אלון סלפק   אירנה ליבסטר

מבוא למערכות ליניאריות בזמן רציף

אפקה
המכללה האקדמית
להנדסה בתל-אביב

הוצאת שורש
הוצאת שורש (אלי מיטב) - 2671210 – 052
email: elmtv@netvision.net.il   web: http://www.shoresh1.co.il

תוכן עניינים

הקדמה

מטרתו של ספר זה היא להקנות כלים מתמטיים לניתוח אותות ומערכות בזמן רציף (אנלוגיים). הכלי העיקרי לניתוח של מערכות ליניאריות הוא ההתמרה הליניארית המעבירה אותנו ממרחב וקטורי אחד למשנהו, כאשר בכל מרחב וקטורי אנו רואים את המערכת בצורה שונה. לצורך המחשה, הדבר דומה בדיוק להתבוננות בחפץ מזוויות ראיה שונות, אך כאן מדובר בצורה מתמטית. כמו סקירה של חפץ מכיוונים שונים, גם מערכת הנדסית ניתן להבין באופנים שונים אם נתבונן בה, או ננתח אותה, במישור הזמן או במישור פורייה למשל - שתיים מתוך ארבע זוויות הראייה בהם נעסוק בספר זה.

מערכות בזמן רציף לעומת מערכות בזמן בדיד

הספר נכתב מתוך תפיסה שיעיל יותר ללמוד את החומר העוסק במערכות בזמן רציף בנפרד מהחומר העוסק במערכות בזמן בדיד. למרות הדמיון הרב בין שני הנושאים, ההבדלים המתמטיים גוררים הבדלים מעשיים מהותיים, העלולים להיטשטש כאשר הלימוד נעשה בו זמנית. רק כדי לסבר את האוזן, אחד ההבדלים העיקריים והמהותיים בין מערכות בזמן רציף למערכות בזמן בדיד הוא חוסר היכולת לממש השהייה טהורה בזמן במערכות בזמן רציף, לעומת פשטות של מימוש כזה בזמן בדיד. בפרק 6 נלמד את הגורם המתמטי העומד בבסיס ההבדל הזה הנובע מהמושג פונקצית תמסורת רציונאלית. ההבנה של ההבדל המתמטי בין תחום הזמן הרציף לתחום הזמן הבדיד, מועילה לתפיסת המשמעויות המעשיות הלא פשוטות של ההבדלים בין שני התחומים.

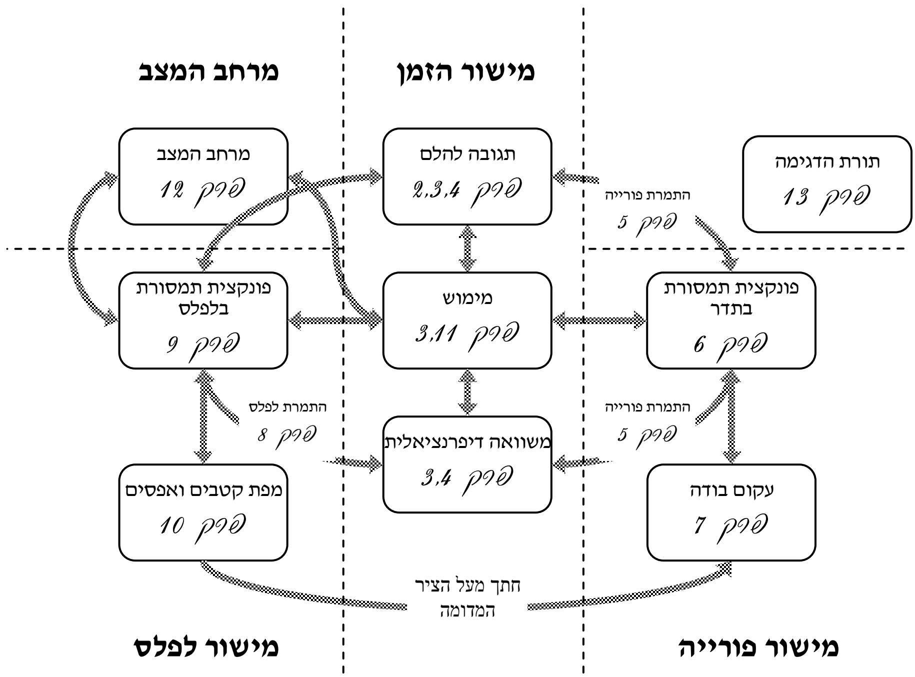
מבנה הספר

מבנה הספר תוכנן כך שיתאים ככל האפשר למבנה הטבעי של החומר המתמטי. התרשים הבא מתאר את מבנה הספר בצורה סכמטית: עיקר הספר, פרקים 2-12, עוסק במרחבים הוקטוריים השונים בהם אנו מנתחים את המערכות:

1. מישור הזמן - פרקים 2-4,11
2. מישור פורייה - פרקים 5-7
3. מישור לפלס - פרקים 8-10
4. מרחב המצב - פרק 12

הקדמה

בפרק 1 נלמד את הרקע המתמטי של התמרות ליניאריות, ובפרק 13 נלמד את תורת הדגימה העוסקת במעבר בין אותות ומערכות בזמן רציף לאותות ומערכות בזמן בדיד.



פתרונות

פתרונות לשאלות ניתן להוריד באתר:

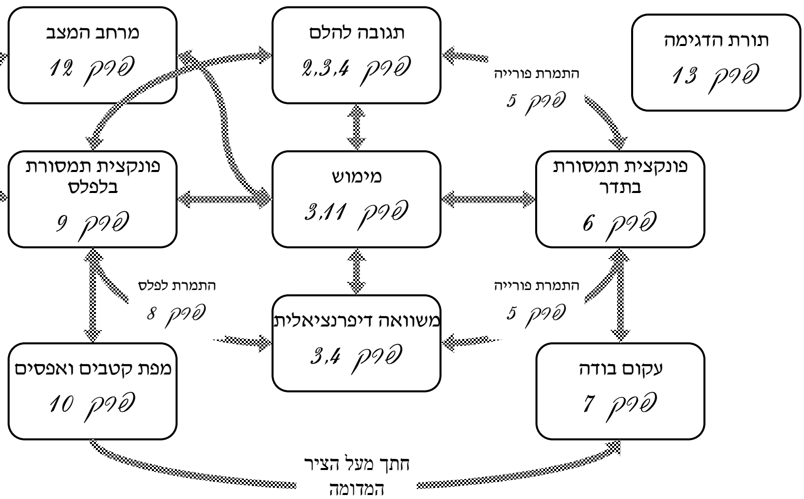
http://highlearn.afeka.ac.il/users/www/9357/SnSbook

שגיאות

בספר זה הושקעו שעות עבודה רבות לאורך כחמש שנים. מאמץ רב הושקע באיתור וניפוי השגיאות, הן שגיאות הכתיב, התחביר והעריכה, והן השגיאות המתמטיות בשאלות ובפתרונות. יחד עם זאת, לא יהיה זה בלתי סביר להניח ששגיאות כאלו ואחרות עדיין שוכנות להן בדפים הבאים. אם מצאתם שגיאה, ראשית קבלו את התנצלותנו הכנה, ושנית, נודה לכם מאוד אם תשלחו לנו הודעה לכתובת alons@afeka.ac.il, וסייעו לנו לשפר את הגרסה הבאה.

שימוש יעיל ופורה, אירנה ליבסטר ואלון סלפק.

1 מבוא ורקע מתמטי



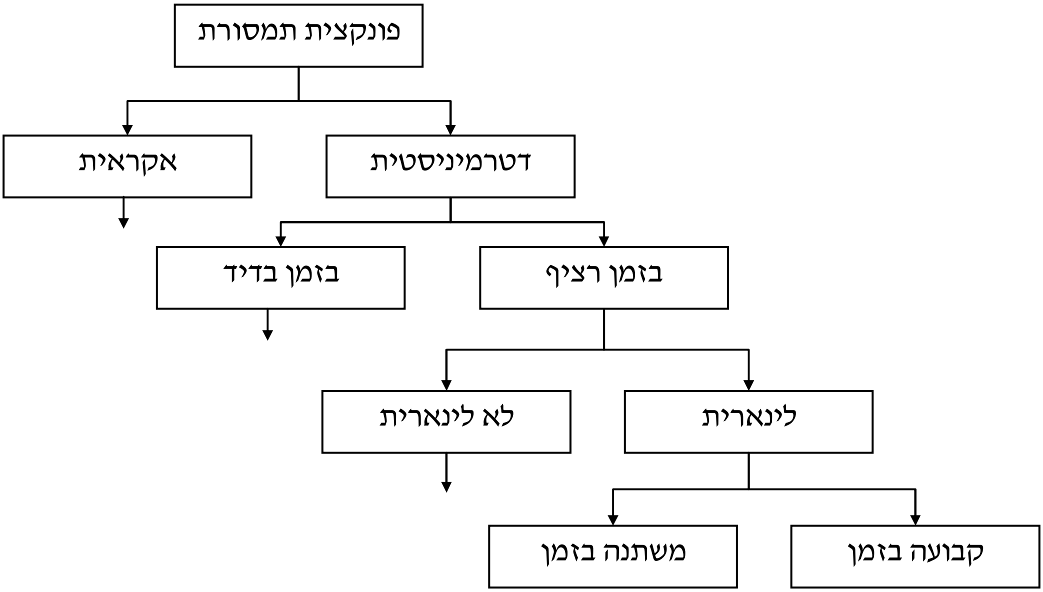
בסיומו של פרק זה נדע:

- את חמשת השלבים בהגדרת משוואת התמרה ומשוואת התמרה הפוכה, שהם:
  א. הגדרת המרחב הוקטורי;
  ב. ניסוח המכפלה הפנימית;
  ג. קביעת קבוצת וקטורי הבסיס;
  ד. ניסוח משוואת ההתמרה ומשוואת ההתמרה ההפוכה;
  ה. אפיון תכונות ההתמרה.

מערכת היא מושג הנדסי שמסתבר שלא פשוט להגדירו. למערכת יכולה להיות כניסה אחת או יותר, ואף לא כניסה אחת (למשל מערכת היוצרת אות סינוס בתדר, אמפליטודה ופאזה קבועים), ויציאה אחת או יותר. המקרה בו אין אף יציאה אפשרי אבל חסר משמעות, כי בסופו של דבר, אנו מעוניינים בתוצאה של פעולת המערכת.

מערכת מאופיינת בקשר בין הכניסות ליציאות שלה. ייתכן שאין קשר בין הכניסות ליציאות, אך אז ניתן להפריד אותה למערכת ללא יציאות שאינה מעניינת אותנו כאמור, ולמערכת בלי כניסות. את הקשר בין הכניסות ליציאות מתארים בצורה מתמטית באמצעות פונקציה מהצורה $\mathbf{y}=f\left(\mathbf{x}\right)$ כאשר $\mathbf{y}$ הוא וקטור המכיל את אותות המוצא, ו-$\mathbf{x}$ הוא וקטור המכיל את אותות הכניסה.

הגדרה (פונקצית תמסורת): פונקצית תמסורת (*Transfer function*) היא הפונקציה המתארת את הקשר בין אותות הכניסה של המערכת לאותות המוצא.



איור 1.1: סוגי פונקציות תמסורת

איור 1.1 מתאר חלק ממגוון פונקציות התמסורת היכולות לתאר מערכת. בספר זה נעסוק רק במערכות לינאריות קבועות בזמן, משמע מערכות בעלות פונקציה דטרמיניסטית לינארית קבועה בזמן בין הכניסות שלה ליציאות שלה. קבוצת המערכות הליניאריות הקבועות בזמן היא חלק זעיר ממגוון המערכות הסובבות אותנו בעולם האמיתי. הסיבה ללימוד המערכות הליניאריות הקבועות בזמן נעוצה בכלים המתמטיים העומדים לרשותנו לצורך ניתוח ותכנון של מערכות. כלים לניתוח ותכנון מערכות לא-ליניאריות מורכבים יותר מאלו המשמשים לניתוח ותכנון מערכות ליניאריות. בפרק זה נעסוק בשני הכלים העיקריים לתכנון וניתוח מערכות ליניאריות :

פירוק והרכבה של אותות באמצעות וקטורי בסיס[1]

[1] וקטורי בסיס הם הרכיבים מהם מרכיבים את האותות. הגדרה מתמטית מדוייקת של מושג זה תוצג בהמשך הפרק.

או בשמם המקובל **התמרה** ו**התמרה הפוכה** כאשר התמרה מתייחסת לפעולת הפירוק, והתמרה הפוכה - לפעולת ההרכבה (בספרות ניתן למצוא את המושגים **אנליזה** (Analysis) **וסינתזה** (Synthesis) המתייחסים לאותן פעולות). בספר זה נעדיף את המושגים "התמרה" ו"התמרה הפוכה", אולם עד השלב בו נבין היטב את מהותם של המושגים הללו, נשתמש לעיתים ב"פירוק" ו"הרכבה" על-מנת לציין את המשמעות של כל מושג.

פעולות הפירוק והרכבה של אותות דומות במהותן למתכון המשמש אותנו לאפיית עוגות. בדוגמא זו, האות אותו ברצוננו לעבד הוא העוגה, והרכיבים לפיהם תתבצענה פעולות הפירוק וההרכבה הם חומרי האפייה. נניח לדוגמא, קונדיטור שפיתח סדרת מתכונים לעוגות הזוכות לשבחים מכל הטועמים ובעקבות השבחים – להצלחה שיווקית וכלכלית. נניח עוד, כי אותו קונדיטור מעוניין בניצול המתכונים להרחבת עסקיו לערים נוספות ואף לארצות נוספות. הספקת העוגות לסניפים המרוחקים יכולה להיעשות בשני אופנים:

א. ייצור העוגות במפעל המרכזי וניודם לסניפים המרוחקים;

ב. ייצור העוגות בכל סניף על-פי מתכון משותף.

אופן ההספקה הראשון עלול להתגלות כבלתי כלכלי מעבר למרחק מסוים בשל עלות ההובלה הגבוהה הנגזרת מתנאי הובלת המוצר (בקירור) ומהירות המשלוח הנדרשת (על-מנת לשמור על טריות המוצר). אופן ההספקה השני פשוט וזול, אך הוא מחייב תנאי ייצור זהים בכל מקום וזהות בחומרי האפייה - תנאים שאינם דבר של מה בכך שהרי ידוע, למשל, כי טעמו של הקמח ואיכותו שונים במידה רבה מארץ לארץ.

אולם, במידה ופתרנו את בעיית הזהות ברכיבים ובתנאי הייצור בכל סניף, ניתן לקבוע רשימת חומרי אפייה אחידה עבור כל הסניפים, וכל אימת שהקונדיטור שלנו מפתח מתכון חדש, כל שעליו לעשות הוא להפיץ את רשימת הכמויות בין הסניפים, ומובטח לו שבכל הסניפים ימכרו עוגה זהה בטעמה לעוגה שהוא עצמו אפה. כל שעל מנהל הסניף, המקבל את רשימת הכמויות, לעשות הוא לכפול את הכמות הראשונה ברשימה בחומר האפייה הראשון ברשימת חומרי האפייה, להוסיף לה את מכפלת הכמות השנייה ברשימה וחומר האפייה השני ברשימת החומרים וכן הלאה עד קבלת העוגה המוכנה לאפייה[2].

[2] ראוי לציין כי דוגמא זו פשטנית למדי ביחס למקצוע אפיית העוגות הדורש מיומנות גבוהה בהרבה מאשר פירוק והרכבת אותות באמצעים מתמטיים.

בתחום עיבוד האותות הרעיון דומה, אלא שבמקום להעביר עוגות ממקום למקום, עלינו להעביר אותות. נבחן לדוגמא את נושא השיחות הסלולאריות. באופן בסיסי, שיחה סלולארית מתבצעת על ידי תרגום האות האקוסטי לאות חשמלי במכשיר סלולארי אחד, העברת האות החשמלי באמצעות תקשורת סלולארית למכשיר סלולארי שני, ותרגומו שם בחזרה לאות אקוסטי. אחד המאפיינים הבולטים של התקשורת בכלל והתקשורת הסלולארית בפרט הוא מחיר העברת המידע בין מכשיר למכשיר. האות החשמלי המתקבל מתרגום האות האקוסטי מכיל כמות רבה של מידע, והעברתו ממכשיר למכשיר תהיה יקרה עד כדי חוסר כדאיות כלכלית.

איור 1.2: תרשים העברת שיחה בין שני טלפונים סלולאריים .

הפתרון לבעיית עלות העברת המידע בתקשורת סלולארית דומה לאופן ההספקה השני של העוגות, המבוסס על העברת המתכון לעוגה ולא על העברת העוגה עצמה. לאחר תרגום האות האקוסטי לאות חשמלי במכשיר הסלולארי הראשון, הוא מפורק לרכיבים המקבילים במשמעותם לחומרי האפייה שבמתכוני העוגות. המידע שעובר בתקשורת הסלולארית למכשיר השני הוא הכמויות של כל רכיב שהתקבלו בפירוק, כלומר "המתכון" של האות, המקיף כמות קטנה בהרבה מהמידע המקורי. המכשיר השני, כמו הסניף המרוחק של הקונדיטוריה, מקבל את הכמויות, מרכיב את האות החשמלי על-פי אותם רכיבים לפיהם פורק האות במכשיר הראשון, ומקבל בחזרה את האות החשמלי המקורי אותו הוא ממיר לאות אקוסטי. פתרון זה הוא דוגמא לנושא בעיבוד אותות הנקרא "דחיסת מידע", שתרומתו בעולם התקשורת – הוזלת עלות התקשורת על-ידי הקטנת כמות המידע המועבר.

כמו במקרה של העברת המתכונים לעוגות, גם בעיבוד אותות יש להקפיד על רכיבים בסיסיים זהים עבור פעולת הפירוק ופעולת ההרכבה. הרכיבים הבסיסיים נקראים בעיבוד אותות **וקטורי הבסיס** ונסמנם באות היוונית ν (נו) והכמויות של הרכיבים שהתקבלו בפעולת הפירוק נקראים ***מקדמי הייצוג*** ונסמנם באות היוונית λ (למבדה). כך, המקדם

λ_k משמעותו מספר הפעמים של וקטור הבסיס ה-k-י $\left(v_k\right)$ לו נזדקק על-מנת להרכיב את האות, ממש כפי שאם במתכון לעוגה מופיע "3 כוסות קמח" נזדקק לשלוש כוסות קמח על-מנת לאפות את העוגה האמורה, כאשר "3" הוא מקדם הייצוג של וקטור הבסיס "כוס קמח" (איור 1.3).

איור 1.3: הצגת מרשם לפאי תפוחים כפירוק לוקטורי בסיס.

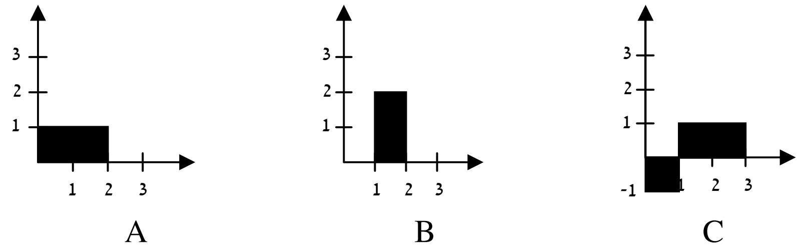
דוגמא 1.1

בדוגמא הבאה נבחן שימוש בפעולות הפירוק וההרכבה על קבוצת צורות גרפיות שנבחרו באופן שרירותי כך שיקלו על הבנת הנושא על-ידי הקוראים. לצורות אין משמעות מעשית או מתמטית, והן אך שלב בדרך לניסוח פעולות הפירוק וההרכבה על-ידי נוסחאות מתמטיות.

בדוגמא זו נשתמש בצורות גרפיות המורכבות משלוש עמודות סמוכות ברוחב של יחידה אחת כל אחת, ובגובה משתנה היכול להיות מספר ממשי כלשהו (שלילי או חיובי). העמודות תמוספרנה 1-3 משמאל לימין, וגובהן יימדד ביחס לנקודת ההתחלה שלהן הנמצאת על קו אופקי נתון. עמודה המתפרשת מהקו האופקי כלפי מעלה תחשב כבעלת גובה חיובי, ועמודה המתפרשת מהקו האופקי כלפי מטה תחשב כבעלת גובה שלילי.

קבוצת הצורות הגרפיות אותה הגדרנו כוללת, כמובן, מספר אינסופי של צורות שונות הנבדלות זו מזו בגובהן של שלוש העמודות המרכיבות כל צורה.

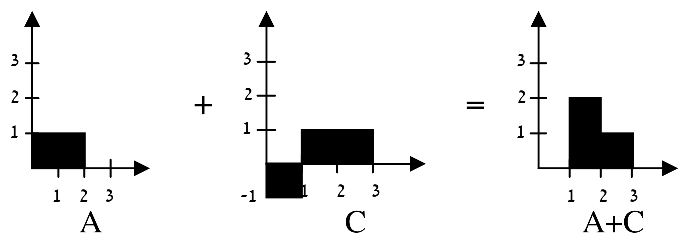
האיור הבא מתאר שלוש צורות גרפיות A,B ו-C מתוך מגוון הפונקציות העונות על ההגדרה. הצורה A מורכבת משלוש עמודות בגבהים 1, 1 ו-0, הצורה B מורכבת משלוש עמודות בגבהים 2,0 ו-0 והצורה C מורכבת משלוש עמודות בגבהים 1-, 1 ו-1. שימו לב, כי גובהי העמודות ניתנו משמאל לימין בהתאם לציר האופקי בכל איור.



נגדיר כעת שתי פעולות שבאפשרותנו לבצע על הצורות הגרפיות באוסף שהגדרנו :

1. חיבור שתי צורות :

חיבור שתי צורות יתבצע על-ידי חיבור העמודות של כל צורה בהתאמה, כלומר גובה העמודה הראשונה של הצורה המהווה את סכום שתי הצורות הוא סכום גובה העמודה הראשונה של הצורה הראשונה וגובה העמודה הראשונה של הצורה השניה, גובה העמודה השניה הוא סכום גובה העמודה השניה של הצורה הראשונה וגובה העמודה השניה של הצורה השניה וגובה העמודה השלישית הוא סכום גובה העמודה השלישית של הצורה הראשונה וגובה העמודה השלישית של הצורה השניה. כך, אם נחבר את הצורה A ואת הצורה C, נקבל :

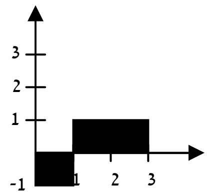
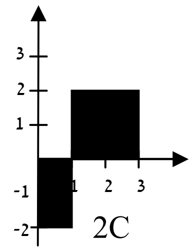


שימו לב, כי חיבור שתי צורות גרפיות משמעותו אינו הנחת צורה גרפית על גבי רעותה, כי אם חיבור נפרד של גובהה של כל עמודה. כך, חיבור הצורות A ו-C הביא לצורה אשר גובה עמודתה הראשונה הוא אפס, משום שגובהי העמודות הראשונות של הצורות A ו-C היו 1 ו-1- בהתאמה.

2. הכפלת צורה בקבוע :

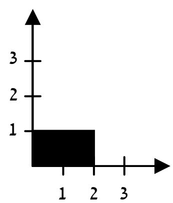
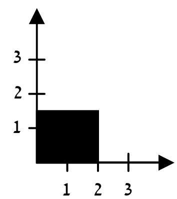
הכפלת צורה בקבוע מתבצעת על-ידי הכפלת גובהה של כל עמודה באותו קבוע, כלומר גובה העמודה הראשונה של הצורה החדשה יהיה גובה העמודה הראשונה של הצורה המקורית מוכפל בקבוע, וכך גם העמודה השניה והעמודה השלישית.

נכפיל את הצורה C בקבוע 2 :

2 X  = 

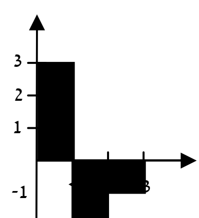
C 2C

נכפיל את הצורה A בקבוע 1½:

1½ X  = 

A 1½A

עתה נגדיר קבוצת פונקציות שתשמש אותנו כקבוצת וקטורי הבסיס. לצורך הנוחות בלבד נשתמש בפונקציות A,B ו-C כקבוצה זו. כפי שהסברנו קודם לכן, ניתן להרכיב צורות גרפיות נוספות מתוך קבוצת הצורות הגרפיות הכללית תוך שימוש בפעולת החיבור ובפעולת ההכפלה שהגדרנו כעת. כך למשל, הביטוי: $2A-1\frac{1}{2}B-C$ מתאר צורה גרפית נוספת מתוך הקבוצה הכללית, המורכבת מסכום של שלוש הצורות הגרפיות המשמשות כבסיס, אשר כל אחת מהם מוכפלת בקבוע. הצורה A מוכפלת ב-2, הצורה B מוכפלת ב-- 1½ והצורה C מוכפלת ב-1-. הצורה הגרפית המתקבלת היא:



2A-1½B-C

שלוש הצורות הגרפיות A,B,C שבדוגמא הן וקטורי הבסיס עבור מגוון הצורות הגרפיות המורכבות משלוש עמודות בגבהים שונים, והמספרים 1-,-1½, 2 בהם כפלנו את וקטורי הבסיס בפעולת ההרכבה האחרונה הם **מקדמי הייצוג** של הצורה לפי הבסיס {A,B,C}.

שאלה 1.1

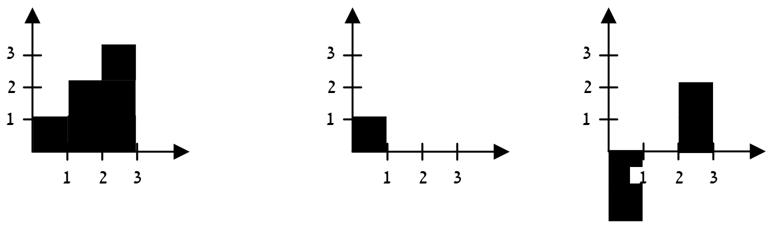
א. ציירו את הצורות המתקבלות מן ההרכבות הבאות על-פי וקטורי הבסיס A,B,C הנתונים בדוגמא 1.1 :

i. A-B+C

ii. 2A-B

iii. -A+B-C

ב. חשבו את מקדמי הייצוג של הצורות הבאות על פי וקטורי הבסיס A,B,C הנתונים בדוגמא 1.1 :



iii. *ii.* *i.*

שאלה 1.1 מדגימה את פעולת ההרכבה בסעיף א', ואת פעולת הפירוק בסעיף ב'. בוודאי הבחנתם כי פעולת ההרכבה קלה לעין ערוך מפעולת הפירוק הדורשת אינטואיציה לא מבוטלת ולא מעט ניסוי וטעייה. מובן, שכאשר נדון בוקטורים מורכבים יותר ורבים יותר, לא נוכל להשתמש בשיטות אלו ונזדקק לפתרון טוב יותר. פתרון זה יבוטא על-ידי שתי משוואות מתמטיות הנקראות **התמרה** ו**התמרה הפוכה** כשפתרון משוואת ההתמרה הוא קבוצת מקדמי הייצוג של אות אותו יש לפרק על-פי בסיס ההתמרה, ופתרון ההתמרה ההפוכה הוא האות המתקבל מהרכבת וקטורי הבסיס על-פי מקדמי ייצוג נתונים.

משוואות ההתמרה וההתמרה ההפוכה תלויות בבסיס על-פיו הוגדרו, וכך אנו מוצאים, לדוגמא, את **התמרת פורייה (Fourier)** והתמרת פורייה ההפוכה שהוגדרו על-פי בסיס המורכב מפונקציות של סינוסואידים קומפלקסיים בעלי ערך מוחלט אחד הנקרא בסיס פורייה, את **התמרת לפלס (Laplace)** המוגדרת על-פי הרחבה של בסיס פורייה לפונקציות של סינוסואידים קומפלקסים מוכפלים באקספוננט, וכן התמרות נוספות אשר כל אחת מוגדרת על קבוצת וקטורי בסיס שונה. בסעיף הבא נכיר את חמשת השלבים בניסוח משוואת התמרה ומשוואת התמרה הפוכה. באמצעות שלבים אלו נגדיר בהמשך התמרות שימושיות בתחום עיבוד האותות.

1.1 שלבי הגדרת התמרה

בסעיף זה ננסח את חמשת השלבים של ההגדרה המתמטית של פעולות הפירוק וההרכבה של אותות לפי בסיס כלשהו. חמשת השלבים דורשים שליטה במספר מושגים בסיסיים באלגברה ליניארית.

1.1.1 הגדרת המרחב הוקטורי.

המרחב הוקטורי הוא סביבת העבודה המתמטית שלנו, והוא מורכב מקבוצת אלמנטים מתמטיים (אותה נסמן ב-V) בעלי תכונה או מבנה משותף הנקראים וקטורים, ומשתי פעולות חשבון המוגדרות על קבוצת הוקטורים הנקראות **חיבור וקטורי** (אותה נסמן בסימן '+') **וכפל בסקלאר**, כאשר הסקלאר לקוח מתוך שדה כלשהו F (למשל שדה מספרים הקומפלקסיים $\mathbb{C}$).

מעט מוסכמות: בפרק זה נסמן וקטור באות קטנה מודגשת, וסקלאר באות קטנה מוטה, למשל $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ הם שני וקטורים, ו-$\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ הם שני סקלארים. את הכפל בסקלאר מסמנים לעיתים ב-'$\cdot$' אך מקובל, ואנו ננהג כמקובל, להשמיט את סימן ה-'$\cdot$' כך ש- $\lambda\cdot\mathbf{b}\equiv\lambda\mathbf{b}$.

הגדרה (מרחב וקטורי): הקבוצה V תיקרא **מרחב וקטורי** (מ"ו) מעל שדה F, אם:

1. V סגורה תחת שתי הפעולות, כלומר חיבור של כל שני וקטורים מתוך הקבוצה צריך להניב וקטור מתוך הקבוצה, והכפלת כל וקטור בקבוצה בסקלאר צריך להניב וקטור מתוך הקבוצה, או בניסוח מתמטי: לכל $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ קיים וקטור אחד ויחיד $\mathbf{c}\in V$ כך ש- $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$ ועבור סקלאר כלשהו $\lambda\in F$ קיים איבר אחד ויחיד $\mathbf{b}\in V$ כך ש- $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{b}$ לתכונה זו קוראים **קשירות**.
2. מתקיימות האקסיומות הבאות:
   א. עבור פעולת החיבור:
      i. **קומוטטיביות**: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ לכל $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$
      ii. **אסוציאטיביות**: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in V$

iii. **קיום אפס**: קיים איבר יחיד ב-V, שנסמנו $\mathbf{0}$, המקיים $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ לכל $\mathbf{a}\in V$.

iv. **קיום נגדי**: קיים איבר יחיד ב-V שנסמנו $-\mathbf{a}$, המקיים $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$ לכל $\mathbf{a}\in V$.

ב. עבור פעולת הכפל בסקלאר:

i. **דיסטריביוטיביות**: לכל $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ ולכל $\lambda,\mu\in F$ מתקיים:

$$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}, \qquad (\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$$

ii. **קומוטטביות**: $(\lambda\mu)\mathbf{a}=\lambda(\mu\mathbf{a})$ לכל $\mathbf{a}\in V$ ולכל $\lambda,\mu\in F$

iii. **קיום אחד:** קיים סקלאר $1\in F$ המקיים $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ לכל $\mathbf{a}\in V$

על-ידי הגדרת המרחב הוקטורי, אנו קובעים למעשה את "חומרי הגלם" מהם נבנה את כלי העבודה המתמטיים באמצעותם ננתח אותות ונתכנן מערכות. למרחבים וקטורים נפוצים יש שמות ייחודיים המאפשרים לקורא לדעת בקלות את הגדרת הוקטור, הגדרת הסקלאר והגדרת הפעולות הנכללות במרחב (כך למשל נמצא את המרחב האוקלידי, מרחב המטריצות מרחב הפונקציות המחזוריות בזמן רציף ועוד), אך במקרים אחרים נאלץ להגדיר במפורש את שלושת המרכיבים לצורך הגדרת מרחב וקטורי ייחודי לבעיה או לתחום מקצועי מסוים:

דוגמא 1.2

אם נחזור לסיפורנו על הקונדיטור, הקונדיטוריה במקרה זה היא המרחב הוקטורי. היכרותנו עם המילה קונדיטוריה מאפשרת לנו להמשיך בדוגמא כשלכולם יש מושג טוב מה מייצרים בקונדיטוריה (עוגות, עוגיות ועוד), באילו חומרים משתמשים (קמח, מים, שמרים, סוכר ועוד), ואילו פעולות כרוכות בתהליך הייצור (לישה, תפיחה, אפייה ועוד).
הקונדיטוריה משמשת כסביבת העבודה בה מתרחשת הדוגמא, כשם שמרחב וקטורי אמור לתאר את סביבת העבודה המתמטית בה נפתח את ההתמרה וההתמרה ההפוכה.

דוגמא 1.3

המרחב האוקלידי הדו-ממדי הוא מרחב וקטורי מעל שדה המספרים הממשיים (שדה הסקלארים - F).
הקבוצה V היא אוסף הוקטורים מהצורה (x,y) כאשר $x,y\in\mathbb{R}$ כך למשל (1,-2) הוא וקטור ב-V, כמו גם (0.3,-13.79). פעולת החיבור הוקטורי מוגדרת על-ידי: $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

כאשר $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ ופעולת הכפל בסקלאר מוגדרת על-ידי: $\lambda(x,y)=(\lambda x, \lambda y)$ כאשר $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$. כך: -3(1,-2)+2(0.3,-13.79)=(-3,6)+(0.6,-27.58)=(-2.4,-21.58)

דוגמא 1.4

יהי V_1 מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, הכולל את אוסף כל הפונקציות $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ מהצורה:

$$f(t)=a\big(U(t)-U(t-1)\big)+b\big(U(t-1)-U(t-2)\big)+c\big(U(t-2)-U(t-3)\big)$$

כאשר $U(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$ היא פונקצית מדרגה, ו- $a,b,c\in\mathbb{R}$.

עם פעולות החיבור והכפל בסקלאר הרגילות על פונקציות ממשיות.

שימו לב כי המרחב הוקטורי V_1 הוא ביטוי מתמטי של המרחב הוקטורי של הצורות הגרפיות בו טיפלנו בדוגמא 1.1.

שאלה 1.2

נתונות $f_1(t), f_2(t)\in V_1$ השייכות למרחב הוקטורי המתואר בדוגמא 1.4:

$$f_1(t)=\big(U(t)-U(t-1)\big)-2\big(U(t-1)-U(t-2)\big)+\big(U(t-2)-U(t-3)\big)$$
$$f_2(t)=2\big(U(t)-U(t-3)\big)$$

חשבו את הביטויים הבאים (מומלץ לצייר את הפונקציות ואת הפתרון):

א. $f_1(t)-\frac{1}{2}f_2(t)$

ב. $-f_1(t)+f_2(t)$

ג. $\frac{1}{2}f_1(t)+\frac{1}{2}f_2(t)$

שאלה 1.3

א. הוכיחו כי המרחב הוקטורי V_1 המתואר בדוגמא 1.4 סגור לחיבור וקטורי.

ב. הוכיחו כי המרחב הוקטורי V_1 המתואר בדוגמא 1.4 סגור לכפל בסקלאר.

1.1.2 ניסוח מכפלה פנימית.

המכפלה הפנימית (או **מכפלה סקלרית**) היא פעולה מתמטית המתווספת לשתי הפעולות המובנות בהגדרת המרחב הוקטורי. בניגוד לשתי הפעולות הראשונות, מכפלה פנימית אינה תנאי להגדרת מרחב וקטורי, וניתן לקיים מרחבים וקטורים אף ללא מכפלה פנימית. מרחבים כאלו הם בעלי שימוש דל בעיבוד אותות, ולכן בספר זה, כל מרחב וקטורי ילווה במכפלה פנימית למרות שבאופן כללי אין זה הכרחי. את המכפלה הפנימית נסמן על-ידי $\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle$ עבור שני וקטורים $\mathbf{a}$ ו-$\mathbf{b}$ במרחב הוקטורי.

הגדרה (מכפלה פנימית): יהי V מרחב וקטורי מעל F. **מכפלה פנימית** ב-V היא העתקה המתאימה לכל זוג וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b} \in V$ סקלאר ב-F המסומן $\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle$, והמקיימת לכל $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in V$ ו- $\lambda, \mu \in F$:

א. **הרמיטיות:** $\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b},\mathbf{a} \rangle^*$

ב. **ליניאריות:** $\langle \mathbf{a},\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle + \mu \langle \mathbf{a},\mathbf{c} \rangle$

$$\langle \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},\mathbf{c} \rangle = \lambda^* \langle \mathbf{a},\mathbf{c} \rangle + \mu^* \langle \mathbf{b},\mathbf{c} \rangle$$

ג. **חיוביות:** $\langle \mathbf{a},\mathbf{a} \rangle \ge 0$ ומתקיים שוויון רק עבור $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

המכפלה הפנימית נבדלת מהחיבור הוקטורי והכפל בסקלאר בכך שהתוצאה של מכפלה פנימית היא סקלאר, בעוד התוצאה של כל אחת משתי הפעולות הקודמות היא וקטור. משום כך, שתי הפעולות הקודמות נקראות אופרטורים והמכפלה הפנימית היא פונקציה.
ניתן לנסח מכפלות סקלאריות שונות לאותו מרחב וקטורי ובלבד שתענינה על הדרישות הנתונות בהגדרה של המכפלה הסקלארית. בחירת הניסוח של המכפלה הסקלארית נעשית בדרך כלל תחת אילוצי מימוש כגון סיבוכיות מימוש, מהירות חישוב, מחיר ושאר קריטריונים הנדסיים.

דוגמא 1.5

במרחב האוקלידי הדו-ממדי, מקובל לנסח את המכפלה הפנימית באופן הבא :

יהיו **a** ו-**b** שני וקטורים במרחב האוקלידי הדו-ממדי כך ש- $\mathbf{a}=(x_1,y_1)$ ו- $\mathbf{b}=(x_2,y_2)$, $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$ (מספרים ממשיים). המכפלה הפנימית בין **a** ו-**b** היא :

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle=x_1x_2+y_1y_2$$

כך :

$$\langle(1,-2),(0.3,-13.79)\rangle=0.3+27.58=27.88$$

דוגמא 1.6

במרחב הוקטורי V_1 המתואר בדוגמא 1.4 נגדיר את המכפלה הפנימית :

$$\langle f_1(t),f_2(t)\rangle=\int_0^3 f_1(t)f_2(t)\,dt\,.$$

כך למשל :

$$\begin{aligned}&\left\langle\big(U(t)-U(t-2)\big),\tfrac{1}{2}\big(U(t-1)-U(t-3)\big)\right\rangle=\\&=\int_0^3\big(U(t)-U(t-2)\big)\tfrac{1}{2}\big(U(t-1)-U(t-3)\big)dt=\\&=\tfrac{1}{2}\int_0^3\big(U(t-1)-U(t-2)\big)dt=\tfrac{1}{2}\int_1^2 dt=\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

שאלה 1.4

בהינתן $f_1(t),f_2(t)\in V_1$ עם המכפלה הפנימית הנתונה בדוגמא 1.6 :

$$f_1(t)=\big(U(t)-U(t-1)\big)-2\big(U(t-1)-U(t-2)\big)+\big(U(t-2)-U(t-3)\big)$$
$$f_2(t)=2\big(U(t)-U(t-3)\big)$$

חשבו את הביטויים הבאים :

א. $\langle f_1(t),f_2(t)\rangle$

ב. $\langle f_1(t),f_1(t)\rangle$

ג. $\langle f_2(t),f_2(t)\rangle$

1.1.3 קביעת קבוצת וקטורי הבסיס

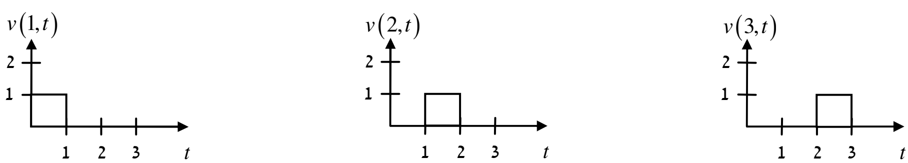
בסיס הוא קבוצת וקטורים במרחב הוקטורי, אותו הגדרנו בשלב הראשון, שבאמצעותם ניתן להרכיב כל וקטור אחר במרחב הוקטורי באופן אחד ויחיד. פעולה זאת נקראת **פרישה** של המרחב הוקטורי באמצעות וקטורי הבסיס והיא מתבצעת באמצעות **קומבינציה ליניארית** של וקטורי הבסיס ומקדמי הייצוג של הוקטור הנפרש על-פי אותו בסיס. על-מנת שהכלים אותם נפתח יהיו שימושיים נקפיד על שלוש נקודות עיקריות בקביעת בסיס[3]:

1. **נוסחה כללית** לוקטורי הבסיס :

בדוגמא 1.1 השתמשנו בשלוש צורות גרפיות אותן סימנו ב-A, B ו-C כבסיס. את שלושת הצורות ציירנו באופן פרטני על-מנת לציין מהו כל וקטור בבסיס. דרך זו אפשרית כאשר אנו עוסקים בבסיסים בעלי מספר וקטורים קטן, אולם ברוב המקרים בסיס יכיל מספר מאות של וקטורים ואף מספר אינסופי של וקטורים. ניסוח פרטני של כל אחד ואחד מהם אינו אפשרי, ולכן נזדקק לנוסחה כללית של וקטור בסיס.

לדוגמא : נוסחה כללית לוקטורי בסיס עבור V_1 יכולה להיות :

$$v(k,t)=U(t-k+1)-U(t-k), \qquad k=1,2,3$$



איור 1.4: שלושה וקטורי הבסיס עבור המרחב הוקטורי V_1.

הפונקציה $v(k,t)$ היא פונקציה של שני משתנים k ו-t. t נקרא **אינדקס הזמן**, כיוון שהמרחב הוקטורי V_1 כולל פונקציות של הזמן, ואילו k נקרא **אינדקס הבסיס** והוא מבדיל בין פונקציה לפונקציה בבסיס, ובעזרתו ניתן להתאים מקדם ייצוג לווקטור הבסיס המתאים לו.

---

[3] בסעיף 1.2 נרחיב בנושא וקטורים במרחב ממימד אינסופי.

2. **אינדקס בסיס** :

אינדקס בסיס משמש להבדלת שני וקטורים שונים באותו בסיס. בדוגמא 1.1 אינדקס הבסיס קיבל ערכים A, B ו-C שהבדילו בין וקטור לוקטור, אך מובן שעבור כלים מתמטיים נעדיף אינדקסים מספריים. אינדקס הבסיס יכול להיות בדיד או רציף, ובהמשך נראה כי הערכים יכולים להיות ממשים או קומפלקסיים. בענפים מתקדמים של עיבוד אותות כמו גלונים (Wavelets) ניתן למצוא יותר מאינדקס בסיס אחד לכל וקטור.

מעט מוסכמות: מקובל להשתמש באותיות i, j, k, l, m, n בתוך סוגריים מרובעים [] לאינדקסים בדידים, ובאותיות s, t, ω בסוגריים עגולים () לאינדקסים רציפים. כאשר הפונקציה היא של משתנים מעורבים – רציפים ובדידים – נשתמש בסוגריים עגולים. הטבלה הבאה מדגימה ניסוח של בסיס במקרים השונים :

	גודל קבוצת וקטורי הבסיס[4]	
	סופי	אינסופי
אינדקס בסיס בדיד - k	$\{v(k,t)\}, \quad k=0,..,K-1$	$\{v(k,t)\}, \quad k=-\infty,..,\infty$
אינדקס בסיס רציף - ω	לא קיים	$\{v(\omega,t)\}, \quad \omega\in[a,b]$ $\{v(\omega,t)\}, \quad \omega\in(-\infty,\infty)$

3. **אורתונורמליות** של וקטור הבסיס :

הגדרה (וקטורים אורתוגונליים): שני וקטורים $i \neq j \quad \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in V,$ יהיו אורתוגונליים (מאונכים) זה לזה אם ורק אם $\left\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = 0$.

הגדרה (וקטור נורמלי)[5]**:** וקטור $\mathbf{v}_i \in V$ נקרא נורמלי אם ורק אם הנורמה שלו היא אחד, כלומר $\left\|\mathbf{v}_i\right\| \triangleq \sqrt{\left\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \right\rangle} = 1$.

[4] בשל קוצר היריעה, אנו מתעלמים מהמושג המדוייק של גודל קבוצת וקטורים הנקרא עצמה (cardinality), המבדיל בין "אינסוף" ערכים של אינדקס בדיד ל"אינסוף" ערכים של אינדקס רציף.

[5] כיוון ההגדרה בספר זה מניח תחילה מרחבי מכפלה פנימית, כאשר המכפלה הפנימית קודמת למושג הנורמה. במקרה זה הנורמה היא הנורמה המושרית על-ידי המכפלה הפנימית. ניתן לבנות את המרחב מכיוון הנורמה, ואז מדובר במרחבים נורמיים. נורמה של וקטור נקראת לעיתים אורך הוקטור, משום שבמרחבים

הגדרה (בסיס אורתונורמלי): בסיס אשר כל הוקטורים בו הם בעלי נורמה 1, וכל שני וקטורים מאונכים זה לזה (אורתוגונליים) נקרא **בסיס אורתונורמלי**.

בניסוח מתמטי, בסיס אורתונורמלי של מרחב וקטורי V הוא בסיס $\left\{\mathbf{v}_k\right\}$ המקיים:

עבור אינדקס בסיס בדיד:
$$\left\langle \nu(k,t),\nu(l,t)\right\rangle = \delta_{kl} \qquad (1.1)$$

עבור אינדקס בסיס רציף:
$$\left\langle \nu(\omega,t),\nu(\alpha,t)\right\rangle = \delta(\omega-\alpha) \qquad (1.2)$$

כאשר δ_{kl} היא הדלתא של קרוניקר (Kronecker delta) המוגדרת
$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

ואילו $\delta\left(\omega-\alpha\right)$ היא הדלתא של דירק (Dirac delta) והיא מקיימת:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\alpha)f(\alpha)\,d\alpha = f(\omega)$$

נלמד ביתר פירוט על הדלתא של דירק בפרק 2, אך נשתמש בתכונה זו בסעיף הבא לצורך הוכחת משוואת ההתמרה.

בסיסים אורתונורמליים הם משפחה של בסיסים המקיימים את הגדרת הבסיס האורתונורמלי. כפי שנראה בהמשך, חישוב של התמרות המבוססות על בסיסים אורתונורמליים קל הרבה יותר מחישוב של התמרות המבוססות על בסיסים כלליים. יתרון זה מצדיק הקפדה על שימוש בבסיסים אורתונורמליים, ולשם כך קיימים אלגוריתמים להפיכת בסיס כלשהו לבסיס אורתונורמלי (כמו האלגוריתם של גרם-שמידט), וטכניקות אחרות לבחירת קבוצת וקטורים המהווה בסיס אורתונורמלי.

מסוימים הגדרת הנורמה מתלכדת עם המובן של המילה "אורך" כפי שאנו משתמשים בה ביום-יום. אולם, ההגדרה הראשונית של נורמה נובעת מתוך הגדרת המכפלה הפנימית.

1.1.4 ניסוח משוואת ההתמרה ומשוואת ההתמרה ההפוכה

משוואות ההתמרה וההתמרה ההפוכה, או כפי שקראנו להן על-מנת להבהיר את משמעותן - משוואות הפירוק וההרכבה לפי הבסיס, הן למעשה התוצר העיקרי של שלושת השלבים הקודמים.

1.1.4.1 משוואת ההתמרה

משוואת ההתמרה היא פירוק וקטור לפי וקטורי בסיס אורתונורמליים, והיא עונה על השאלה "כמה צריך מכל וקטור בסיס כדי להרכיב את הוקטור הנתון". משוואת ההתמרה נתונה במשפט הבא:

משפט (משוואת ההתמרה): בהינתן מרחב וקטורי V ובסיס אורתונורמלי $\left\{v\left(k,t\right)\right\}$ בעל אינדקס בסיס בדיד או $\left\{v\left(\omega,t\right)\right\}$ בעל אינדקס בסיס רציף, מקדמי הייצוג $\lambda\left[k\right]$ או $\lambda\left(\omega\right)$ של וקטור נתון $f\left(t\right)\in V$ ניתנים על-ידי:

אינדקס בסיס בדיד:
$$\lambda\left[k\right]=\left\langle v\left(k,t\right),f\left(t\right)\right\rangle \tag{1.3}$$

אינדקס בסיס רציף:
$$\lambda\left(\omega\right)=\left\langle v\left(\omega,t\right),f\left(t\right)\right\rangle \tag{1.4}$$

את ההוכחה למשפט נביא לאחר הסעיף הבא.

1.1.4.2 משוואת ההתמרה ההפוכה

משמעות משוואת ההתמרה ההפוכה היא הרכבת וקטור מוקטורי הבסיס וממקדמי הייצוג שלו לפי אותם וקטורי הבסיס. המימוש של משוואת ההתמרה ההפוכה הוא על-ידי קומבינציה ליניארית, כשהסכימה מתבצעת על-פני תחום הערכים של אינדקס הבסיס, כלומר על כל וקטורי הבסיס שהוגדרו. כאשר אינדקס הבסיס הוא בדיד, נשתמש בסכימה בדידה (סיגמה) כפי שניתן לראות במשוואה (1.5) בה אינדקס הבסיס k הוא בדיד, וכאשר אינדקס הבסיס רציף, נשתמש באינטגרל כפי שניתן לראות במשוואה (1.6), בה אינדקס הבסיס ω רציף.

אינדקס בסיס בדיד : $$f\left(t\right)=\sum_{k=a}^{b}\lambda\left[k\right]v\left(k,t\right) \quad (1.5)$$

אינדקס בסיס רציף : $$f\left(t\right)=\int_{a}^{b}\lambda\left(\omega\right)v\left(\omega,t\right)d\omega \quad (1.6)$$

כאשר a,b - גבולות הסכימה והאינטגרציה - יכולים להיות מספרים סופיים או אינסופיים. במקרה השני יש לוודא כי סכומים אינסופיים ואינטגרל על תחום אינסופי מתכנסים.

הוכחה למשפט משוואת ההתמרה:

עבור אינדקס בסיס בדיד: אם $\left\{v\left(k,t\right)\right\}$ הוא בסיס של V, הרי שניתן לרשום את הוקטור $f\left(t\right)\in V$ באמצעות קומבינציה ליניארית של וקטורי הבסיס : $f\left(t\right)=\sum_{k}\lambda\left[k\right]v\left(k,t\right)$.

נציב את הביטוי האחרון בצד הימני של משוואה (1.3), ונקבל :

$$\left\langle v\left(k,t\right),f\left(t\right)\right\rangle=\left\langle v\left(k,t\right),\sum_{l}\lambda\left[l\right]v\left(l,t\right)\right\rangle=\sum_{l}\lambda\left[l\right]\left\langle v\left(k,t\right),v\left(l,t\right)\right\rangle$$

כאשר השוויון האחרון נובע מתכונת הליניאריות של המכפלה הפנימית. כעת נציב בביטוי האחרון את משוואה (1.1) המאפיינת אך ורק וקטורים אורתונורמליים, ונקבל :

$$\sum_{l}\lambda\left[l\right]\left\langle v\left(k,t\right),v\left(l,t\right)\right\rangle=\sum_{l}\lambda\left[l\right]\delta_{kl}=\lambda\left[k\right]$$

כשאת השוויון האחרון קיבלנו מכיוון שהדלתא של קרוניקר δ_{kl} מאפסת את כל מקדמי הייצוג בסכום מלבד מקדם הייצוג עבורו $k=l$, כלומר מקדם הייצוג $\lambda\left[k\right]$.

עבור אינדקס בסיס רציף: אם $\left\{v\left(\omega,t\right)\right\}$ הוא בסיס של V, הרי שניתן לרשום את הוקטור $f\left(t\right)\in V$ באמצעות קומבינציה ליניארית של וקטורי הבסיס : $f\left(t\right)=\int_{\omega}\lambda\left(\omega\right)v\left(\omega,t\right)d\omega$. נציב את הביטוי האחרון בצד הימני של משוואה (1.4), ונקבל :

$$\left\langle v(\omega,t), f(t)\right\rangle = \left\langle v(\omega,t), \int_\alpha \lambda(\alpha) v(\alpha,t)\, d\alpha \right\rangle = \int_\alpha \lambda(\alpha)\left\langle v(\omega,t), v(\alpha,t)\right\rangle d\alpha$$

כאשר השוויון האחרון נובע מתכונת הליניאריות של המכפלה הפנימית[6]. כעת נציב בביטוי האחרון את משוואה (1.2) המאפיינת אך ורק וקטורים אורתונורמליים, ונקבל:

$$\int_\alpha \lambda(\alpha)\left\langle v(\omega,t), v(\alpha,t)\right\rangle d\alpha = \int_\alpha \lambda(\alpha)\delta(\omega-\alpha)\, d\alpha = \lambda(\omega)$$

כשאת השוויון האחרון קיבלנו מתכונת הדלתא של דירק $\delta(\omega-\alpha)$. ■

דוגמא 1.7

נתון המרחב הוקטורי V_1 המתואר בדוגמא 1.4 עם המכפלה הפנימית: $\left\langle f_1(t), f_2(t)\right\rangle = \int_0^3 f_1(t) f_2(t)\, dt$. נגדיר את הבסיס:

$$v(1,t) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(U(t-1) - U(t-3)\big)$$
$$v(2,t) = U(t) - U(t-1)$$
$$v(3,t) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}U(t-1) - \tfrac{2}{\sqrt{2}}U(t-2) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}U(t-3)$$

א. נבדוק האם הבסיס אורתונורמלי.

ב. נתונה הפונקציה $f(t) = \big(U(t) - U(t-2)\big)$ נחשב את מקדמי וקטור הייצוג $\begin{bmatrix}\lambda[1] & \lambda[2] & \lambda[3]\end{bmatrix}^T$ של $f(t)$ על-פי הבסיס $\{v(1,t), v(2,t), v(3,t)\}$.

ג. נחשב את $g(t) = \sum_{k=1}^{3} \lambda[k] v(k,t)$ - הפונקציה המתקבלת מההרכבה של וקטורי הבסיס עם מקדמי הייצוג מסעיף ב', ואת ההפרש $f(t) - g(t)$.

---

[6] גם במקרה כזה ויתרנו מפאת קוצר היריעה על הכללת הליניאריות של המכפלה הפנימית למקרה של אינטגרל.

פתרון

א.

$$\left\langle v(1,t),v(2,t)\right\rangle=\int_0^3\tfrac{1}{\sqrt2}\big(U(t-1)-U(t-3)\big)\big(U(t)-U(t-1)\big)dt=0$$

$$\left\langle v(3,t),v(2,t)\right\rangle=\int_0^3\left(\tfrac{1}{\sqrt2}U(t-1)-\tfrac{2}{\sqrt2}U(t-2)+\tfrac{1}{\sqrt2}U(t-3)\right)\big(U(t)-U(t-1)\big)dt=0$$

$$\left\langle v(1,t),v(3,t)\right\rangle=\int_0^3\tfrac{1}{\sqrt2}\big(U(t-1)-U(t-3)\big)\left(\tfrac{1}{\sqrt2}U(t-1)-\tfrac{2}{\sqrt2}U(t-2)+\tfrac{1}{\sqrt2}U(t-3)\right)dt=$$

$$=\int_1^2\tfrac{1}{\sqrt2}\left(-\tfrac{1}{\sqrt2}\right)dt-\int_2^3\tfrac{1}{\sqrt2}\tfrac{1}{\sqrt2}\,dt=0$$

$$\left\langle v(1,t),v(1,t)\right\rangle=\int_0^3\left(\tfrac{1}{\sqrt2}\big(U(t-1)-U(t-3)\big)\right)^2dt=\tfrac12\int_1^3dt=1$$

$$\left\langle v(2,t),v(2,t)\right\rangle=\int_0^3\big(U(t)-U(t-1)\big)^2dt=\int_0^1dt=1$$

$$\left\langle v(3,t),v(3,t)\right\rangle=\int_0^3\left(\tfrac{1}{\sqrt2}U(t-1)-\tfrac{2}{\sqrt2}U(t-2)+\tfrac{1}{\sqrt2}U(t-3)\right)^2dt=$$

$$=\int_1^2\left(\tfrac{1}{\sqrt2}\right)^2dt+\int_2^3\left(-\tfrac{1}{\sqrt2}\right)^2dt=1$$

ב.

$$\lambda[1]=\int_0^3\tfrac{1}{\sqrt2}\big(U(t-1)-U(t-3)\big)\big(U(t)-U(t-2)\big)dt=\int_1^2\tfrac{1}{\sqrt2}dt=\tfrac{1}{\sqrt2}$$

$$\lambda[2]=\int_0^3\big(U(t)-U(t-1)\big)\big(U(t)-U(t-2)\big)dt=\int_0^1dt=1$$

$$\lambda[3]=\int_0^3\left(\tfrac{1}{\sqrt2}U(t-1)-\tfrac{2}{\sqrt2}U(t-2)+\tfrac{1}{\sqrt2}U(t-3)\right)\big(U(t)-U(t-2)\big)dt=\int_1^2\tfrac{1}{\sqrt2}dt=\tfrac{1}{\sqrt2}$$

ג.

$$g(t)=\tfrac{1}{\sqrt2}\cdot\tfrac{1}{\sqrt2}\big(U(t-1)-U(t-3)\big)+1\cdot\big(U(t)-U(t-1)\big)+$$
$$+\tfrac{1}{\sqrt2}\left(\tfrac{1}{\sqrt2}U(t-1)-\tfrac{2}{\sqrt2}U(t-2)+\tfrac{1}{\sqrt2}U(t-3)\right)=$$
$$=U(t)-U(t-2)$$

כלומר $f(t)-g(t)=0$ - קיבלנו בחזרה את הפונקציה שפירקנו.