\pi}{2} = -0.57$

$f(\frac{3\pi}{4}) = -1 - \frac{3\pi}{2} = -5.71$  ,  $f(\pi) = 0 - 2\pi = -6.28$

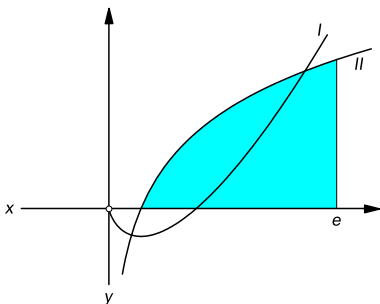


בחירה: שלוש שאלות מתוך ארבע.

**גדילה ודעיכה**

1. ראובן לקח מהבנק הלוואה של  $N$  שקלים בריבית של 8% לשנה. כעבור 3 שנים הוא שילם לבנק תשלום ראשון של 42,985.6 שקלים. יתרת החוב המשיכה לשאת אותה ריבית, וכעבור שנתיים היא הסתכמה ב־ 23,328 שקלים.
- א. (1) הבע באמצעות  $N$  את יתרת החוב לאחר שראובן שילם לבנק את התשלום הראשון.  
 (2) מה היה סכום ההלוואה שלקח ראובן מהבנק?
- ב. אם ראובן לא היה מחזיר חלק מההלוואה, כעבור כמה שנים היה החוב שלו לבנק גדול פי 2 מסכום ההלוואה שלקח?

**אלגברה וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות**



2. נתונה הפונקציה  $f(x) = x \ln x$ .
- א. מצא את הנגזרת  $f'(x)$ .
- ב. בצויר מוצגים הגרפים  $I$  ו־  $II$ .  
 אחד הגרפים הוא של הפונקציה  $f(x)$ , והאחר של פונקציה הנגזרת  $f'(x)$ .
- (1) קבע איזה גרף הוא של הפונקציה  $f(x)$ . נמק.
- (2) מצא את תחומי העליה והירידה של גרף  $I$ .
- ג. מצא את השטח המוגבל ע"י גרף  $II$ , ע"י ציר  $x$  וע"י הישר  $x = e$ .
3. בעית קיצון. לא בחומר.

מוצרט חיבר פעם ואלס שבו ציין 11 אפשרויות שונות ל־14 מתוך 16 התיבות של הוואלס, ושתי אפשרויות לאחת משתי התיבות הנותרות. לכן, יש  $2 \cdot 11^4$  ווריאציות אפשריות של אותו ואלס, ורק חלק זעום מהן נוגן אי־פעם.

(חרדת המספרים - ג'ון אלן פאולוס / הוצאת כנרת)

**תשאלות**

1. א. (1)  $42,985.6 - 1.2597N$  (שקלים) (2) 50,000 (שקלים) ב. 9.0065 (שנים)
2. א.  $f'(x) = 1 + \ln x$  ב.  $f(x) \leftrightarrow I$  (1)  $f(x) \leftrightarrow II$  (2)  $x > \frac{1}{e}$  ,  $x < \frac{1}{e}$  :  $f$
- ג.  $S = e + \frac{1}{e} = 3.0862$  (יחידות ריבועיות)

**פתרון מבחן 3**

1. א. (1)

$$m_t = m_0 \cdot q^t \Rightarrow m_3 = N \cdot 1.08^3, -42,985.6 \Rightarrow 1.2597 N - 42,985.6 \text{ (שקלים)}$$

(2) נביט על הקרן כמחולקת לשני חלקים:

x - החלק שנפרע לאחר שלוש שנים, y - החלק שנפרע לאחר חמש שנים.

קרן ההלוואה שנפרעה לאחר שלוש שנים:

$$m_2 = x \cdot 1.08^3 = 42,985.6 \Rightarrow x = 34,123.36$$

קרן ההלוואה שנפרעה לאחר חמש שנים:

$$m_5 = y \cdot 1.08^5 = 23,328 \Rightarrow y = 15,876.64$$

$$34,123.36 + 15,876.64 = 50,000 \text{ (שקלים)}$$

ב.

$$m_0 = 1, m_t = 2, q = 1.08, t = ? \Rightarrow 1 \cdot 1.08^t = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1.08} \Rightarrow t = 9.0065 \text{ (שנים)}$$

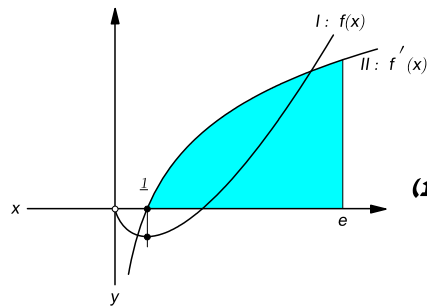
2. א.

$$f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \ln x$$

$$f(e) = e \cdot \ln e = e \cdot 1 = e, f'(e) = 1 + \ln e = 2$$

$$\Rightarrow f(e) > f'(e) \Rightarrow f(x) \leftrightarrow I$$



ב. (1)

(2)

$$f'(x) = 1 + \ln x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

x		0		$\frac{1}{e}$	
f'	∅	∅	-	0	+
f	∅	∅	∩	min	↗

$$\Rightarrow f: \searrow: 0 < x < \frac{1}{e}, \nearrow: x > \frac{1}{e}$$

ג.

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx = x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^e = f(x) \Big|_{\frac{1}{e}}^e = e \ln e - \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = e \cdot 1 - \frac{1}{e} \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow S = e + \frac{1}{e} = 3.0862 \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

4. א.

$\triangle ABC$ : (1)  $\angle C = 60^\circ$

(2)  $\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot 6 = 12 \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12$

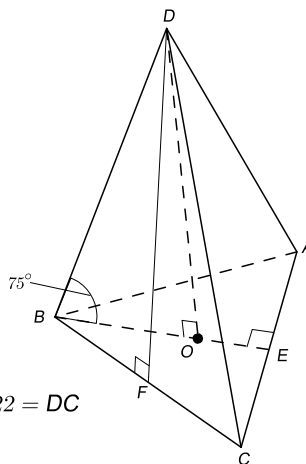
$\Rightarrow BC = 6\sqrt{3} \text{ cm}$

(3)  $BO = R_{\triangle ABC} = 6$

$\triangle DOB$ : (2)  $\frac{6}{BD} = \cos 75^\circ \Rightarrow BD = \frac{6}{\cos 75^\circ} = 23.1822 = DC$

$\triangle DFB$ :  $BF = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow^{(4)} DF = \sqrt{23.1822^2 - 27} = 22.5924$

$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 22.5924 \Rightarrow S_{\triangle DBC} = 117.39$  (יחידות ריבועיות)



ב.

(1) גודל זווית במשולש שווה-צלעות (2) משפט הסינוסים

(3) עקב הגובה של פירמידה ישרה משולשת היא מפגש אנכים אמצעיים של בסיסה

(4) משפט פיתגורס

**אלוף ריבועי הקסם**

ישנם 880 ריבועי קסם יסודיים מסדר  $4 \times 4$ ,

כלומר שאף לא אחד מהם הינו שיקוף או סיבוב של ריבוע קסם אחר.

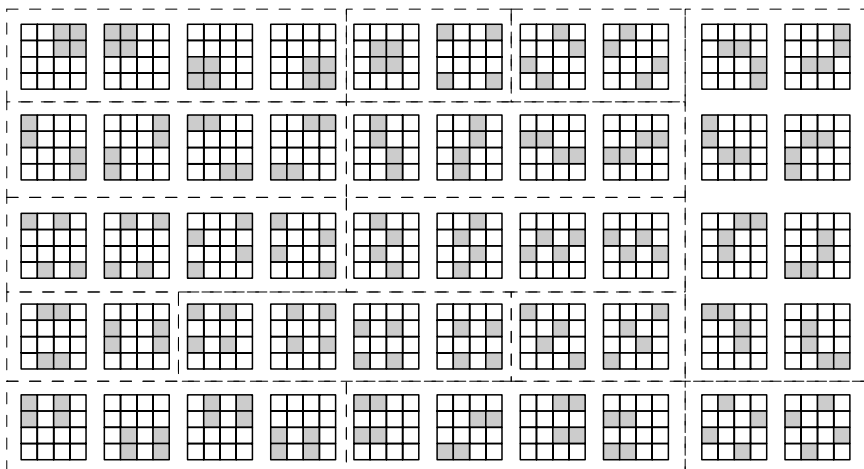
ריבוע הקסם המתואר משמאל הוא כנראה ריבוע הקסם היפה ביותר.

לא רק שסכום כל שורה, כל טור וכל אלכון שווה ל-34.

אלא עוד 50 וריאציות סימטריות נוספות, ובסה"כ: 60 צירפים סימטריים של 34!

להלן פירוט הצירופים (למעט שורות, טורים ואלכסונים):

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4



**מבחן 4 - חורף תשע"א - 2011**

בחירה: שלוש שאלות מתוך ארבע.

**סדרות**

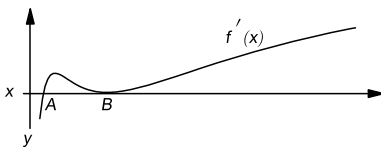
1. נתונות שתי סדרות: סדרה אחת חשבונית וסדרה אחת הנדסית.  
 בכל סדרה האיבר הראשון הוא 9.  
 האיבר השני בסדרה החשבונית גדול ב-2 מהאיבר השני בסדרה ההנדסית.  
 האיבר השלישי זהה בשתי הסדרות.  
 מצא את האיבר השני בכל אחת מהסדרות (מצא את כל הפתרונות).

**אלגברה וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות**

2. נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x}$  ו-  $g(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^x}$ .
- א. הראה כי: (1) הפונקציה  $f(x)$  יורדת לכל  $x$  (2) הפונקציה  $g(x)$  יורדת לכל  $x$
- ב. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים (אם יש כאלה)  
 של גרף הפונקציה: (1)  $f(x)$  (2)  $g(x)$
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$
- ד. (1) פתור את אי-השוויון  $e^{-x} > e^{-2x}$
- (2) היעזר בפתרון של תת-סעיף ד(1), ורשום עבור אילו ערכי  $x$  מתקיים  $f(x) > g(x)$ .
- ה. לסרטוט ששרטטת בסעיף ג הוסף בקו מרוסק (---) סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

3. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3} \ln^3 x + \frac{1}{4} \ln^4 x$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגה.



- ג. לפניך סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .  
 הגרף חותך את ציר  $x$  בנקודות A ו- B.  
 מצא את השיעורים של הנקודות A ו- B. נמק.

**תולדות**

1.  $a_i$  - חשבונית,  $b_i$  - הנדסית: (1)  $a_2 = 17$ ,  $b_2 = 15$ ; (2)  $a_2 = 5$ ,  $b_2 = 3$
2. א.  $x > 0$  ב. (1)-(2)  $(0, \frac{1}{2})$  ד. (1)-(2)  $x > 0$
3. א.  $x > 0$  ב.  $\min(\frac{1}{e}, -\frac{1}{12})$  ג.  $A(\frac{1}{e}, 0)$ ,  $B(1, 0)$

**פתרון מבחן 4**

1. נסמן את איברי הסדרה החשבונית ב-  $a_j$  ואת איברי הסדרה ההנדסית ב-  $b_j$

(I)  $a_2 = b_2 + 2 \Rightarrow 9 + d = 9q + 2 \Rightarrow d = 9q - 7$

(II)  $a_3 = b_3 \Rightarrow 9 + 2(9q - 7) = 9q^2 \Rightarrow 9 + 18q - 14 = 9q^2 \Rightarrow 9q^2 - 18q + 5 = 0$

$q_{1,2} = \frac{18 \pm 12}{18} = \frac{3 \pm 2}{3} \Rightarrow q_1 = \frac{5}{3}, q_2 = \frac{1}{3}$

(1)  $q_1 = \frac{5}{3} \Rightarrow d_1 = 9 \cdot \frac{5}{3} - 7 = 15 - 7 = 8 \Rightarrow a_2 = 9 + 8 \Rightarrow a_2 = 17$

$b_2 = a_2 - 2 = 17 - 2 \Rightarrow b_2 = 15$

(2)  $q_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow d_2 = 9 \cdot \frac{1}{3} - 7 = 3 - 7 = -4 \Rightarrow a_2 = 9 - 4 \Rightarrow a_2 = 5$

$b_2 = a_2 - 2 = 5 - 2 \Rightarrow b_2 = 3$

2. א. (1)

$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x}, f'(x) = \frac{-e^{-x}(1+e^x) - e^x \cdot e^{-x}}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^{-x} - e^0}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^{-x} - 1}{(1+e^x)^2} \Rightarrow f \searrow \forall x (\checkmark)$

(2)

$g(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^x}, g'(x) = \frac{-2e^{-2x}(1+e^x) - e^x \cdot e^{-2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{-2e^{-2x} - e^{-x}}{(1+e^x)^2} = \frac{-2e^{-2x} - e^{-x}}{(1+e^x)^2} \Rightarrow g \searrow \forall x (\checkmark)$

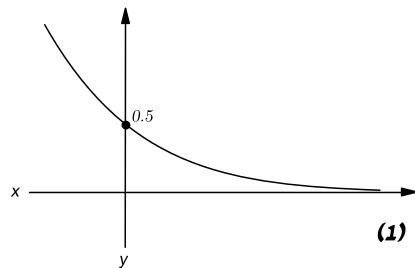
ב. (1)

f(x):  $f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2}), y=0 \Rightarrow e^{-x} = 0 \Rightarrow \emptyset$

(2)

g(x):  $g(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2}), y=0 \Rightarrow e^{-2x} = 0 \Rightarrow \emptyset$

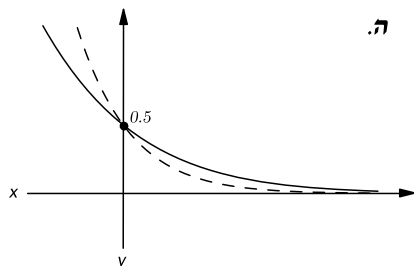
ג.



ד. (1)

$e^{-x} > e^{-2x}, e > 1 \Rightarrow -x > -2x \Rightarrow x > 0$

(2)



$1 + e^x > 0 \Rightarrow \left\{ \frac{e^{-x}}{1+e^x} > \frac{e^{-2x}}{1+e^x} \iff e^{-x} > e^{-2x} \right\}$

$\Rightarrow \left\{ f(x) > g(x) \iff x > 0 \right\}$



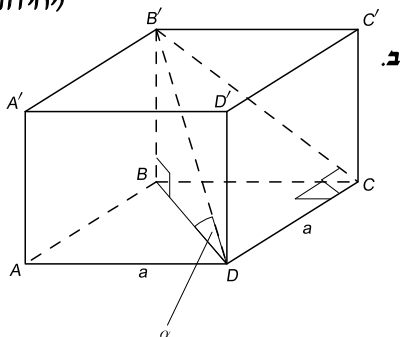
4. א.

$$S_{\triangle DCB'} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot CB' = 0.6a^2 \Rightarrow CB' = 1.2a \quad (\text{יחידות אורך})$$

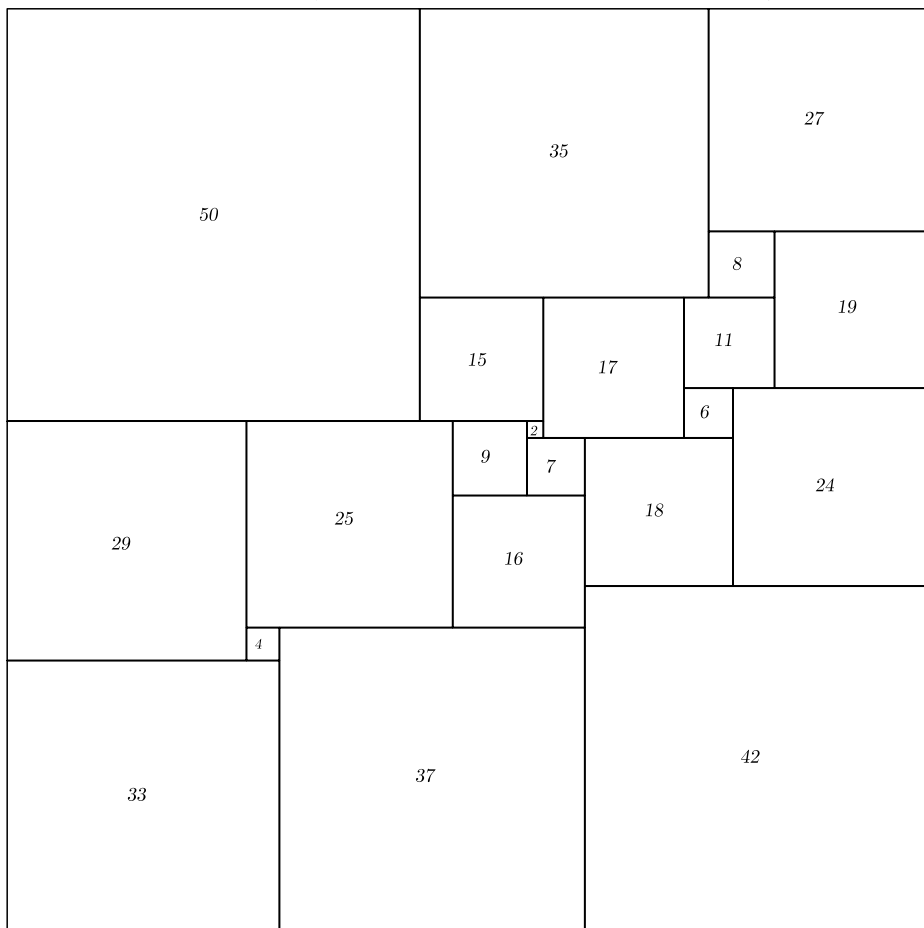
$$\triangle DCB' : DB' = \sqrt{a^2 + (1.2a)^2} = \sqrt{2.44a^2} = a\sqrt{2.44}$$

$$\triangle DBB' : BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{BD}{DB'} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2.44}} \Rightarrow \alpha = 25.13^\circ$$



המספר הקטן ביותר של אריחים ריבועיים שונים שיכולים לרצף שטח ריבועי הוא 21. הנה:



ועוד דבר: ניתן לרצף מישור אינסופי, בלי פערים, עם אריח ריבועי אחד בדיוק  $1 \times 1$ , ועוד אריח אחד בדיוק ריבועי  $2 \times 2$ , ועוד אריח ריבועי אחד בדיוק  $3 \times 3$  וכו'

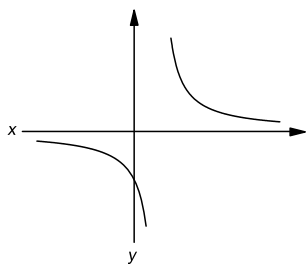
**מבחן 5 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד א**

בחירה: שלוש שאלות מתוך ארבע.

**סדרות**

1. הסכום של סדרה הנדסית איך-סופית יורדת גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות הזוגיים.
- א. מצא את מנת הסדרה.
- ב. מצא פי כמה גדול הסכום של הסדרה הנתונה מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

**אלגברה וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות**



2. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2x-a}$ ,  $x \neq \frac{a}{2}$ ,  $a$  פרמטר.
- העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$ , והעבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 0$ . המשיקים מקבילים זה לזה.
- א. מצא את הערך של  $a$ .
- ב. הצב את הערך של  $a$  שמצאת, וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$ , ועל ידי הישר  $x = 3$ .

כולנו מכירים את השלשה הפיתגורית של מספרים עוקבים:  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .  
 זו השלשה הפתגורית היחידה של מספרים עוקבים. ובכל זאת, היא אינה מקרית.  
 שלשה זו, היא חלק ממשפחת אינסופית של סכומים ריבועים של מספרים עוקבים:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 34^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$$

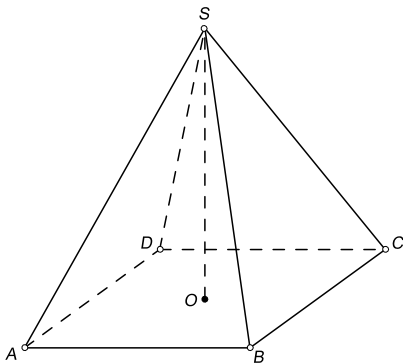
$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$(2n^2 + n)^2 + \dots + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2 + \dots + (2n^2 + 3n)^2$$

3. נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{x^2} + e^{-x^2}$ .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.  
 ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ד. ישר שמשוואתו  $y = 2.5$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות.  
 מבין שתי הנקודות האלה, מצא את השיעורים של הנקודה שבה הפונקציה יורדת. נמק.



**טריגונומטריה במרחב**

4. נתונה פירמידה ישרה  $SABCD$  שבסיסה  $ABCD$  הוא ריבוע. גובה הפירמידה שווה באורכו לאלכסון הבסיס של הפירמידה ( $SO = AC$ ).  
 א. חשב את גודל הזווית שבין מקצוע צדדי ובין מישור הבסיס של הפירמידה.  
 נתון גם כי  $AC = 7\text{cm}$ .  
 ב. חשב את האורך של צלע הבסיס.  
 ג. חשב את גודל הזווית שבין  $SB$  ובין  $AB$ .

**בהצלחה**

זכות היצרים שמוורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

96	64	37	45
39	43	98	62
84	76	25	57
23	59	82	78

הריבוע המוצג כאן הוא ריבוע קסם שסכומו 242 :

69	46	73	54
93	34	89	26
48	67	52	75
32	95	28	87

אם נהפוך את סדר הספרות שבכל ריבוע

- נקבל ריבוע שגם הוא ריבוע קסם עם אותו סכום קבוע - 242:

**תשובות**

3. א.  $\forall x$  ב.  $\min(0, 2)$  ד.  $(-\sqrt{\ln 2}, 2\frac{1}{2})$

4. א.  $63.43^\circ$  ב.  $4.95\text{cm}$  ג.  $71.57^\circ$

3. א.

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

$$y = 0 \Rightarrow \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \underline{\cos x} = -\sin x = \sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \underline{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

$$(1) \quad x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \Rightarrow 0 = \pi + 2k\pi \Rightarrow \emptyset$$

$$(2) \quad x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad / + x \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}, 0\right), \quad \left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$$

ב.

$$f'(x) = \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$(1) \quad x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

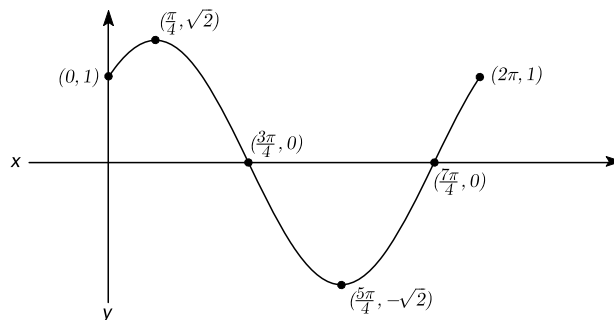
$$(2) \quad x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \emptyset$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$2\pi$
f'		+	0	-	0	+	
f	min <sub>ep.</sub>	↗	max	↘	min	↗	max <sub>ep.</sub>

$$f(2\pi) = f(0) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{min}_{ep.}(0, 1), \quad \text{max}\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right), \quad \text{min}\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right), \quad \text{max}_{ep.}(2\pi, 1)$$

ג.



ד. ראה ציור: טווח הפונקציה (ערכי y האפשריים) בתחום הנתון נעים בין  $-\sqrt{2}$  לבין  $\sqrt{2}$ .

כלומר, בתחום הנתון מתקיים:  $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$ .

לא. הינו מחוץ לתחום זה, ולכן  $f(x)$  אינה יכולה לקבל את הערך 1.5. תשובה: לא.

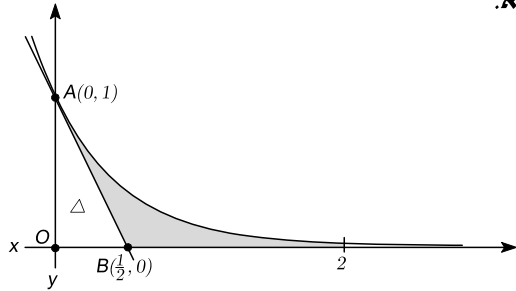
5. א.

$$f(x) = e^{-2x}$$

$$\underline{A}: x = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1 \Rightarrow A(0, 1)$$

$$\underline{m}: f'(x) = -2e^{-2x}$$

$$m = f'(0) = -2 \cdot e^0 = -2$$



$$y - 1 = -2(x - 0) / +1 \Rightarrow y = -2x + 1$$

ב.

$$S_{\Delta} = \frac{AO \cdot BO}{2} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2x} dx - S_{\Delta} = -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} e^{-1} - (-\frac{1}{2} e^0) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} = 0.2408 \text{ (יחידה ריבועית)}$$

ג.

$$g(x) = f'(x)$$

$$\int_0^a g(x) dx = \int_0^a f'(x) dx = f(x) \Big|_0^a = f(a) - f(0) = e^{-2a} - e^0 = e^{-2a} - 1 = e^{-2} - 1 / +1$$

נתון

$$\Rightarrow e^{-2a} = e^{-2} \Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow a = 1$$

### מספרים מושלמים

פתגורס קרא למספרים ששוים לסכום מחלקיהם 'מספרים מושלמים' או 'מספרים משוכללים'.

למשל, המחלקים של 6 הם 1, 2, 3, ומתקיים  $1 + 2 + 3 = 6$ . כך גם 28:  $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ .

המספר המושלם השלישי הוא 496, הרביעי הוא 8,128. היוונים הכירו את המספרים האלו בלבד. רק 1700 שנים מאוחר יותר התגלה המספר המושלם החמישי: 33,550,336. השישי הוא 8,589,869,056. למספרים מושלמים יש תכונות אלגנטיות נוספות. למשל, הם שווים לסכום של מספרים עוקבים:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$496 = 1 + 2 + 3 + \dots + 29 + 30 + 31$$

$$8,128 = 1 + 2 + 3 + \dots + 125 + 126 + 127$$

המספר החמישי התגלה רק ב-1536 - אלפיים שנה (0) לאחר פיתגורס ע"י הודלריקוס רגיוס.

$$\text{המספר הוא: } 2^{12} (2^{13} - 1) = 33,550,336$$

היום ידועים 37 מספרים מושלמים שהגדול בהם הוא בן 1,819,050 ספרות !!!

**מבחן 23 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד א**

בחירה: שלוש שאלות: שאלה אחת מהשאלות 1-2, שתי שאלות מהשאלות 3-5.

**פרק ראשון - סדרות, טריגונומטריה במרחב**

**סדרות**

1. נתונות שתי סדרות הנדסיות אינ־סופיות יורדות:

I.  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

II.  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$

נתון כי מנת הסדרה I היא  $q$ , ומנת הסדרה II היא  $\frac{1}{2}$ .

משתי הסדרות הנתונות בנו סדרה שלישית שגם היא סדרה הנדסית אינ־סופית יורדת:

III.  $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$

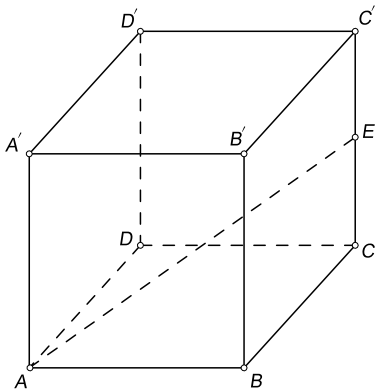
א. הבע באמצעות  $q$  את מנת הסדרה III.

ב. סכום האיברים של סדרה II הוא 8.

סכום האיברים של סדרה I גדול פי 2 מסכום האיברים של סדרה III.

מצא את מנת הסדרה III.

**טריגונומטריה במרחב**



2. נתונה קוביה  $ABCD A' B' C' D'$ .

נקודה E היא אמצע המקצוע  $CC'$ .

א. מצא את גודל הזווית בין  $AE$  לבסיס  $ABCD$ .

ב. נתון כי נפח הקוביה הוא  $140.608$  סמ<sup>3</sup>.

מצא את אורך הקטע  $AC$ .

ג. נקודה K נמצאת על הקטע  $EC'$ .

$CK = 4.5$  cm

מצא את גודלה של  $\angle KAE$ .

חלק ממשפט שהופיע בסיפור שלושה ימים וילד, של הסופר א.ב. יהושע:

"אבל אני כבר עמדתי... ליד לוח עמוס משובאות ריבועיות ממעלה ראשונה..."

**תשובות**

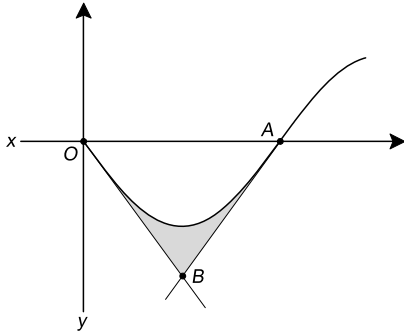
1. א.  $q_{III} = 2q$  ב.  $q_{III} = \frac{2}{3}$

2. א.  $19.47^\circ$  ב.  $AC = 7.35$  cm ג.  $\angle KAE = 11.99^\circ$

**פרק שני - גדילה ודעיכה, חדו"א של פונקציות טריגונומטריות,**

**פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה**

3. נתונה הפונקציה  $f(x) = -\sin 2x$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ .



גרף הפונקציה חותך את ציר  $x$

בראשית הצירים  $O$  ובנקודה  $A$ .

העבירו משיק לגרף הפונקציה בנקודה  $O$

ומשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $A$ .

א. מצא את משוואת המשיק בנקודה  $O$

ואת משוואת המשיק בנקודה  $A$ .

ב. המשיקים נפגשים בנקודה  $B$ .

מצא את השיעורים של הנקודה  $B$ .

ג. מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה  $f(x)$  ועל-ידי שני המשיקים.

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{e^{2x}}{2x^2}$ .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

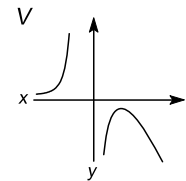
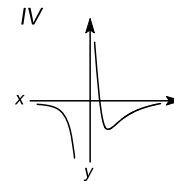
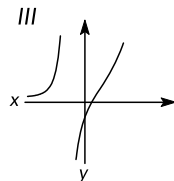
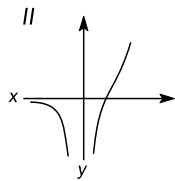
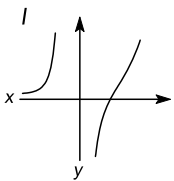
(2) מהי האסימפטוטה האנכית של הפונקציה?

ב. (1) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מבין הגרפים I, II, III, IV, V, שלפניך, איזה גרף מייצג את פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ ? נמק.



ההבדל בין זכוכית, שדרכה אדם רואה אנשים מצידה האחר,

לבין מְרָאָה, שבה אדם רואה רק את עצמו,

הוא - שהמְרָאָה מצופה בכסף...

תלנית

3. א.  $O: y = -2x$ ,  $A: y = 2x - \pi$  ב.  $B(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$  ג.  $S = \frac{\pi}{8} - 1 = 0.2337$  (יחידה ריבועית)

4. א. (1)  $x \neq 0$  (2)  $x = 0$  ב. (1)  $0 < x < 1$ , (2)  $(x < 0) \cup (x > 1)$  ג. אין

5. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 (\ln x)^2$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $x \geq \frac{1}{e^2}$ .
- ד. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום  $x \geq \frac{1}{e^2}$ .
- (2) הגרף של פונקצית הנגזרת  $f'(x)$  חותך את ציר  $x$  בנקודות  $A$  ו- $B$ .
- מצא את השטח המוגבל על-ידי הקטע  $AB$  ועל-ידי הגרף של  $f'(x)$ .

### בהצלחה

זכות היצרים שמוורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

#### ריבועי קסם מתנפחים

הריבוע המרכזי שממדיו  $3 \times 3$  הוא ריבוע קסם.

הריבוע שממדיו  $5 \times 5$  ש'חובק' אותו - גם הוא ריבוע קסם !

הריבוע שממדיו  $7 \times 7$  ש'חובק' את שני הריבועים הקודמים - גם הוא ריבוע קסם !!

והריבוע שממדיו  $9 \times 9$  ש'חובק' את שלושת הריבועים הקודמים - גם הוא ריבוע קסם !!!

5	80	59	73	61	3	63	12	13
1	20	55	30	57	28	71	26	81
4	14	31	50	29	60	35	68	78
76	58	46	38	45	40	36	24	6
7	65	33	43	41	39	49	17	75
74	64	48	42	37	44	34	18	8
67	10	47	32	53	22	51	72	15
66	56	27	52	25	54	11	62	16
69	2	23	9	21	79	19	70	77

#### תשובות

5. א.  $x > 0$  ב.  $\min(1, 0)$  ג.  $\max\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}\right)$  ד. (2)  $S = \frac{1}{e^2} = 0.1353$  (יחידה ריבועית)



**פתרון מבחן 23**

**א. 1.**

$$q_{III} = \frac{\frac{a_2}{b_2}}{\frac{a_1}{b_1}} = \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_1 q}{b_1 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{b_1}{a_1} = \frac{q}{\frac{1}{2}} \Rightarrow q_{III} = 2q$$

**ב.**

$$S_{\infty(II)} = \frac{b_1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{b_1}{\frac{1}{2}} = 2b_1 = 8 \Rightarrow b_1 = 4$$

$$S_{\infty(I)} = 2 S_{\infty(III)} \Rightarrow \frac{a_1}{1 - q} = 2 \cdot \frac{\frac{a_1}{b_1}}{1 - q_{III}} \Rightarrow \frac{a_1}{1 - q} = 2 \cdot \frac{\frac{a_1}{4}}{1 - 2q} = \frac{2}{4} \cdot \frac{a_1}{1 - 2q}$$

$$\frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1}{1 - 2q} \quad / \cdot \frac{2(1-q)(1-2q)}{a_1} \Rightarrow 2(1 - 2q) = 1 - q$$

$$2 - 4q = 1 - q \Rightarrow -3q = -1 \Rightarrow q = \frac{1}{3} \Rightarrow q_{III} = \frac{2}{3}$$

**א. 2.**

(1)  $AB = 2x \Rightarrow$  (2)  $BC = CC' = 2x$

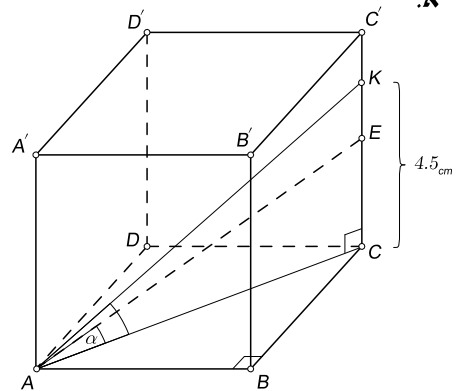
(3)  $CE = \frac{1}{2} CC' = x$

$\triangle ABC$ : (4)  $\angle B = 90^\circ$

$$(5) AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4x^2 + 4x^2} \\ = \sqrt{8x^2} = \sqrt{2 \cdot 4x^2} = 2x\sqrt{2}$$

$\triangle ACE$ : (6)  $\angle ECA = 90^\circ$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{EC}{AC} = \frac{x}{2x\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 19.47^\circ$$



**ב.**

$$V = (2x)^3 = 140.608 \Rightarrow 8x^3 = 140.608 \Rightarrow x^3 = 17.576 / \sqrt[3]{\quad} \Rightarrow x = 2.6 \text{ cm}$$

$$AC = 2x\sqrt{2} = 2 \cdot 2.6 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow AC = 7.35 \text{ cm}$$

**ג.**

$$\triangle KCA: \operatorname{tg} \angle KAC = \frac{KC}{AC} = \frac{4.5}{7.35} \Rightarrow \angle KAC = 31.46^\circ$$

$$\angle KAE = \angle KAC - \alpha = 31.46^\circ - 19.47^\circ \Rightarrow \angle KAE = 11.99^\circ$$

(1) סימון (2) מקצועות קוביה שווים זה לזה (3) נתון (4) זוויות ריבוע - ישרות

(5) פיתגורס

(6) כל מקצוע מאונך למישור שאותו הוא חותך לכן הוא מאונך לכל קו במישור שעובר דרך עקבו

$$f(x) = -\sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$x_A: -\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

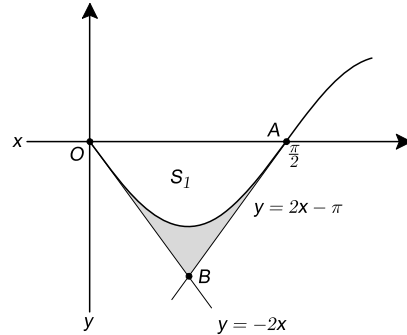
$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_A = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = -2 \cos 2x$$

$$O(0,0): f'(0) = -2 \cdot 1 = -2$$

$$y - 0 = (-2)(x - 0)$$

$$O: y = -2x$$



$$A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right): f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot \cos \pi = -2 \cdot (-1) = 2 \Rightarrow y - 0 = 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow A: y = 2x - \pi$$

ב.

$$-2x = 2x - \pi \Rightarrow 4x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow B\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

ג.

$$\triangle AOB: OA = x_A - x_O = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}, \quad h_{OA} = |y_B| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow S_{\triangle} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi \cdot \pi}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$S_1 = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin 2x \, dx \right| = \left( \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(\*) הפיכת גבולות האינטגרציה - לביטול שליליות השטח.

$$S = S_{\triangle} - S_1 \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{8} - 1 = 0.2337 \text{ (יחידה ריבועית)}$$

### הפרדוקסים של זנון - למה אכילס לא ישיג את הצב

זנון, פילוסוף יווני, 435-495 לפנה"ס, נהג להציג פרדוקסים מתמטיים רבים. אחד מהמפורסמים שבהם הוא זה: אכילס והצב עורכים ביניהם תחרות ריצה. אכילס נותן לצב מקדמה של 100 מ'. אכילס מהיר מהצב פי 10. התחרות מתחילה. כשאכילס עובר 100 מ', הצב משיג אותו ב-10 מ'. כשאכילס עובר את אותם 10 מ', הצב משיג אותו במטר. כשאכילס עובר את המטר, משיג אותו הצב ב-10 ס"מ וכך הלאה עד אינסוף. יוצא מכאן, שכל פעם שאכילס ידביק את הפער שבינו לבין הצב - הצב ישיג אותו בעשירית הפער האחרון שהיה ביניהם. אם כך אכילס לא יצליח להשיג את הצב לעולם. . . מצד שני ברור שהוא ישיג אותו. נו, טוב, לכן זה פרדוקס. . . (בסוף אכילס מת, בלי קשר לצב).

$f(x) = \frac{e^{2x}}{2x^2}$ ,  $2x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$  (1) א. 4

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}}{2x^2} = \frac{\rightarrow 1}{\rightarrow 0} = \infty \Rightarrow x = 0$  (2)

ג. 1 (1)

$f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot 2x^2 - e^{2x} \cdot 4x}{(2x^2)^2} = \frac{4xe^{2x}(x-1)}{4x^4} = \frac{e^{2x}(x-1)}{x^3} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 1$

x		0		1	
f'	$\frac{+-}{-} = +$	$\emptyset$	$\frac{+-}{+} = -$	0	$\frac{++}{+} = +$
f	$\nearrow$	asym.	$\searrow$	min	$\nearrow$

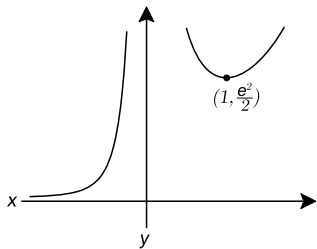
$\nearrow: (x < 0) \cup (x > 1)$

$\searrow: 0 < x < 1$

(2)

$x \neq 0, y = 0 \Rightarrow e^{2x} = 0 \Rightarrow \emptyset$

(3)



ג.  $f'(x) > 0$  בתחום  $x < 0$  נפסלים: II ר' IV.

III.  $f'(x)$  אינה מוגדרת עבור  $x = 0$ . נפסל: III.

V.  $f'(1) = 0$ . נפסל: V.

גרף I מקיים את כל הנדרש:

$f'(x) > 0$  בתחום  $(x < 0) \cup (x > 1)$ ,  $f'(x) < 0$  בתחום  $0 < x < 1$ .

$f'(1) = 0$ , ואינה מוגדרת עבור  $x = 0$ .

א. 5

$f(x) = x^2 \cdot \ln^2 x$ ,  $\ln x \Rightarrow x > 0$

ב.

$f'(x) = 2x \cdot \ln^2 x + x^2 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln^2 x + 2x \ln x = 2x \ln x (\ln x + 1) \stackrel{?}{=} 0$

(1)  $\ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$ , (2)  $\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		1	
f'	$\emptyset$	$+- - - = +$	0	$+ - + = -$	0	$+++ = +$
f	$\nearrow$		max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^2} \cdot (-1)^2 = \frac{1}{e^2}$ ,  $f(1) = 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \max(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2})$ ,  $\min(1, 0)$

(2)

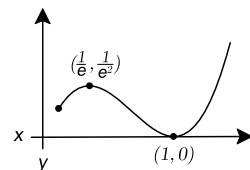
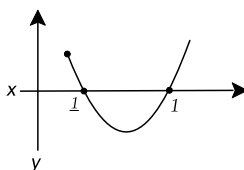
(1) א.

ג.

$S = \left| \int_{\frac{1}{e}}^1 f'(x) dx \right| = \left| f(x) \right|_{\frac{1}{e}}^1$

$S = \left| f(1) - f(\frac{1}{e}) \right| = \left| 0 - \frac{1}{e^2} \right|$

$S = \frac{1}{e^2} = 0.1353$  (יחידה ריבועית)



**מבחן 24 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד ב**

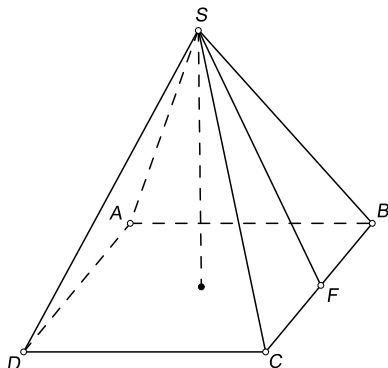
בחירה: שלוש שאלות: שאלה אחת מהשאלות 1-2, שתי שאלות מהשאלות 3-5.

**פרק ראשון - סדרות, טריגונומטריה במרחב**

**סדרות**

1. ארבעת האיברים שלפניך:  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית עולה. סכום ארבעת האיברים הוא 20.
- שלושת האיברים  $a_1, a_2, a_4$  הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית.
- $a_1$  הוא האיבר הראשון בשתי הסדרות.
- א. הראה כי  $a_1$  שווה להפרש הסדרה החשבונית, ומצא את הפרש הסדרה החשבונית.
- ב.  $\frac{a_2}{a_3 - a_1}$  הוא האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת.
- סכום כל האיברים בסדרה זו הוא 2.
- מצא את הסכום של 6 האיברים הראשונים בסדרה זו.

**טריגונומטריה במרחב**



2. נתונה פירמידה ישרה  $SABCD$  שבסיסה ריבוע. גובה הפירמידה שווה לצלע של בסיס הפירמידה.
- $SF$  הוא גובה למקצוע  $CB$  בפאה  $SCB$ .
- א. מצא את גודל הזווית בין  $SF$  לבסיס הפירמידה.
- ב. מצא את גודל הזווית  $CSB$ .
- ג. נפח הפירמידה הוא  $1125$  סמ"ק.
- מצא את שטח המשולש  $SDB$ .

הזו גפרור אחד בלבד (לא להוציא. להשאיר!) כך שהשוויון יהיה נכון.

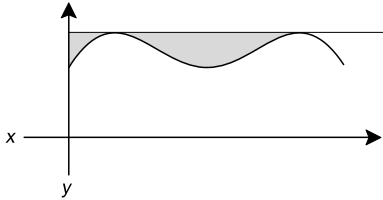
פתרון (בצופן א"ת ב"ש): תסא ססעדא תסא בפפצ תסא.

**סאלות**

1. א.  $a_1 = d = 2$  ב.  $S_6 = \frac{63}{32} = 1 \frac{31}{32}$
2. א.  $63.43^\circ$  ב.  $48.19^\circ$  ג.  $S_{\triangle SDB} = 159.1$  (סמ"ר)

**פרק שני - גדילה ודעיכה, חדו"א של פונקציות טריגונומטריות,**

**פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה**



3. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x$

בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודות המקסימום המוחלט שלה.  
א. (1) מצא את משוואת המשיק.

(2) מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על-ידי המשיק ועל-ידי ציר  $y$ .

ב. נתונה הפונקציה  $g(x) = f(x) - \frac{3}{4}$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

מהי משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודות המקסימום המוחלט שלה? נמק.  
תוכל להיעזר בתת-סעיף א(1).

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{e^x}$ , פרמטר  $a < 2$ .

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?

ב. נתון כי לפונקציה  $f(x)$  יש שתי נקודות קיצון.

ההפרש בין שיעור ה- $x$  החיובי לבין שיעור ה- $x$  השלילי של נקודות הקיצון הוא 2.  
מצא את הערך של הפרמטר  $a$ .

הצב  $a = 1$  וענה על סעיף ג.

ג. (1) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

רשום על צג המחשבון מספר תלת-ספרתי. זכור אותו. רשום אותו שוב.

קיבלת מספר שש-ספרתי ששלוש ספרותיו הראשונות זהות לשלוש ספרותיו האחרונות. ברור.

חלק את המספר הזה ב-7. קיבלת מנה שלמה, ללא שארית? יופי.

חלק את התוצאה ב-11. קיבלת מנה שלמה ללא שארית? יופי.

חלק את התוצאה ב-13. מה קיבלת? עכשו תחשוב מדוע זה עובד.

**תלנות**

3. א. (1)  $y = \frac{3}{4}$  (2)  $S = \frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} - 1 = 0.314$  (יחידה ריבועיות) ב.  $y = 0$

4. א.  $\forall x$  ב.  $a = 1$  ג. (1)  $(-1, 0)$ , (2)  $(0, 1)$ ,  $\max(1, \frac{4}{e})$ ,  $\min(-1, 0)$

**דוגמאות שאלות - משרד החינוך**

בעקבות בקשות הבהרה של מורים, פרסם משרד החינוך דוגמאות שאלות למבחני בגרות, שאמורות לייצג את רמת הידע הנדרשת ואת רמת המורכבות של השאלות במבחן עצמו.

**אנליזה - פונקציות מעריכיות**

1. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{e^{2x}}$ .

א. מצא את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) השיעורים של נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(4) תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

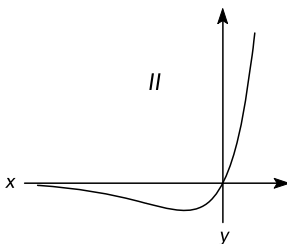
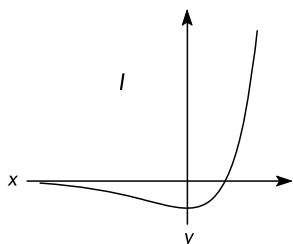
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצא את ערכי  $x$  שעבורם גם ערכי הפונקציה  $f(x)$  וגם ערכי נגזרתה  $f'(x)$  חיוביים.

ד. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2}{e^{2x}}}$ .

2. נתונה נגזרת של הפונקציה  $f(x) : f'(x) = 2 \ln 3 \cdot (3^{2x} - 3^x)$ .

א. איזה גרף מבין השניים שלפניך מתאר את  $f'(x)$ ? נמק.



ב. נתון כי  $f(0) = -1$ .

מצא את: (1)  $f(x)$ .

(2) נקודת הקיצון של  $f(x)$  וקבע את סוגה.

(3) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר  $x$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה  $f(x)$  ועל-ידי הצירים.

**תשובות**

1. א. (1)  $\forall x$  (2)  $(\pm\sqrt{2}, 0)$ ,  $(0, -2)$

(3)  $\max(2, \frac{2}{e^4})$ ,  $\min(-1, -e^2)$  (4)  $\nearrow: -1 < x < 2$ ,  $\searrow: (x < -1) \cup (x > 2)$

ג.  $\sqrt{2} < x < 2$  ד.  $(x \leq -\sqrt{2}) \cup (x \geq \sqrt{2})$

2. א. II ב. (1)  $f(x) = 3^{2x} - 2 \cdot 3^x$  (2)  $\min(0, -1)$  (3)  $(\log_3 2, 0) \equiv (0.631, 0)$

ד.  $S = \frac{1}{\ln 9} = 0.4551$  (יחידה ריבועית)

**אנליזה - פונקציות טריגונומטריות**

3. נתונה הפונקציה  $y = (a \sin x + \cos x)^2$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 0$  שווה ל-2.

א. מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

ב. הצב בפונקציה  $a = 1$  ומצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון,

וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה וציר  $x$ ,

בין שתי נקודות המינימום המוחלט של הפונקציה בתחום הנתון.

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin^2 x - 2 \cos x + mx$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

הישר  $x = \pi$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות הקיצון היחידה שלו בתחום הנתון.

נקודות הקיצון היחידה של הפונקציה בתחום היא מקסימלית.

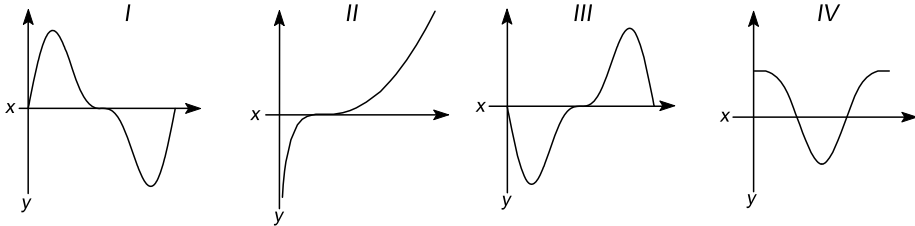
א. מצא את ערכו של הפרמטר  $m$ .

ב. הצב בפונקציה  $m = 0$  ומצא את נקודות הקיצון המוחלטות של גרף הפונקציה  $f(x)$

בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. קבע איזה מבין הגרפים שלפניך מתאים לגרף הנגזרת  $f'(x)$ . נמק.



ה. מצא את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת ובין ציר  $x$  בתחום הנתון.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום  $-2\pi \leq x \leq 0$ . הסבר.

**תשובות**

3. א.  $a = 1$  ב.  $\min_{ep.}(0, 1)$ ,  $\max(\frac{\pi}{4}, 2)$ ,  $\min(\frac{3\pi}{4}, 0)$ ,  $\max(\frac{5\pi}{4}, 2)$ ,  $\min(\frac{7\pi}{4}, 0)$ ,  $\max_{ep.}(2\pi, 1)$

ד.  $S = \pi$  (יחידות ריבועיות)

4. א.  $m = 0$  ב.  $\min_{ab.}(0, -2)$ ,  $\min_{ab.}(2\pi, -2)$ ,  $\max_{ab.}(\pi, 2)$

ד.  $I$  ה.  $S = 8$  (יחידות ריבועיות)

א.4  $f(x) = \sin^2 x - 2 \cos x + mx$  ,  $0 \leq x \leq 2\pi$  ,  $f'(\pi) = 0$

$f'(x) = 2 \sin x \cos x - 2 \cdot (-\sin x) + m = \sin 2x + 2 \sin x + m$

$f'(\pi) = 0 + 2 \cdot 0 + m = 0 \Rightarrow m = 0$   
נתון

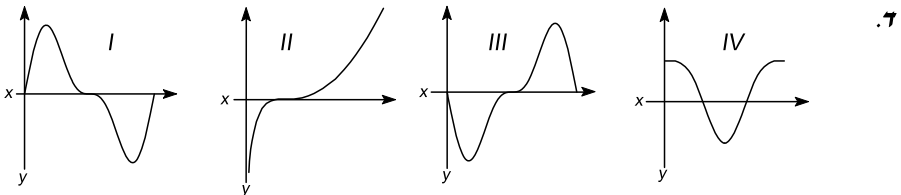
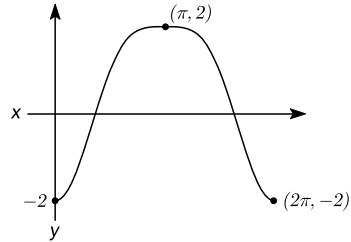
ב.ג. נתון שיש רק נקודת קיצון פנימית - אחת בלבד.

$f(x) = \sin^2 x - 2 \cos x$

$f(0) = 0 - 2 = -2 \Rightarrow \min_{ab.}(0, -2)$

$f(\pi) = 0 - 2 \cdot (-1) = 2 \Rightarrow \min_{ab.}(2\pi, -2)$

$f(2\pi) = 0 - 2 = -2 \Rightarrow \max_{ab.}(\pi, 2)$



גרף IV נפסל, היות שהוא מראה שתי נקודות פנימיות בהן הנגזרת מתאפסת ומשנה

את סימנה, בסתירה לקיומה של נקודת קיצון פנימית אחת בלבד.

גרף II נפסל היות שהוא מציג נגזרת שאינה מוגדרת עבור  $x = 0$ , בניגוד לנגזרת שמצאנו.

גרף III נפסל היות שהוא מציג מעבר סימני נגזרת מ'-' ל'+',

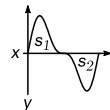
מה שאומר שהתנהגות  $f$  היא  $\searrow \nearrow$  - כלומר: מינימום, בניגוד לנתון: מקסימום.

**גרף I** הוא הגרף שמייצג את  $f'(x) - f$  מתאים בכל הפרמטרים:

נגזרת מוגדרת בנקודות הקצה, נקודת איפוס אחת, מעבר מ'+' ל'-'  $\Leftarrow f: \nearrow \searrow$ .

$f'(\pi - x) = \sin 2(\pi - x) + 2 \sin(\pi - x)$  נימוק:  $S_1 = S_2$

$= -\sin 2(x - \pi) - 2 \sin(x - \pi) = -f'(x - \pi) \Rightarrow S_1 = S_2$



$\Rightarrow S = 2 \int_0^\pi f'(x) dx = 2 f(x) \Big|_0^\pi = 2 (f(\pi) - f(0)) = 2 \cdot (2 - (-2)) \Rightarrow S = 8$  (יחידות ריבועיות)

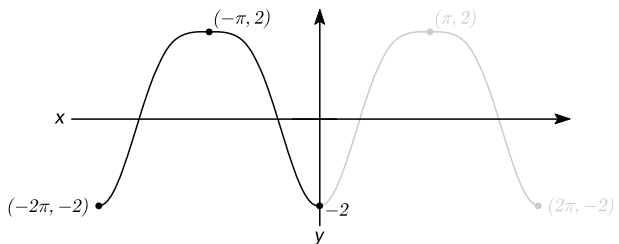
ו. על סמך זוגיות הפונקציה  $f(x)$  (להלן),

הגרף המבוקש יהיה תמונת ראי לגרף בתחום הנגדי, כשציר  $y$  הוא ציר הסימטריה.

$f(-x) = \sin^2(-x) - 2 \cos(-x)$

$= (-\sin x)^2 - 2 \cos x$

$= \sin^2 x - 2 \cos x = f(x)$





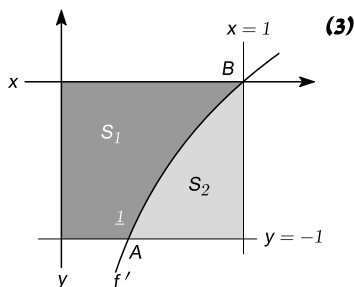
$f(x) = x \ln x - x$  ,  $\ln x \Rightarrow x > 0$  (1) א .5

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$  (2)

x	0		1	
f'		-	0	+
f		\	min	/

$f(1) = 1 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow \min(1, -1)$

$y = 0 \Rightarrow x \ln x - x = 0 \Rightarrow x(\ln x - 1) = 0$   
 $\Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e^1 = e \Rightarrow (e, 0)$



$x_A: \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$x_B: \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$

$S_2 = \int_{\frac{1}{e}}^1 (f'(x) - (-1)) dx = (f(x) + x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 = (-1 + 1) - (\frac{1}{e} \cdot (-1) - \frac{1}{e} + \frac{1}{e}) = 1$

$S_1 = S_{\text{square}} - S_2 = 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{1 - \frac{1}{e}}{1} = \frac{1 - \frac{1}{e}}{1} \cdot e \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = e - 1$

$f(x) = \frac{x}{\ln a} - x \log_4 x$  א .6

$f(e^2) = 0 \Rightarrow \frac{e^2}{\ln a} - e^2 \cdot \log_4 e^2 = 0 \quad / : e^2 \Rightarrow \frac{1}{\ln a} - \frac{\ln e^2}{\ln 4} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\ln a} = \frac{2 \ln e}{2 \ln 2} \Rightarrow \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow a = 2$

(1) ב

$f(x) = \frac{x}{\ln 2} - x \log_4 x$  ,  $\log_4 x \Rightarrow x > 0$

(2)-(3)

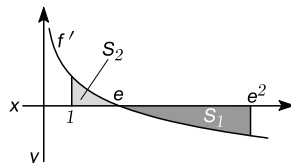
$f'(x) = \frac{1}{\ln 2} - (1 \cdot \log_4 x + x \cdot \frac{1}{x \ln 4}) = \frac{1}{\ln 2} - \log_4 x - \frac{1}{2 \ln 2} = \frac{1}{2 \ln 2} - \log_4 x = \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{\ln x}{2 \ln 2} \stackrel{?}{=} 0$

$\Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$  ,  $f(e) = \frac{e}{\ln 2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{e}{2 \ln 2}$

x	0		e	
f'		+	0	-
f		/	max	\

$\max(e, \frac{e}{2 \ln 2})$

$\nearrow: 0 < x < e$  ,  $\searrow: x > e$



$S_1 = \int_0^e -f'(x) dx = -f(x) \Big|_0^e = -(0 - \frac{e}{2 \ln 2}) = \frac{e}{2 \ln 2}$

$S_2 = \int_1^e f'(x) dx = f(x) \Big|_1^e = \frac{e}{2 \ln 2} - (\frac{1}{\ln 2} - 1 \cdot 0) \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{e}{2 \ln 2}}{\frac{e}{2 \ln 2} - \frac{1}{\ln 2}} \cdot \frac{2 \ln 2}{2 \ln 2} = \frac{e}{e - 2} (\checkmark)$



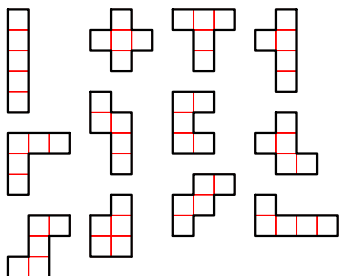


חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי סוג הפונקציה	חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי נושאים
<b>פונקציה רציונאלית</b>	<b>חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר</b>
חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר	פונקציה רציונאלית
1/2a, 17/5	פונקציית שורש
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות	פונקציה טריגונומטרית
13/5a-e	11/3a-c, 12/3a, 16/3, 20/5a-c, 21/4, 22/3,
- חקירת פונקציה, עם מציאת ערך פרמטר	24/3, 25/3a, 26/3, 27/3a-b, 29/3a-c,
5/2a, 6/3a-b	30/3a-d, 31/3a-b, 32/3a-d, 34/3, 36/3a-d
- הבעה באמצעות פרמטר	פונקציה מעריכית (בסיס a)
2/3	פונקציה מעריכית (בסיס e)
<b>פונקציית שורש</b>	פונקציה מעריכית (בסיס e)
חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר	2/2, 4/2, 5/3, 9/2a-b, 11/4a-b, 13/4, 14/4a-c,
21/3	16/4, 17/3, 18/3, 26/4a, 27/4, 30/4a-b, 35/4
- נקודות קיצון מוחלט	פונקציה לוגריתמית
21/3	פונקציית LN
<b>פונקציה טריגונומטרית</b>	פונקציית LN
חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר	<b>חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות</b>
11/3a-c, 12/3a, 16/3, 20/5a-c, 21/4, 22/3,	פונקציה רציונאלית
24/3, 25/3a, 26/3, 27/3a-b, 29/3a-c,	פונקציה טריגונומטרית
30/3a-d, 31/3a-b, 32/3a-d, 34/3, 36/3a-d	פונקציה מעריכית (בסיס a)
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות	פונקציה מעריכית (בסיס e)
10/3	פונקציית LN
- חקירת פונקציה, עם מציאת ערך פרמטר	פונקציה מעריכית (בסיס e)
13/3, 15/4a-c, 17/4a, 18/4a, 33/3, 36/3e	פונקציה מעריכית (בסיס a)
- הבעה באמצעות פרמטר	פונקציה מעריכית (בסיס e)
13/3	פונקציית LN
- הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת	<b>חקירת פונקציה, עם מציאת ערך פרמטר</b>
34/3	פונקציה רציונאלית
- נקודות קיצון מוחלט	פונקציה טריגונומטרית
13/3, 15/4, 20/5, 21/4, 24/3, 25/3, 26/3	פונקציה מעריכית (בסיס e)
<b>פונקציה מעריכית (בסיס a)</b>	פונקציית LN
חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר	<b>חקירת פונקציה, עם מציאת ערך פרמטר</b>
6/2a-e, 21/3	פונקציה רציונאלית
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות	פונקציה טריגונומטרית
31/4	פונקציה מעריכית (בסיס e)
- נקודות קיצון מוחלט	פונקציה מעריכית (בסיס e)
21/3	פונקציית LN
<b>פונקציה מעריכית (בסיס e)</b>	<b>הבעה באמצעות פרמטר</b>
חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר	פונקציה רציונאלית
2/2, 4/2, 5/3, 9/2a-b, 11/4a-b, 13/4, 14/4a-c,	פונקציה טריגונומטרית
16/4, 17/3, 18/3, 26/4a, 27/4, 30/4a-b, 35/4	פונקציה מעריכית (בסיס e)
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות	פונקציה מעריכית (בסיס e)
19/5a-b, 23/4, 25/4, 29/4, 36/4a-d	פונקציית LN
- חקירת פונקציה, עם מציאת ערך פרמטר	פונקציה מעריכית (בסיס e)
7/3a-b, 8/2a-b, 10/5b, 12/4, 15/5, 24/4,	<b>הבעה באמצעות פרמטר</b>
28/4a-c, 29/4, 32/4a-c, 33/4, 34/4	פונקציה רציונאלית
- הבעה באמצעות פרמטר	פונקציה טריגונומטרית
33/4	פונקציה מעריכית (בסיס e)
- הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת	פונקציית LN
12/4d, 25/4c, 29/4d, 33/4	פונקציה מעריכית (בסיס e)
- התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)	פונקציה מעריכית (בסיס e)
13/4, <u>23/4</u>	<b>הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה</b>
<b>פונקציה לוגריתמית</b>	פונקציה טריגונומטרית
חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר	פונקציה מעריכית (בסיס e)
7/2, 10/4, 18/5	פונקציית LN
- הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת	פונקציה מעריכית (בסיס e)
7/2d	פונקציה לוגריתמית
- התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)	פונקציית LN
18/5	<b>התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)</b>
<b>פונקציית LN</b>	פונקציה מעריכית (בסיס e)
חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר	פונקציה לוגריתמית
3/2a-b, 4/3, 7/2, 8/3, 9/3, 11/5, 16/5,	פונקציית LN
20/4, 23/5, 24/5, 25/5a, 28/5, 34/5	פונקציה מעריכית (בסיס e)
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות	פונקציה מעריכית (בסיס e)
19/4, 26/5, 29/5, 30/5, 31/5a, 32/5, 33/5, 35/5	פונקציית LN
- חקירת פונקציה, עם מציאת ערך פרמטר	פונקציה מעריכית (בסיס e)
14/5a-e, 16/5, 19/4, 21/5, 27/5, 30/5, 35/5, 36/5	פונקציה מעריכית (בסיס e)
- הבעה באמצעות פרמטר	<b>נקודות קיצון מוחלט</b>
16/5, 19/4	פונקציית שורש
- הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת	פונקציה טריגונומטרית
4/3c, 28/5f, 31/5b, 32/5c	פונקציה מעריכית (בסיס a)
- התאמת פונקציה לגרף (קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)	פונקציה מעריכית (בסיס a)
3/2, 8/3, 9/3, 11/5, 14/5, 20/4, 21/5, 24/5, 30/5, 33/5	פונקציה מעריכית (בסיס a)

<b>חשבון אינטגרלי</b>	
<b>חשובי אינטגרלים ושטחים</b>	
1/2, 2/3, 5/2, 6/3, 13/5, 15/3b, 17/5	- פונקציה רציונאלית
	- פונקציה טריגונומטרית
10/3, 11/3, 12/3, 14/3, 15/4, 16/3, 17/4, 18/4, 19/3, 20/5, 21/4, 23/3, 24/3, 25/3, 27/3, 28/3, 29/3, 30/3, 31/3, 32/3, 33/3, 35/3	- פונקציה מעריכית (בסיס a)
6/2	- פונקציה מעריכית (בסיס e)
2/2, 7/3, 8/2, 9/2, 11/4, 14/4, 16/4, 19/5, 22/5, 26/4, 27/4, 30/4, 32/4, 36/4	- פונקציית LN
3/2, 12/5a, 25/5	
<b>אינטגרל עם פרמטר</b>	
- פונקציה רציונאלית	
2/3	- פונקציה טריגונומטרית
28/3	- פונקציה מעריכית (בסיס e)
22/5, 26/5	- פונקציית LN
31/5	
<b>שטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת</b>	
- פונקציה טריגונומטרית	
20/5, 27/3, 34/3	- פונקציה מעריכית (בסיס e)
28/4, 30/4	- פונקציה לוגריתמית
18/5	- פונקציית LN
14/5, 23/5, 24/5, 31/5	

<b>חשבון דיפרנציאלי - נושאי חקירה נוספים</b>	
<b>תחומי שליליות וחיוביות</b>	
<b>פונקציה שלילית</b>	
29/4	- פונקציה מעריכית (בסיס e)
7/2	- פונקציה לוגריתמית
7/2, 33/5	- פונקציית LN
<b>פונקציה חיובית</b>	
- פונקציה מעריכית (בסיס e)	
16/4, 18/3, 34/4	- פונקציית LN
28/5, 33/5	
<b>תחומי ירדה ועלייה</b>	
<b>פונקציה יורדת</b>	
- פונקציה מעריכית (בסיס e)	
4/2, 5/3	
<b>פונקציה עולה</b>	
- פונקציה מעריכית (בסיס e)	
30/4, 36/4a-d	- פונקציה לוגריתמית
18/5	
<b>אי-שוויונות</b>	
- פונקציה מעריכית (בסיס a)	
6/2	- פונקציה מעריכית (בסיס e)
4/2	

### Pentomino



Pentomino הוא משחק הרכבה הכולל 12 חלקים.

כל חלק מורכב מ-5 ריבועים.

ישנם 12 צירופים אפשריים של 5 ריבועים עם צלע משותפת.

ואלו הם 12 חלקי ההרכבה.

Pent - מיוונית 5, ו-omino - על משקל משחק Domino.

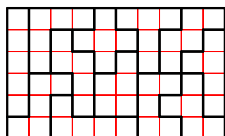
בסך הכל שטח כל החלקים הוא  $12 \times 5 = 60$  יחידות ריבועיות.

ניתן להרכיב מהן מלבנים בגדלים  $6 \times 10$ ,  $5 \times 12$ ,  $4 \times 15$ ,  $3 \times 20$ .

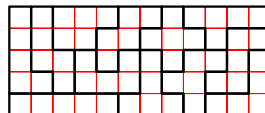
ישנם 2339 פתרונות למלבן  $6 \times 10$ , 1010 פתרונות למלבן  $5 \times 12$ ,

368 פתרונות ל-  $4 \times 15$  ושני פתרונות בלבד ל-  $3 \times 20$ .

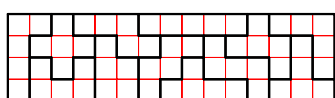
$6 \times 10$



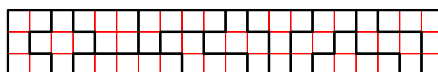
$5 \times 12$



$4 \times 15$



$3 \times 20$



**הנוסחאות הרשמי לארבע יחידות**

**אלגברה**

- נוסחאות הכפל המקוצר:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$  ,  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$  ,  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית:  $ax^2 + bx + c = 0$  ,  $a \neq 0$  , השורשים:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- סדרות:

סדרה הנדסית	סדרה חשבונית	
$a_1 = a$ , $a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_1 = a$ , $a_{n+1} = a_n + d$	כלל נסיגה
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	האיבר ה-n
$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ $S = \frac{a_1}{1 - q}$ : סכום אינסופי	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \frac{n \cdot [2a_1 + (n - 1)d]}{2}$	סכום

- חוקות:  $(a \neq 0, b \neq 0)$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$  ,  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$  ,  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$  ,  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$  ,  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

- לוגריתמים  $(a, b, c > 0 ; a, b \neq 1)$ :  $\log_a(a^b) = b$  ,  $a^{\log_a b} = b$  ,  $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$  ,  $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$  ,  $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן  $t$  הוא  $q$ :  $M_t = M_0 \cdot q^t$

**גאומטריה אנליטית**

שיפוע  $m$  של ישר העובר דרך הנקודות  $(x_1, y_1)$  ו- $(x_2, y_2)$ :  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר  $y = mx + b$  העובר בנקודה  $(x_1, y_1)$ :  $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי נקודת האמצע  $M(x_M, y_M)$  של קטע שקצותיו הם  $A(x_1, y_1)$  ו- $B(x_2, y_2)$  הם:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} , y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

המרחק  $d$  בין הנקודות  $A(x_1, y_1)$  ו- $B(x_2, y_2)$ :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

שני ישרים בעלי שיפועים  $m_1$  ו- $m_2$  מאונכים זה לזה אם ורק אם:  $m_1 \cdot m_2 = -1$

משוואת מעגל שמרכזו  $(a, b)$  , ורדיוסו  $R$ :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

**הסתברות**

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל- $k$  הצלחות מתוך  $n$  נסיונות בהתפלגות בינומית, כאשר

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{כאשר } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ההסתברות להצלחה היא  $p$ :

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{,} \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- הסתברות מותנית: - נוסחת בייס:

**טריגונומטריה**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (R - \text{רדיוס המעגל החוסם את המשולש})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \quad (\gamma \text{ היא הזווית הכלואה בין } a \text{ ל-} b)$$

$$S = \frac{1}{2} a R^2 \quad \text{אורך קשת של } \alpha \text{ רדיאנים: } l = aR, \quad \text{שטח גזרה של } \alpha \text{ רדיאנים:}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha \quad (\alpha \text{ היא הזווית הכלואה בין } b \text{ ל-} c)$$

$$V = B \cdot h \quad \text{נפח: } (B - \text{שטח הבסיס, } h - \text{גובה הגוף})$$

$$M = P \cdot h \quad \text{שטח מעטפת: } (P - \text{היקף הבסיס, } h - \text{גובה הגוף})$$

$$V = \frac{B \cdot h}{3} \quad \text{נפח: } (B - \text{שטח הבסיס, } h - \text{גובה הגוף})$$

$$M = \pi R l \quad \text{שטח מעטפת: } (R - \text{רדיוס העיגול, } l - \text{הקו היוצר})$$

**חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי**

- נגזרות:

$$(x^t)' = t x^{t-1}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{נגזרת של מכפלת פונקציות:}$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{נגזרת של מנת פונקציות:}$$

$$[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x) \quad \text{נגזרת של פונקציה מורכבת: כאשר } u'(x) \text{ היא נגזרת}$$

של  $u$  לפי  $x$  (נגזרת פנימית) ו- $f'(u)$  היא נגזרת של  $f$  לפי  $u$  (נגזרת חיצונית)

$$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \quad \text{- אינטגרלים:}$$

$$\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + c \quad \text{אם } F(x) \text{ היא פונקציה קדומה של } f(x) \text{ אז:}$$