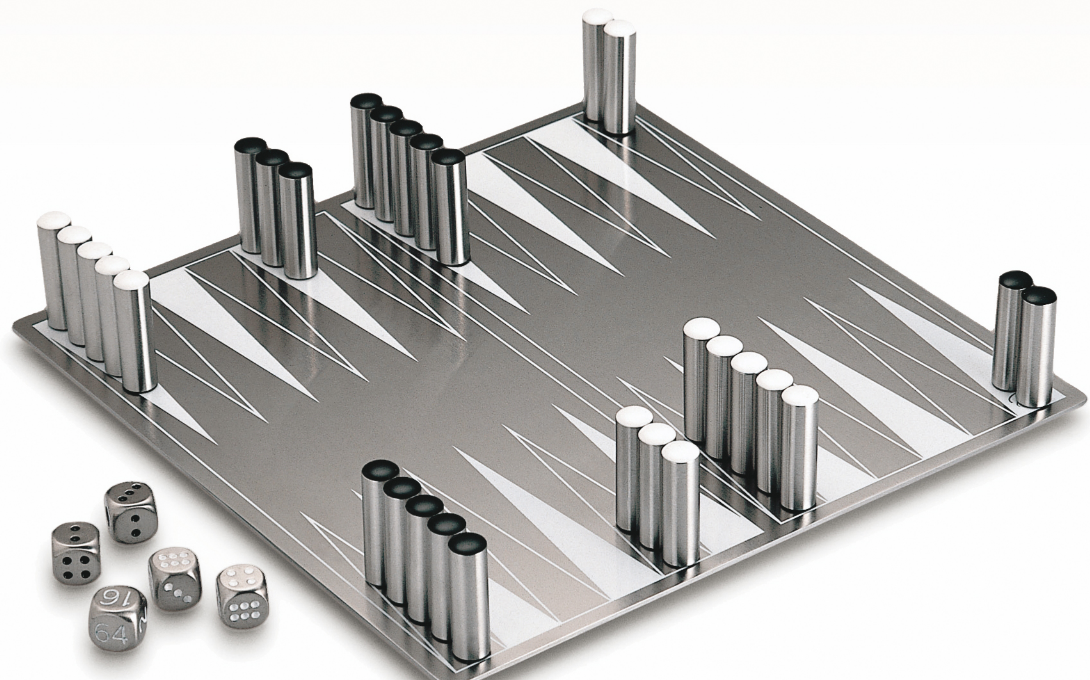
פרופסור אבא אנגלברג

הסתברות למהנדסים ולמדענים

תיאוריה + מאות תרגילים ופתרונות



הוצאת ורש

הקדמה

מבוא

הספר הזה מבוסס על השיעורים בהסתברות שהועברו למהנדסים בבית ספר הגבוה לטכנולוגיה בירושלים. החומר הלימודי והתרגילים נאספו ממקורות שונים, כולל המרצים השונים שמעבירים את הקורס. המתרגלת שלי, גברת אמונה פרוכטמן, תרמה רבות בשלבים שונים של הכנת הספר, ובמיוחד בציור תמונות יפות להמחיש את החומר הלימודי.

הספר כולל 40 פרקים, ומחולק ל-4 יחידות, כדלהלן:
יחידה 1: יסודות – פרקים 1-8, כולל סיכום של קבוצות וקומביניטוריקה והגדרת מאורעות.
יחידה 2: הסתברות – פרקים 9-14 , כולל הסתברות פשוטה ומותנית, תלות ואי-תלות, ומשפטי בייז והסתברות שלמה.
יחידה 3: משתנים מקריים בדידים – פרקים 15-27, כולל פונקציות הסתברות והתפלגות, תוחלת ושונות, התפלגויות ידועות, התפלגויות משותפות, הרחבות ל-n ממדים, ופונקצית יוצרת מומנטים.
יחידה 4: משתנים מקריים רציפים – פרקים 28-40, כולל הרחבת כול המושגים שהוזכרו ביחס למשתנים בדידים למקרה הרציף, התפלגויות רציפות ידועות, והתמרות.

בכול פרק ישנם 3 סוגי שאלות: תרגילי חזרה, תרגילים, ותרגילים קשים. תרגילי חזרה מיועדים לשנן את החומר הלימודי, תרגילים מספקים שאלות מספריות על החומר, כאשר תרגילים קשים מספקים שאלות מספריות קשות יותר. בכול דף של שאלות, התשובות נמצאות בתחתית הדף. בסוף דפי השאלות והתשובות, מופיעים פתרונות מלאים לכול השאלות, חוץ מאלו המסומנות בכוכבית (*). שאלות אלו מיועדות לפתרון עצמאי על ידי התלמיד.

חלק קטן מן החומר די מתקדם ואינו דרוש להבנת המשך הספר. חומר כזה מצויין על ידי שתי כוכביות (**).

אני מקווה שספר זה יעזור לכול מי שמוטל עליו ללמוד קורס בהסתברות ברמה הנדסית. רוב החומר גם מתאים לקורס בהסתברות המכוון לתלמידי מנהל עסקים ומדעי החברה, למעט חלק מן ההוכחות וכמה נושאים מתקדמים שמתייחסים להתפלגויות רציפות.

תוכן עניינים

פרק 1 - הגדרות בסיסיות

בפרקים אלו נלמד את מושגי היסוד אשר יהוו את הבסיס ללימוד תורת ההסתברות.

קבוצה (Set) - אוסף של עצמים.

אותיות גדולות כמו A, B, X, Y מייצגות קבוצות.

דוגמאות:

- הקבוצה A- קטע (כאוסף של נקודות).
- הקבוצה B- קבוצת תלמידים בכיתה.
- הקבוצה C- קבוצת המספרים השלמים בין 5 ל- 7.
- הקבוצה R- קבוצת המספרים הממשיים.

איבר (Element) בקבוצה - עצם השייך לקבוצה (אלמנט).

אותיות קטנות כמו a, b, x, y מייצגות איברים.

סימון: $a \in A$ (האיבר a שייך לקבוצה A).

$x \notin X$ (האיבר x לא שייך לקבוצה X).

יש שתי דרכים לתיאור קבוצה:

1. על ידי רישום כל אברי הקבוצה, למשל:

   A = {2,4,6,8}

   B = {H,T}={סמל, מספר} (תוצאות אפשריות בזריקת מטבע)

2. על ידי כלל או נוסחה, למשל:

   C={x| עיר עם אכלוסיה מעל למיליון בני אדם x}

   הסבר תוכן הסוגריים- x כך ש- x היא עיר עם אוכלוסיה מעל מליון איש.

   A={a| מספר זוגי בין 1 ל-9 a}

   V={*|* vowel}

   $A=\{x|x \in R, 0 \le x \le 1\}$

   $B=\{x|x \in R, x^2=9\}=\{-3,3\}$

שוויון של קבוצות - שתי קבוצות שוות אם הן בעלות אותם איברים בדיוק (סדר האיברים לא משנה).
דוגמא:
$A=\{1,3,5\}$, $B=\{3,1,5\}$, $C=\{1,3,5,7\}$
$A=B,\ A\neq C, B\neq C$

קרדינליות (Cardinality) של קבוצה A – מספר האיברים בקבוצה A, מסומן על ידי $\#(A)$. בדוגמא הקודמת $\#(A)=3$.
הערה: ניתן לסמן קרדינליות של קבוצה (לדוגמא של קבוצה A) גם בסימון הבא: $|A|$.

קבוצה ריקה (Null Set, Empty Set)- קבוצה ללא איברים, מסומנת ב- ϕ.
דוגמאות: $A=\{x|$ x אדם שמשקלו מעל ל-500 קילו$\}$, $B=\{x|x\in R, x^2=-1\}$

Ω - הקבוצה האוניברסלית (Universal Set) – קבוצת כל העצמים האפשריים ביישום מסוים.
דוגמאות: קבוצת כל האותיות באלף-בית. קבוצת כל המספרים הרציונליים.

קבוצה חלקית ((Subset) A קבוצה חלקית ל- B אם לכל $a\in A$ מתקיים גם $a\in B$, ומסמנים את היחס בין A ל-B כך: $A\subseteq B$.

קבוצה חלקית ממש (Proper Subset)- A הינה קבוצה חלקית ממש של B אם $A\subseteq B$ וגם $A\neq B$. מסומן ב- $A\subset B$.
דוגמאות: $A = \{1,2\}$ $B = \{2,1,3\}$ $A\subset B$ $A\subseteq A$ $B\not\subset A$
$A=$ קבוצת אותיות ה- ABC. B- קבוצת אותיות הניקוד באנגלית. $B\subset A$.

סימון: $\Leftrightarrow$ מסמן אם ורק אם.
שיוויון של קבוצות: $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$
יחסים הנובעים מן ההגדרה של קבוצה חלקית:

- $\phi\subseteq A$
- $A\subseteq\Omega$
- $A\subseteq A$ (המאפיין הריפלקסיבי)
- $A\subseteq B$, $B\subseteq C$ $\Leftarrow$ $A\subseteq C$ (המאפיין הטרנסיטיבי)

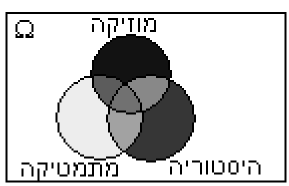
פתרונות לתרגילי חזרה- פרק 4

שאלה 1:

1. עבור קבוצות זרות אין צורך להוריד מחוק החיבור את החיתוך כיוון שהחיתוך הוא קבוצה ריקה, ולכן התשובה היא ב'.
2. בחוק החיבור מורידים מחיבור הקארדינאליות של שתי הקבוצות את החיתוך, כיוון שהוא כלול בשתי הקבוצות ולכן בחיבור הקארדינאליות נספר פעמיים.
3. חוק החיבור הוא החוק המאפשר למצוא את הקארדינאליות של האיחוד בין כל שתי קבוצות.
4. כיוון ששתי הקבוצות עליהן עושים איחוד אינן זרות (יש להן חיתוך- הרופאים הבנים), ובנוסף אף קבוצה אינה מכילה את השניה, יש להשתמש בחוק א' על מנת למצוא את קארדינאליות האיחוד.
5. כיוון ששתי הקבוצות אותן מאחדים הן זרות, התשובה היא ב', שזהו מקרה ספציפי של חוק האיחוד לקבוצות זרות.
6. כיוון שיולדות הן תת קבוצה של החולות בבית החולים, החוק המתאים למקרה זה הוא ג', שמתייחס למקרה ספציפי של חוק האיחוד.

פתרונות לתרגילים-פרק 4

1. התוצאות האפשריות הן: H1, T1, H2, T2, H3, T3, H4, T4, H5, T5, H6, T6.
2. התוצאות האפשריות הן: H, TH, TTH, TTT.
4. נצייר דיאגרמת וון לתרגיל:



ננסה לכתוב כמה תלמידים נמצאים בכל אחד מ- 8 השטחים הצבעוניים שבדיאגרמה.

19 לומדים מתמטיקה- זאת אומרת שכל המעגל שלמתמטיקה, הכולל את השטחים בצהוב, כתום, חום, וירוק מכיל יחד 19 תלמידים. אך אין לנו עדיין כל אפשרות לדעת איך מתבצעת החלוקה בין ארבעת המשטחים השונים.

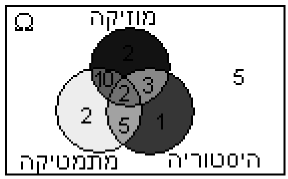
אפילו הנתון ש- 7 לומדים היסטוריה ומתמטיקה- עדיין קשה למיקום בדיאגרמה.

הדבר היחיד שניתן למיקום בהתחלה הוא הנתון ש 2 תלמידים לומדים את כל שלושת המקצועות. זאת אומרת שני תלמידים נמצאים בשטח החום.

אחרי שכתבנו "2" על השטח החום, ניתן לחזור לנתון- "7 לומדים היסטוריה ומתמטיקה". בשטח הכתום והחום ביחד- 7 תלמידים. בחום- 2, ולכן לכתום נשארו 5. נכתוב עליו "5".

בצורה זהה יש להמשיך עד למילוי כל השטחים במספרים (לא לשכוח את השטח הלבן!).

והדיאגרמה המלאה:



עכשיו כבר לענות על כל שאר השאלות, זה ממש פשוט...

פתרונות לתרגילים קשים- פרק 4

1. אם מספר חובבי כדורגל הנו 5x, אזי מספר חובבי כדורסל יהיה 6x. לפי נתוני השאלה, מספר החובבים את שניהם שווה לשליש ממספר חובבי כדורסל, זאת אומרת: $(1/3)*6x = 2x$. על פי חוק החיבור, חייבים להוריד פעם אחת את החיתוך, ואם כן, נוכל לומר
ש: $5x+6x-2x = 72 \Rightarrow x=8 \Rightarrow 2x=16$. מספר חובבי שניהם שווה ל- 16.

(הערה: אם לא היו מגבלות, אלא היה נדרש לבנות מספר עם 3 ספרות שונות, מספר האפשרויות היה: $5*4*3=60$).

תמורות במעגל:

לסידור n עצמים במעגל יש $n!/n$ סידורים, שווה ל- $(n-1)!$ סידורים.

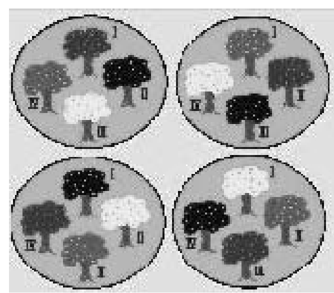
נסביר זאת על ידי הדוגמא הבאה:

אנו רוצים לשתול ארבעה עצים במעגל. אחד בצפון, אחד במזרח, אחד בדרום ואחד במערב.

נסתכל על הגינה שלנו מהעץ שבצפון, ונתקדם בכיוון השעון.

נניח כי שתלנו את העץ הבהיר בצפון, אחריו את הכהה, אחריו את השחור ואחרון את הלבן.

סידור זה בדיוק יתקבל גם במקרה שנשתול את העץ הלבן בצפון, הבהיר אחריו, וכו', כפי שניתן לראות בתמונה הבאה:



בתמונה $n=4$, ואם כן, מספר הסידורים השונים קטן בגורם של n ממספר האפשרויות כאשר העצים מסודרים בשורה.

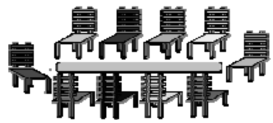
הסבר נוסף לכך הוא סידור משפחה במעגל ריקודים. נניח שנשים את אבי המשפחה ליד החלון, אחריו את אם המשפחה, ואחריה הילדים מסודרים לפי הסדר מהגדול לקטן, כך שהקטן נותן יד לאבא. כמובן שברגע שהם יתחילו לרקוד- לא יתקבל מעגל אחר, אלא מעגל זהה בדיוק למעגל המקורי. נכון שכרגע אם המשפחה תהיה ליד החלון, אך מבחינת המעגל- מדובר באותו מעגל בדיוק.

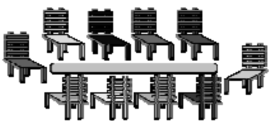
נשים לב כי לנושא המעגל יתכנו תתי מקרים רבים. לדוגמא:

הושבת משפחה עם שמונה אנשים סביב שולחן ריבועי. כאן, אם כל אחד זז כיסא אחד ימינה, לא מדובר בדיוק במעגל המקורי, כיוון שכל מי שהיתה מימינו פינה, כרגע תהיה פינה משמאלו, וזה לא אותו סידור. אך אם כולם ימשיכו לזוז, בשלב כלשהו (תלוי במספר האנשים שיושבים בכל צלע), תחזור על עצמה צורת הישיבה המקורית, כאשר חלוקת האנשים מסביב השולחן נראית בדיוק כמו שהיתה בהתחלה, אלא שהצלע אשר סמוך אליה יושבים האנשים השתנתה. במקרה זה כל סידור יחזור במקום n פעמים (כמו במעגל) 4 פעמים, ולכן מספר הסידורים יהיה $n!/4$.

במקרה של שולחן מלבני- מספר הסידורים של n אנשים סביב השולחן יהיה $n!/2$, כיוון שכל הזזה של אדם תיתן סידור שונה, ורק תזוזה של חצי ממספר המקומות ימינה / שמאלה, תיתן סידור זהה למקורי, כמוצג באיור הבא:


(1)


(2)


(3)

בסידור הראשון (1) בראש השולחן נמצאים כיסא כהה ומולו בהיר. אם כל אחד זז מקום אחד שמאלה (2), היושבים בראש השולחן משתנים, כל אחד יושב מול מישהו שונה מהאדם ממנו ישב לפני התזוזה, וכל הסדר נחשב שונה מסידור (1). אך אם כל אחד זז עוד 4 מקומות שמאלה (3), מתקבל חזרה אותו סידור, רק בדיוק בצורה מקבילה- הבהיר והכהה מתחלפים בראשי השולחן, כל אחד יושב בדיוק מול מי שישב קודם, ליד מי שישב קודם, ובאותו מיקום בייחס לפינות השולחן כמו שהיה קודם, וזה נחשב אותו סידור כמו המקורי (1). כיוון שהשולחן מסודר במלבן, אין עוד אפשרויות לסידור זהה, כך שכל סידור יופיע בדיוק פעמיים, ולכן את מספר סידורי האנשים בכיסאות ($n!$) נחלק ב- 2.

הגבלה: ניתן להפוך שולחן עגול / ריבועי חזרה ל"שורה ישרה" מבחינת מספר האפשרויות אם במקרה אחד הכיסאות הוא כיסא מיוחד ושונה מהאחרים. במקרה זה כל סיבוב של האנשים סביב השולחן – ישנה את ה"זוכה" בכיסא המיוחד, ואז יש $n!$ סידורים שונים.

כל שינוי במקרה הבסיסי צריך בדיקה מיוחדת- אם לאחד האנשים יש מקום קבוע, או מסביב לכל צלע בשולחן יש מספר כיסאות שונה, או שהשולחן משולש- לא ניתן להכליל את כלל המעגל, אלא יש לקבוע את מספר האפשרויות לכל מקרה לגופו.

דוגמא:

לחברה n מנהלים היושבים סביב שולחן עגול. כמה סידורי ישיבה שונים אפשר להציע להם, כאשר סידור הוא שונה אם השכנים של לפחות אדם אחד שונים מאשר בסידורים אחרים?

תשובה: לסידור n עצמים במעגל יש $(n-1)!=n!/n$ אפשרויות.

הערה: נקבל אותה תוצאה אם מקומו של אדם מסוים קבוע, מפני שזה משאיר $(n-1)!$ דרכים שונות לסדר את יתר האנשים.למשל, בסידור חמישה מנהלים סביב שולחן עגול, מספר הסידורים שווה ל: $5!/5=4!=24$.

פרק 9 - הסתברות

הסתברות תיאורטית של מאורע A - אם ניסוי מוביל ל- N תוצאות שונות שסיכוייהן שווים, ואם n מתוצאות אלו מיוחסות למאורע A, אזי הסתברותו של מאורע A מסומנת על ידי P[A], והיא שווה ל- n/N.

במילים אחרות, אם מרחב המדגם S מכיל N "נקודות בעלות משקל שווה", ומאורע A מכיל n מתוך N של אותן נקודות, אז ההסתברות של מאורע A שווה ליחס בין n ל- N. במונחים של קרדינליות של קבוצות (הפונקציה #) נוכל לכתוב ש:

$$P[A]=\frac{n}{N}=\frac{\#(A)}{\#(S)}$$

דוגמא:

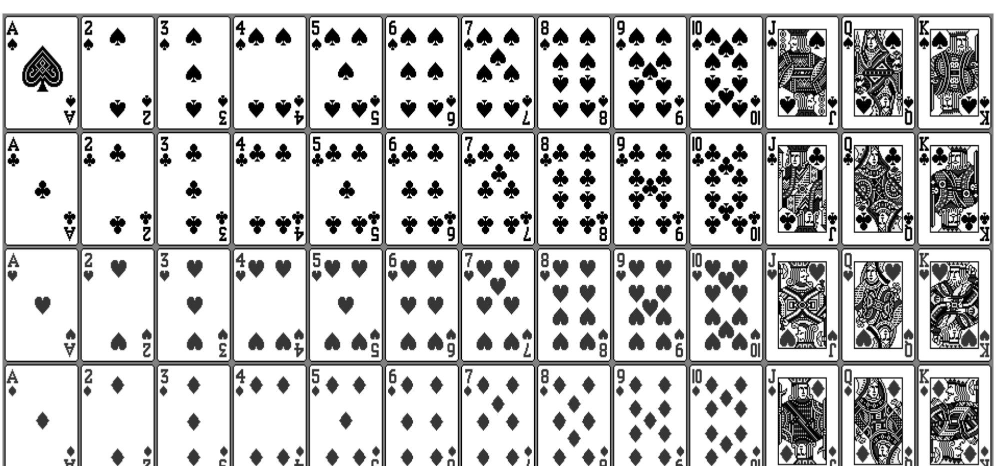
כתב עת מודיע על חלוקת 50 פרסים בהגרלה. אם 10,000 אנשים קונים כרטיס, מה ההסתברות של כל אחד מהמשתתפים לזכות בפרס?

A - מאורע שאדם ספציפי זוכה. #(A)=50.

S - כל האפשרויות. #(S) = 10,000.

P[A] = #(A)/#(S)=50/10,000=0.005.

לפני שנתחיל עם דוגמאות להסתברות, מצורפת תמונת חפיסת קלפים, אשר רוב הדוגמאות יתבססו עליה:



דוגמא: בוחרים קלף מחפיסת קלפים טרופה היטב (בחפיסת קלפים 4 נסיכים). מה הסתברות שהקלף שנבחר הוא נסיך?

פתרון: N=52, n=4, P[נסיך]=n/N=4/52

דוגמא: מה ההסתברות לקבל לפחות "עץ" אחד בשתי זריקות של מטבע?

פתרון: H (Heads) יסמן סמל ו-T (Tails) יסמן מספר.

$$S=\{HH,TH,HT,TT\}\Rightarrow N=4$$
$$A=\{HH,HT,TH\}\Rightarrow n=3$$
$$\Rightarrow P[A]=\frac{n}{N}=\frac{3}{4}$$

שאלה:

מחפיסת קלפים נבחרים שני קלפים. נניח שבודקים כמה אסים נבחרו.

זהירות!!

כאשר מסתכלים על הניסוי ניתן לטעות, ולחשוב שמרחב המדגם של הניסוי מכיל 3 תוצאות אפשריות: 0 אסים, אס אחד או שני אסים, ולכל אפשרות הסתברות שווה. אך כמובן שאין זה נכון! אלה לא תוצאות שוות הסתברויות!

ההסתברות ל- 0 אסים גדולה בהרבה מההסתברות לאס אחד, וההסתברות לאס אחד גדולה מההסתברות לשני אסים.

נסביר את הנושא ע"י הדגמה של מספר ניסויים קלאסיים, אשר חלק מהניסויים שווי הסתברויות, וחלקם לא.

כדי לקבוע הסתברות המבוססת על הנחת סיכויים שווים (הסתברויות שוות), חייבים למנות נכון את גודל מרחב המדגם, זאת אומרת- לספור את כל התוצאות שהסתברויותיהן שוות, ולא לרשום תוצאות אפשריות שהסתברויותיהן שונות מאלה של תוצאות אחרות.

בעמוד הבא טבלה אשר בה נראה כי באותו ניסוי ניתן ליצור מרחב מדגם שווה הסתברויות, וניתן ליצור מרחב מדגם בו הנקודות אינן שוות הסתברות.

	הסתברות שונה		הסתברות שווה	
ניסוי	**מרחב מדגם לא נכון (הסתברויות שונות לכל נקודה במרחב המדגם)**	גודל מרחב המדגם	**מרחב המדגם הנכון (לכל מאורע פשוט במרחב המדגם- אותה הסתברות)**	גודל מרחב המדגם
הטלת מטבע			H,T	2
הטלת מטבע פעמיים (או הטלת שני מטבעות)	**הניסוי**: מספר פעמים שקבלנו עץ. **מרחב המדגם**: {0,1,2} **הבעיה**: 0 ו- 2 יקרו בדרך אחת, ו- 1 בשתי דרכים	3	**הניסוי**: כל התוצאות האפשרויות. **מרחב המדגם**: (H,T)(H,H)(T,H)(T,T)	4
הטלת קובייה פעם אחת			**הניסוי**: כל התוצאות האפשרויות. **מרחב המדגם**: { 1,2,3,4,5,6}	6
הטלת קובייה פעמיים (או שתי קוביות)	**הניסוי**: סכום התוצאות בשתי הפעמים. **מרחב המדגם**: {2,3,4,..12} **הבעיה**: התוצאה 2 תקרה בדרך אחת: (1,1), ו- 7 ב- 6 דרכים: (1,6)(2,5)(3,4)(4,3)(5,2)(6,1)	11	**הניסוי**: כל התוצאות האפשרויות. **מרחב המדגם**: {(1,1),(1,2),(1,3)… (2,1),(2,2),(2,3)…. (6,1),(6,2),………(6,6)}	36
שליפת קלף אחד מחפיסה			**הניסוי**: כל התוצאות האפשרויות. **מרחב המדגם**: { 1,2,3,….52}	52
שליפת שני קלפים מחפיסה	**הניסוי**: מספר האסים שהתקבלו. **מרחב המדגם**: {0,1,2}. **הבעיה**: 0 יקרה ב: 48*47=2256 דרכים שונות, 2 יקרה ב: 4*3=12 דרכים שונות.	3	**הניסוי**: כל התוצאות האפשרויות. **מרחב המדגם**: {(1,2),(1,3)…..(1,52) (2,1),(2,3)…. (52,1),(52,2)….(52,51)}	265 2
שליפת כדור מכד עם 6 כדור' לבנים, 5 שחורים			**הניסוי**: כל תוצאה (כדור) שאפשר לקבל. **מרחב המדגם**: { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}	11
שליפת שני כדורים מכד עם 6 כדורים לבנים, 5 שחורים, מעוניינים במס'הלבנים	**הניסוי**: מספר הכדורים הלבנים. **מרחב המדגם**: {0,1,2} **הבעיה**: 0 יקרה ב- 5*4=20 דרכים שונות. 2 יקרה ב- 6*5=30 דרכים שונות	3	**הניסוי**: כל התוצאות האפשרויות. **מרחב המדגם**: {(1,2),(1,3)…..(1,11) (2,1),(2,3)…. …. (11,1),(11,2)….(11,10)}	110
בחירת שני פריטים מתוך 22 כאשר 3מהם פגומים מעוניינים במספר התקינים.	**הניסוי**: מספר התקינים. **מרחב המדגם**:{0,1,2} **הבעיה**: 0 יקרה ב- 3*2= 6 דרכים שונות. 2 יקרה ב- 19*18=342 דרכים שונות	3	**הניסוי**: הרכיבים שקיבלנו, כל התוצאות **מרחב המדגם**: {(1,2),(1,3),…. (2,1),(2,3)….. ….. (22,1),(22,2)….(22,21)}	462

נפתור מספר תרגילים על ידי שימוש בטבלה:

1. מה ההסתברות לקבל שני אסים בשליפת שני קלפים מחפיסה (דוגמא 6 בטבלה)?

כמו שראינו- ניתן לפתור בעזרת מרחב המדגם שווה הסתברויות:

P(שני אסים) = 4*3/(52*51) = 12/2652 = 0.004

17. *קובייה מוטלת פעמיים. נגדיר את המ"מ הבאים: X- סכום המספרים המתקבלים.

Y- המספר המקסימאלי המתקבל (מבין שני המספרים)

Z- המספר המינימאלי המתקבל (מבין שני המספרים)

א. לקשר האלגברי בין X, Y ו- Z יש הצורה: X=x. מה הערך של x (בלי רווחים)?

ב-ג: מה הטווח של X, מקטן לגדול?

ד-ו: מה הם הערכים של ההסתברות עבור X=4, 6, 8?

18. עבור Y שהוגדר קודם, מה הערך של f(y) עבור כל ערך של Y, מקטן לגדול?

19. עבור Z שהוגדר קודם, מה הערך של f(y) עבור כל ערך של Z, מקטן לגדול?

20. בכד נמצאים עשרה כדורים מהם ארבעה אדומים, שלשה ירוקים, שנים כחולים ואחד לבן.

מגדירים משחק הימור באופן הבא: מוציאים בזה אחר זה שני כדורים מהכד בלי החזרה ובהתאם לצבעי הכדורים מקבלים או משלמים סכום כסף. עבור כל כדור אדום שמוציאים יש לשלם 10 ש"ח, עבור כל כדור ירוק מקבלים 10 ש"ח, עבור כל כדור כחול מקבלים 20 ש"ח ועבור כל כדור לבן מקבלים 30 ש"ח.

א. אם R מסמן את הרווח, כמה ערכים שונים R יכול לקבל?

ב. מהם 5 הערכים הקטנים ביותר של הרווח?

<u>תשובות:</u>

17.	א. Y+Z	ב. 2	ג. 12	ד. 0.0833	ה. 0.1389	ו. 0.1389
18.	1. 0.0278	2. 0.0833	3. 0.1389	4. 0.1944	5. 0.25	6. 0.3056
19.	1. 0.3056	2. 0.25	3. 0.1944	4. 0.1389	5. 0.0833	6. 0.0278
20.	א.8	ב. 20-	ג. 0	ד. 10	ה. 20	ו. 30

21. בשאלה הקודמת, מהן ההסתברויות ש-R יקבל את 5 הערכים הקטנים ביותר של הרווח, אם מוציאים את הכדורים עם החזרה?

22. בשאלה הקודמת, מהן ההסתברויות ש-R יקבל את 5 הערכים הקטנים ביותר של הרווח, אם מוציאים את הכדורים בלי החזרה.

23. אדם שיחק במשחק הנ"ל וזכה ב- 20 ש"ח.

א. מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוצא היה בצבע אדום אם מוציאים את הכדורים עם החזרה.

ב. מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוצא היה בצבע אדום אם מוציאים את הכדורים בלי החזרה.

<u>תשובות:</u>

21. א. 0.16 ב. 0.24 ג. 0.16 ד. 0.17 ה. 0.12

22. א. 0.1333 ב. 0.2667 ג. 0.1778 ד. 0.1556 ה. 0.3333

23. א. 0.2353 ב. 0.2857

פרק 23 - התפלגות פסקלית

ההתפלגות הבינומית שלילית, הנקראת גם ההתפלגות הפסקלית, עונה על השאלה הבאה: ברצף של ניסיונות ברנוליים, כמה ניסיונות יש לבצע עד לקבלת הצלחה מספר k. אפשר להסתכל על X, שהוא מספר הניסיונות עד להצלחה k, כאילו הוא הסכום של k משתנים גיאומטריים ב"ת, ז"א:

$X=X_1+X_2+\dots X_k$, וזה מחייב ש:

$$E[X] = E[\sum_{i=1}^{k} X_i] = \sum_{i=1}^{k} E[X_i] = k\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{k}{p}$$

$$V[X] = V[\sum_{i=1}^{k} X_i] = \sum_{i=1}^{k} V[X_i] = k\left(\frac{q}{p^2}\right) = \frac{kq}{p^2}$$

פונקצית ההסתברות של X:

(1) הסתברות ל k-1 הצלחות ב- x-1 ניסיונות שווה ל: $\binom{x-1}{k-1}p^{k-1}q^{x-k}$

(2) הסתברות של הצלחה בניסיון x שווה ל- p.

המכפלה של (1) ו- (2) שווה להסתברות הרצויה, דהיינו ההסתברות שהצלחה מספר k תקרה בניסיון מספר x.

$$(1)*(2) = \binom{x-1}{k-1}p^{k-1}q^{x-k} \bullet p = \binom{x-1}{k-1}p^{k}q^{x-k}$$

יש לשים לב שעבור k=1, הבינומית השלילית מצטמצמת להיות הגיאומטרית, pq^{x-1}.

דוגמא: נשיא של חברה גדולה מכריע בסוגיות חשובות על ידי זריקת חצים למטרה. הוא מכריע לחיוב עם הוא קולע פעם שלישית עד הזריקה החמישית (כולל הזריקה החמישית). ההסתברות שהוא קולע בכל זריקה שווה ל- 0.6.

(א) מה ההסתברות להכרעה חיובית?

(ב) בממוצע, באיזה זריקה הוא קולע פעם שלישית, ומה השונות?

תשובות:

על מנת שיצליח עד הזריקה החמישית עליו להצליח את כל 3 הניסויים הראשונים, או להצליח פעם שלישית בניסוי הרביעי, או להצליח פעם שלישית בניסוי החמישי, P=0.6, k=3, x=3, 4, 5:

$$P[X <= 5] = P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] =$$

$$\sum_{x=3}^{5}\binom{x-1}{k-1}p^{k}q^{x-k} = \binom{2}{2}0.6^3 0.4^0 + \binom{3}{2}0.6^3 0.4^1 + \binom{4}{2}0.6^3 0.4^2 = 0.6636$$

$$\mu = \frac{k}{p} = \frac{3}{0.6} = 5,\ \sigma^2 = k\left(\frac{q}{p^2}\right) = 3*\left(\frac{0.4}{0.6^2}\right) = 3.33$$

במקום להשתמש באות x לסמן את מספר הניסיונות עד להצלחה k, אפשר להשתמש באות f לסמן את מספר הכשלונות עד להצלחה k, ואז במקום x נוכל לכתוב בנוסחא עבור הפסקלית f+k. ואז הנוסחא תראה כך:

$$\binom{x-1}{k-1}p^k q^{x-k} * p = \binom{k+f-1}{k-1}p^k q^{x-k}$$

כאשר התפלגות פסקלית מוצגת בצורה זאת, היא נקראת התפלגות בינומית שלילית (Negative Binomial). גם באקסל משתמשים בשם זה. את ההצדקה לשם נוכל להבין מן השוויון המופיע למטה:

$$\binom{k+f-1}{k-1}=\binom{k+f-1}{f}=\frac{(k+f-1)...k...1}{f!(k-1)!}=\frac{(k+f-1)...k(f\ \text{מונחים})}{f!}=$$

$$(-1)^f\frac{(-k)[-(k+1)]....[-(k+f-1)]}{f!}=(-1)^f\frac{(-k)[-k-1)]....[-k-f+1)]}{f!}=(-1)^f\binom{-k}{f}$$

כתוצאה משוויון זה, אפשר להציג את ההתפלגות הזאת בשתי דרכים (שמביאים לאותן תוצאות), כאשר הדרך הראשונה נקראת התפלגות פסקלית, והשנייה נקראת התפלגות בינומית שלילית.

$$\binom{k+f-1}{k-1}p^k q^{x-k} = (-1)^f\binom{-k}{f}p^k q^{x-k}$$

<u>שימוש באקסל לצורך חישוב תוצאות של התפלגות בינומית שלילית</u>

על מנת לחשב מה ההסתברות שלפני שנצליח x הצלחות נקבל r כשלונות, ב r+x ניסיונות ב"ת אשר בכל אחד מהם ההסתברות להצלחה שווה ל- p, נשתמש בהתפלגות בינומית שלילית (פסקלית), NEGBINOMDIST. תיבת הארגומנטים של הפונקציה מופיעה למטה:

בתיבה הראשונה מלא את r בשניה את x ובשלישית את p- ההסתברות להצלחה בכל אחד מהניסיונות הב"ת. NEGBINOMDIST (r,x,p) =

לדוגמא: בקליעה למטרה ההסתברות לקלוע למרכז הלוח היא 0.2.

מה ההסתברות שעל מנת להשיג 3 קליעות, נצטרך לבצע 7 ניסיונות (4 כישלונות)? =

NEGBINOMDIST(4,3,0.2) [דרך אגב- זה גם- =COMBIN(6,2)*0.2^3*0.8^4]

פרק 29- תוחלת ושונות עבור משתנים רציפים

מכיון ש: $f(x)dx \approx P[x < X < x + dx]$ עבור dx קטן, זה מחייב שהמקרה המקביל הרציף של

$$E[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$ הנו $$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

הערה: בשני המקרים, צריכים להניח שהערכים מתכנסים בערך מוחלט, ז"א ש:

$$E[x] = \sum_{i=1}^{n} | x_i | p(x_i)$$ ו- $$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} | x | f(x) dx$$ מתכנסים. הסיבה לכך היא, שהערך של סכומים ואינטגרלים שלא מתכנסים בערך מוחלט משתנה כפונקציה של סדר האיברים, ואסור שהתוחלת תהיה שווה לערכים שונים אם משנים את סדר האיברים.

דוגמא: התפלגות של אורך חיים של שפופרת מופיעה למטה. מצא את התוחלת.

פתרון:

$$f(x) = \frac{20000}{x^3},\ x > 100 \qquad E[X] = \int_{100}^{\infty} x \bullet \frac{20000}{x^3} dx = \int_{100}^{\infty} \frac{20000}{x^2} = \left.\frac{-20000}{x}\right]_{100}^{\infty} = 200$$

דוגמא: מצא את התוחלת של פונקצית ההסתברות שמופיעה כאן.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{Elsewhere} \end{cases} \qquad E[X] = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left.\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 1$$

דוגמא של תוחלת אינסופית:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad -\infty < x < \infty$$

$$\text{Note}: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)} = \tan^{-1} x \Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \text{ so } f(x) \text{ is a density}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} = (\text{Even Function})\, 2\int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)} = \frac{2}{\pi}\lim_{c\to\infty}\int_0^{c} \frac{x}{(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}\lim_{c\to\infty} \log(1+x^2)\Big]_0^c = \infty$$

הסבר: ההתפלגות מתכנסת בקצב איטי. כאשר מוסיפים את המשקל של המרחק (x), הפונקציה כבר מתבדרת.

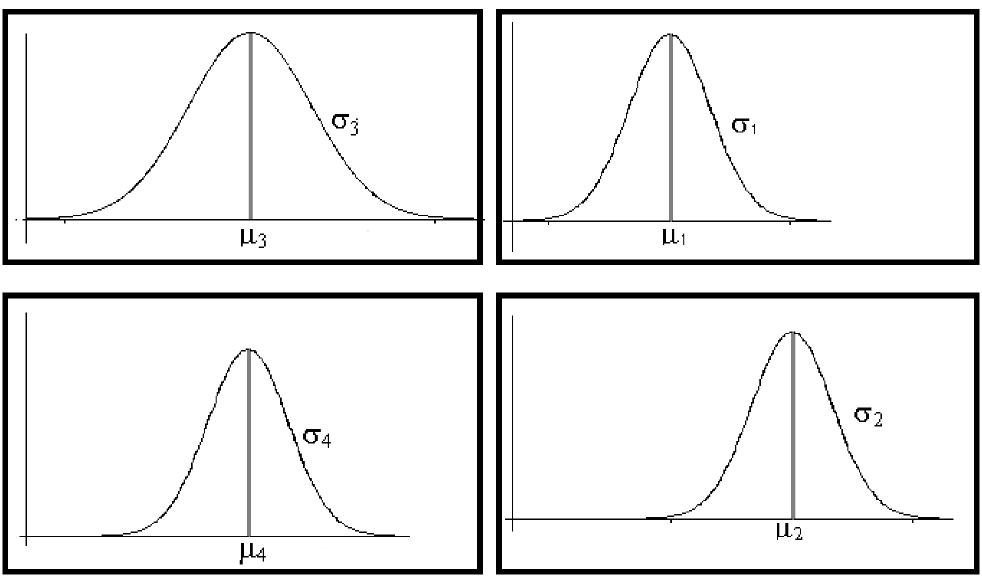
פרק 31 - ההתפלגות הנורמלית

התפלגות זו פותחה על ידי המתמטיקאי הצרפתי אברהם דה-מובר (1667-1754) בשנת 1733. הוא השתמש בהתפלגות זו כדי לאמוד את ההתפלגות הבינומית כאשר n גדול. התוצאה הורחבה על ידי לה-פלס ואחרים למשפט הגבול המרכזי, שהוא, יחד עם החוק של מספרים גדולים, מהווים את המשפטים החשובים ביותר בתורת ההסתברות. התפלגות זו גם נקראת ההתפלגות הגאוסינית אחרי פרידריך גאוס (1777-1855), שפיתח אותה על ידי מחקר השגיאות במדידה חוזרת של אותה תופעה.

תכונות:

א. התפלגות רציפה. זאת אומרת, מתאימה לתיאור תופעות הנמדדות בסרגל רציף, למשל מהירות של מכונית, גובה ומשקל של אדם, קוטר של בורג, וכו'...

ב. התפלגות בצורת פעמון, סימטרית סביב ציר אנכי העובר דרך התוחלת μ (שהיא גם החציון והשכיח). רוחב הפעמון נמדד על ידי סטיית התקן התיאורטית σ. לעיין בציורים שמופיעים למטה:



$\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 = \sigma_2$

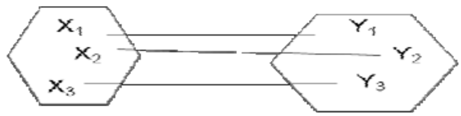
$\mu_3 = \mu_4, \ \sigma_3 > \sigma_4$

ג. העקומה שואפת לציר האופקי באופן אסימפטוטי. זאת אומרת, העקומה יורדת בגובה ככל שמתרחקים מן התוחלת, אבל לעולם אינה חותכת את ציר x.

ד. $P[a \le X \le b]$ שווה לשטח המוצל מעל לרווח $[a,b]$

פרק 39 – טרנספורמציות – ממד אחד בדיד

נניח שהפונקציה Y=y(X) מגדיר יחס חד-חד ערכי בין הערכים של המשתנים המקריים X ו-Y.



יהי X=x(Y) הפונקציה ההפכית. אזי: $f_Y(y) = f_X[x(y)]$

בקיצור, נוכל לסכם את הנוסחא עבור פונקצית הצפיפות של פונקציה Y של משתנה מקרי X, במקרה הבדיד, כדלהלן: $f_Y(y) = P[Y = y_i] = P[X = x_i] = f_X[x(Y_i)]$

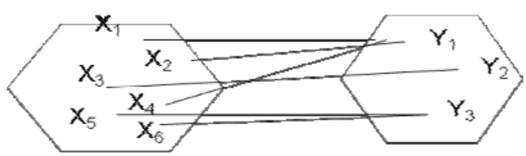
דוגמא: יהי $f(x)=3/4(1/4)^{x-1}$ עבור ....,x=1,2,3. מצא $f_Y(Y)$ כאשר $Y=X^2$.

תשובה: מכיוון ש: $X = x(Y) = \sqrt{y} \Rightarrow f_Y(y) = f_X[x(Y)] = 3/4(1/4)^{\sqrt{Y}-1}$

עבור .....,Y=1,4,,9,16.

<u>טרנספורמציות בדידות 1- n (אחד ל- n)</u>

נניח ש: Y=y(X) אינה פונקציה חד-חד ערכית, זאת אומרת, הרבה ערכים שונים של X מובילים לאותו ערך עבור Y. אזי כל ערך y_i של המשתנה אחרי הטרנספורמציה מיוחס ל- η_i ערכים של x_i, שהם x_{i1}, x_{i2}, ...$x_{i\eta}$. המקרה הקיצוני קורה כאשר X הוא משתנה מקרי רציף ו-Y הוא משתנה מקרי בדיד, שאז מספר אינסופי של ערכים של X מיוחסים לערך מסוים של Y.



$$f_Y(y) = P[Y = y_i] = P[X = x_{i_1}(Y_i), x_{i_2}(Y_i), ...x_{i_{\eta_i}}(Y_i)] = \sum_j P[X = x_{i_j}(Y_i)] = \sum_j f_X[x_{i_j}(Y_i)]$$

דוגמא:

x	-1	0	1
f (x)	0.3	0.4	0.3

אם X = -1 או 1, אזי Y = 0. אם X=0, אזי Y = -1. נובע מזה ש: P[Y=-1] = P[X=0] = 0.4.

$$P[Y = 0] = \sum_j f_X[x_{i_j}(0)] = f_x(-1) + f_x(+1) = 0.6$$

פתרונות לתרגילים קשים– פרק 40

1. א.

$$E[Y]=E[Z^2] \quad V[Z]=1=E[Z^2]-E[Z]^2$$
$$=E[Z^2]-0 \Rightarrow E[Z^2]=1$$

ב.

$$P[Y<1]=P[Z^2<1]=P[-1<Z<1]$$
$$=0.8413-0.1587=0.6826$$

ג.

$$P[Y<1]=P[Z^2<1]=P[-1<Z<1]=0.8413-0.1587=0.6826$$
$$P[|Y-1|>0.5]=P[Y-1<-0.5]\cup P[Y-1>0.5]=$$
$$P[Z^2-1<-0.5]\cup P[Z^2-1>0.5]=P[Z^2<0.5]\cup P[Z^2>1.5]=$$
$$P[-\sqrt{0.5}<Z<\sqrt{0.5}]\cup P[Z>\sqrt{1.5}]\cup P[Z<-\sqrt{1.5}]=$$
$$\Phi(\sqrt{0.5})-\Phi(-\sqrt{0.5})+(1-\Phi(\sqrt{1.5}))+\Phi(-\sqrt{1.5})=$$
$$\Phi(\sqrt{0.5})-[1-\Phi(\sqrt{0.5})]+(1-\Phi(\sqrt{1.5}))+[1-\Phi(\sqrt{1.5})]=$$
$$2\Phi\Phi\sqrt{0.5})-2\Phi\Phi\sqrt{1.5})+1=2\Phi\Phi(0.7071-2\Phi\Phi(0.224+1=$$
$$2*(0.76025)-2*0.889664+1=0.741171$$

שאלה 2:

$$F(x)=\int_0^x 6x(1-x)=3x^2-2x^3 \qquad F(y)=\int_0^y 3(1-\sqrt{y})=3y-2y^{3/2}$$

אפשר לראות ש: $Y=X^2$

שאלה 3:

$$f(x)=\frac{1}{6} \quad 2\le x\le 8 \quad V=x\sqrt{x}*15=x^{3/2}*15$$

א.

$$E[V]=E[g(X)]=\int_2^8 15x^{3/2}(1/6)dx=x^{5/2}\Big]_2^8 \quad 8^{5/2}-2^{5/2}=$$
$$(2^3)^{5/2}-2^{5/2}=2^{15/2}-2^{5/2}=2^7*2^{1/2}-2^2*2^{1/2}=$$
$$2^{1/2}(128-4)=124\sqrt{2}=175.3625$$

ב.

$$f(x)=\frac{1}{6} \quad 2\le x\le 8 \quad V=x\sqrt{x}*15=x^{3/2}*15 \Rightarrow \text{Monotonically increasing}$$
$$\frac{v}{15}=x^{3/2}\Rightarrow\left(\frac{v}{15}\right)^{2/3}=x(v),\quad x'(v)=\frac{2}{3}\left(\frac{v}{15}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{15}\right)$$
$$f(v)=f_x[x(v)]\,|x'(v)|=\frac{1}{6}\left|\frac{2}{3}\left(\frac{v}{15}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{15}\right)\right|=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{15}\right)^{2/3}\left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{v}}=\frac{1}{9*15^{2/3}\sqrt[3]{v}}=$$
$$\frac{1}{54.73982}*v^{-1/3}=0.018268v^{-1/3}$$

ג,ד.

$$V = x^{3/2} * 15 :\ x = 2 \Rightarrow v = 30\sqrt{2},\ x = 8 \Rightarrow v = 120\sqrt{8} = 240\sqrt{2}$$

$$F(v) = \int_{30\sqrt{2}}^{v} \frac{1}{9 * 15^{2/3}\sqrt[3]{v}} = \frac{1}{9 * 15^{2/3}} \frac{v^{2/3}}{(2/3)}\Bigg]_{30\sqrt{2}}^{v} = \frac{1}{6 * 15^{2/3}}\left[v^{2/3} - (30\sqrt{2})^{2/3}\right]$$

$$= \frac{1}{6 * 15^{2/3}} v^{2/3} - \frac{1}{6}(2\sqrt{2})^{2/3} = \frac{v^{2/3}}{36.4932} - \frac{1}{3} = 0.027402v^{2/3} - \frac{1}{3}$$

.4

$$Z = \max(X_1, X_2, X_3, ...X_n)$$

$$F_Z(z) = P[Z \le z] = P[X_1 \le z]P[X_2 \le z]P[X_3 \le z]....P[X_n \le z] = \pi F_{x_i}(z)$$

$$Z = \min(X_1, X_2, X_3, ...X_n)$$

$$P[Z > z] = P[X_1 > z]P[X_2 > z]P[X_3 > z]....P[X_n > z]$$

$$F_Z(z) = 1 - P[Z > z] = 1 - P[X_1 > z]P[X_2 > z]P[X_3 > z]....P[X_n > z] = 1 - \pi(1 - F_{x_i}(z))$$

.5

א. עבור המעריכית נוכל לכתוב:

$$Z = \min(X_1, X_2, X_3, ...X_{10}), \lambda = 0.1, P[X > x] = e^{-0.1x}$$

$$P[Z > z] = P[X_1 > z]P[X_2 > z]....P[X_{10} > z] = e^{-0.1z} * e^{-0.1z} * e^{-0.1z}........e^{-0.1z} = e^{-0.1(10)z} = e^{-z}$$

$$F[z] = P[Z \le z] = 1 - e^{-z} \Rightarrow f(z) = e^{-z}$$

רואים שההתפלגות של המינימום הוא מעריכית עם
פרמטר: $\lambda = 10 * 0.1 = 1$
והתוחלת, אם כן, $1/\lambda = 1/1 = 1$
ובצורה כללית עבור המינימום של n רכיבים: $\lambda = n\lambda_i$

ב. $P[Z < 1] = \int_0^1 e^{-z}dz = -e^{-z}\Big]_0^1 = 0.632121$

ג. $P[1 < Z < 2] = \int_1^2 e^{-z}dz = -e^{-z}\Big]_1^2 = 0.232544$