יעקב רזניק

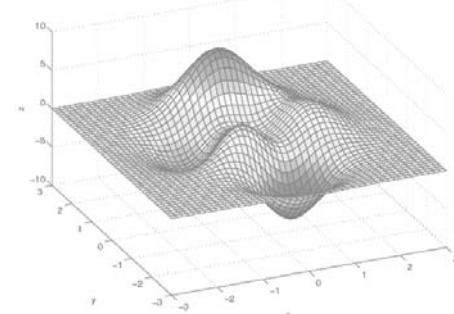
חשבון אינפיניטסימלי-2

(חדו"א-2)

למעלה מ-700 תרגילים עם פתרונות מלאים

+

הגדרות, משפטים ונוסחאות



הוצאת שורש

הוצאת שורש (אלי מיטב) - 052-2671210

email: **elmtv@017.net.il** web: **http://www.shoresh1.co.il**

הקדמה

ספר זה מיועד לסטודנטים שלומדים קורס אינפי-2 (חדו"א-2) בפקולטות שונות של אוניברסיטאות ומכללות. מחבר הספר לימד את הקורס במשך שנים רבות במוסדות להשכלה גבוהה ותמיד, כחלק של הקורס, הציע לסטודנטים להשתמש בחוברת תרגילים פתורים שפותחה על ידיו. הניסיון מראה באופן חד משמעי כי שימוש בחוברת מאפשר לסטודנט להבין ולהפנים ביתר קלות את החומר הנלמד. בדרך זאת יעילות החוברת עברה בדיקה לאורך שנים. החומר של החוברת בצורה מורחבת מהווה בסיס של הספר הזה.

הספר כולל יותר מ- 700 תרגילים עם פתרונות מלאים והסברים. בספר 25 פרקים. כל פרק הוא נושא מסוים של תוכנית הלימודים והוא כולל תרגילים, חומר תיאורטי נחוץ (הגדרות, משפטים, נוסחאות) והפתרונות. התרגילים והחומר התיאורטי מאוחדים בחלק הראשון של הספר. פתרונות התרגילים נמצאים בחלק השני (שנקרא "פתרונות"). תרגילים שמיועדים להעמקת הידע מסומנים בכוכבית (*). אחד מפרקי הספר מוקדש לשימוש בסימטריה בחישובי אינטגרלים רב-ממדיים. נושא זה מיועד לסטודנטים שלומדים פיזיקה ולפי דרישות הקורס צריכים לדעת להשתמש בסימטריה של בעיה כדי לכתוב אינטגרל חד-ממדי במקום אינטגרל משולש. הספר, בנוסף לתרגילים מקוריים, כולל גם שאלות המופיעות באוספי תרגילים ידועים. הרשימה הביבליוגרפית הובאה בסוף הספר.

המחבר מקווה שהספר יעזור לסטודנטים בלימודי אינפי-2 (חדו"א-2) ויהיה יעיל גם למרצים ומתרגלים.

כל ההערות ותגובות יתקבלו בתודה בכתובת דוא"ל jacobr@hit.ac.il .

תוכן עניינים

תרגילים

פתרונות

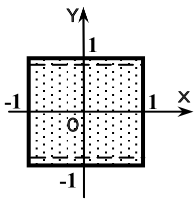
תרגילים,

הגדרות, משפטים ונוסחאות

1. מושגים יסודיים

הגדרה: פונקציה של n משתנים $y=f\left(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)$ היא כלל, שמתאים לכל נקודה $\left(x_1,x_2,x_3,\ \ldots,\ x_n\right)$ בתחום D של המרחב ה-n- ממדי R^n ערך ממשי אחד של המשתנה y.
במקרה הזה: קואורדינטות הנקודה $x_1,x_2,x_3,\ \ldots,\ x_n$ הן משתנים בלתי תלויים, y- הוא משתנה תלוי (ערך הפונקציה), D הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
במקרה פרטי, כאשר z היא פונקציה של שני משתנים $z=f\left(x,y\right)$, תחום ההגדרה D הוא חלק של המישור XY.

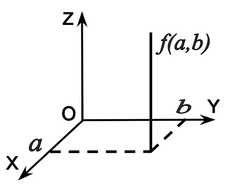
דוגמה 1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $z=\sqrt{1-|x|}+\ln\left(1-|y|\right)$ ושרטט אותו במישור XY.



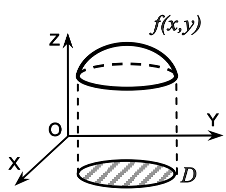
פתרון: $z=\sqrt{1-|x|}+\ln\left(1-|y|\right)\ \Rightarrow$

$$\begin{cases}1-|x|\ge 0 & \Rightarrow\ |x|\le 1\ \Rightarrow\ -1\le x\le 1\\ 1-|y|>0 & \Rightarrow\ |y|<1\ \Rightarrow\ -1<y<1\end{cases}$$ וגם

תחום ההגדרה של הפונקציה: $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|-1\le x\le 1\ ,\ -1<y<1\right\}$. מבחינה גיאומטרית D הוא תחום ריבועי במישור XY כך, שעבור כל הנקודות מתקיים: $-1\le x\le 1\ ,\ -1<y<1$ (לא כולל הצלעות $y=1\ ,\ y=-1$).

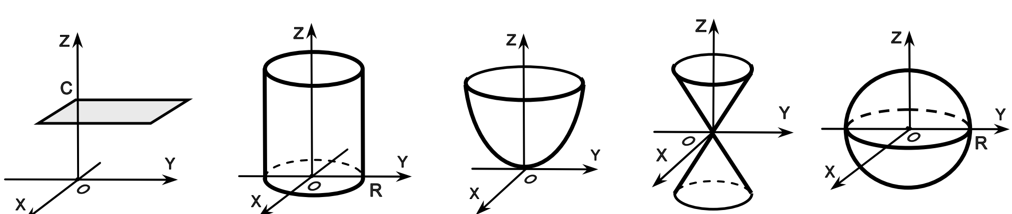


ערך הפונקציה $z=f\left(x,y\right)$ בנקודה $\left(a,b\right)$ $\left(z=f\left(a,b\right)\right)$ הוא קטע שמעונך למישור XY (מקביל לציר ה-Z). אם הפונקציה $z=f\left(x,y\right)$ מוגדרת בתחום D, אז אוסף של כל הנקודות בעלות הקואורדינטות $\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)$ הוא גרף הפונקציה (משטח במרחב תלת-מימדי R^3).



משוואות המשטחים השימושיים ביותר: משוואת המישור (משוואה לינארית): $Ax+By+Cz+D=0$. למשל: $6x-3y+2z-12=0$ או בצורה $z=-3x+\frac{3}{2}y+6$. משוואה של מישור שמעונך לציר ה-Z: $z=C$.

משוואה של גליל ישר: $x^2+y^2=R^2$, משוואה של פרבולואיד: $z=x^2+y^2$, משוואה של חרוט $z^2=x^2+y^2$, משוואה של ספרה (sphere, מעטפת של כדור): $x^2+y^2+z^2=R^2$.



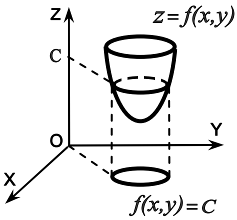
$z=C$ $\quad x^2+y^2=R^2$ $\quad z=x^2+y^2$ $\quad z^2=x^2+y^2$ $\quad x^2+y^2+z^2=R^2$

כאשר נחתכים שני משטחים, למשל מישור $Ax+By+Cz+D=0$ עם גרף הפונקציה $z=f\left(x,y\right)$, מתקבל קו החיתוך (במרחב תלת-מימדי). אם נציב $z=-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y-\frac{D}{C}$ במשוואה $z=f\left(x,y\right)$, נקבל משוואה בלי z, ז"א משוואת ההיטל של קו החיתוך על המישור XY. לדוגמה: אם המישור $z=1-2x-2y$ חותך את גרף הפונקציה $z=3-x^2-y^2$ (פרבולואיד), אז מתקבל קו החיתוך

במרחב תלת ממדי ומשוואת ההיטל של הקו על המישור XY נוכל למצוא על ידי ההצבה:

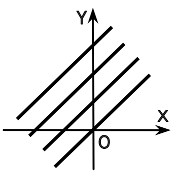
$$1-2x-2y=3-x^2-y^2 \;\Rightarrow\; x^2-2x+y^2-2y=2 \;\Rightarrow\; \left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)=4 \;\Rightarrow$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4 \;\Rightarrow$$ (מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(1,1)$)



הגדרה: העקום $f(x,y)=C$ נקרא קו הגובה של הפונקציה $z=f(x,y)$ המתאים לערך של C. מבחינה גיאומטרית קו הגובה הוא קו החיתוך של גרף הפונקציה $z=f(x,y)$ עם המישור $z=C$, ו- $f(x,y)=C$ היא משוואת ההיטל של קו החיתוך הנ"ל על המישור XY.

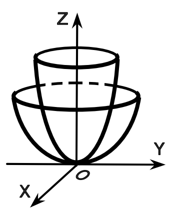
באופן דומה: אם u היא פונקציה של שלושה משתנים $u=f(x,y,z)$ אז המשטח $f(x,y,z)=C$ נקרא משטח הרמה של הפונקציה u המתאים לערך של C (משטח, שבכל נקודה שלו ערך הפונקציה שווה ל-C).



דוגמה 2. מצא את קווי הגובה של הפונקציה $z=\sqrt{y-x}$.

פתרון: $z=\sqrt{y-x} \;\Rightarrow\; C=\sqrt{y-x} \;\Rightarrow\; y-x=C^2 \;\Rightarrow\; y=x+C^2$

קווי הגובה הם ישרים מקבילים (החל מ- $y=x$ "ומעלה").



דוגמה 3. מצא את משטחי הרמה של הפונקציה $(z>0)$ $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

פתרון: $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}\;(z>0) \Rightarrow C=\dfrac{z}{x^2+y^2}\;(C>0)\,,\; z=C\left(x^2+y^2\right)$

כל משטח רמה הוא פרבולואיד (לא כולל הנקודה $(0,0,0)$).

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ושרטט אותו במערכת צירים:

1) $z=\sqrt{y-5}\,e^{x/(y-5)}$

2) $z=\begin{cases}\dfrac{\arctan(x-y)}{\sqrt{4-y^2}}, & y\neq -2\\ 0, & y=-2\end{cases}$

3) $z=\dfrac{\left(x^2+y^2-9\right)^{xy}}{x^2+y^2}$

4) $z=\dfrac{\sqrt{y}}{x^2+1}\sqrt[6]{36-4x^2-9y^2}$

5) $z=\sqrt{\dfrac{9-x^2-y^2}{x}}+\ln x$

6) $z=\dfrac{\sqrt{16-x^2-4y^2}}{1+\left|\arcsin y\right|}$

7) $z=\ln\ln(x-y)$

8) $z=\sqrt{-\left|x^2-y^2-4\right|}$

מצא את קווי הגובה (משטחי הרמה) של הפונקציה:

9) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$

10) $z=\sqrt{xy}$

11) $z=e^{y-x^2}$

12) $z=\arctan(y-x)$

13) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

14) $u=z-x^2-y^2$

15) $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\;(z>0)$

2. גבול ורציפות של פונקציה של משתנים אחדים

תהי $z=f(x,y)$ פונקציה שמוגדרת בתחום D ו- $M_0(a,b)$ היא נקודה שבכל סביבה שלה, קטנה ככל שיהיה, קיימת לפחות נקודה אחת השייכת לתחום D (ז"א M_0 היא "נקודת הצטברות").

הגדרה (בלשון ε-δ): המספר L הוא גבול של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(a,b)$, אם עבור כל $\varepsilon>0$, קטן ככל שיהיה, קיים $\delta>0$ כך, שמתקיים $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ כאשר $|x-a|<\delta$, $|y-b|<\delta$.

ההגדרה האקוויוולנטית של גבול הפונקציה **בלשון הסדרות**:

המספר L הוא גבול של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(a,b)$, אם עבור כל סדרת הנקודות $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ $(M_i\in D)$ המתכנסת לנקודה M_0, הסדרה המתאימה של ערכי הפונקציה $f(M_1), f(M_2), f(M_3), \dots, f(M_n), \dots$ מתכנסת ל- L. ורושמים:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=L \quad \text{או} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \quad \text{או} \quad f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} L$$

נדגיש שגבול הפונקציה בנקודה M_0 קיים רק אם הוא **לא תלוי** במסלול ההתקרבות ל- M_0.

דוגמה 1. הוכח שהגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$ לא קיים.

פתרון: נבחר בתור מסלול ההתקרבות לנקודה $(0,0)$ את הישר $y=kx$ ונקבל אחרי ההצבה:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}=\left|y=kx\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+kx}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1+k)}=\frac{1}{1+k}$$

הגבול לא קיים כי הוא תלוי בפרמטר k ז"א במסלול ההתקרבות לנקודה $(0,0)$.

כדי לחשב גבול של פונקציה אפשר להשתמש בהערכת ערכי הפונקציה בסביבת נקודת הצטברות:

דוגמה 2. חשב את הגבול: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^2+y^2}$.

פתרון: $0\le\left|\dfrac{x^5}{x^2+y^2}\right|\le\left|\dfrac{x^5}{x^2}\right|=|x|^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. לפי משפט "סנדוויץ'" מגיעים למסקנה שהגבול המבוקש שווה ל-0. ניתן לחשב את הגבול גם באמצעות המעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^5}{x^2+y^2}=\left|\begin{matrix} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{matrix}\right|=\lim_{r\to 0}\frac{r^5\cos^5\varphi}{r^2}=\lim_{r\to 0} r^3\cos^5\varphi \;,\; 0\le\left|r^3\cos^5\varphi\right|\le\left|r^3\right|\xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

משתמשים בחישוב גבולות כדי לבדוק רציפות של פונקציה בנקודה.

הגדרה: תהי $z=f(x,y)$ פונקציה, שמוגדרת בתחום D ו- $M_0(a,b)\in D$. הפונקציה $f(x,y)$ רציפה בנקודה $M_0(a,b)$, אם מתקיים $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$.

א. חישוב גבול של פונקציה

חשב את הגבול הנתון או הוכח שהוא לא קיים:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$ **2)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+2y^2-3xy}{x^2+3y^2}$ **3)** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to \infty}} \left(1+\dfrac{x}{y}\right)^y$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)\cos\frac{1}{xy}$ 5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(2xy)}{y}$ 6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{xy}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^2}{x^3+y^3}$ 9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln\left(1+3y^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$ 11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ 12) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 3}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

13) $\lim\limits_{\substack{x\to +0\\ y\to +0}} \frac{x^3+2y^3-x}{\sqrt{y^6+x^2}}$ 14) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 15) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4}{x^2+y^2}$

16) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\tan\left(x^3+y^3\right)}{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}$ 17) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\tan xy}{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}$

18) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^5-\cos\left(2x^2+2y^2\right)+1}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ 19) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

20*) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^5-x^2y^3}{x^4+y^4}$ 21*) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4-x^3y-xy^3+y^4}{\sqrt{x^6+y^6}}$ 22*) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

ב. רציפות של פונקציה

בדוק את רציפות הפונקציה הנתונה $z=f(x,y)$ בנקודה $(0,0)$:

1) $z=\begin{cases}\frac{x^4+y^5}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 2) $z=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{y}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

3) $z=\begin{cases}\frac{2x+y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 4) $z=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^6+y^3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

5) $z=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{y}\sin\left(x^2\right)}{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 6) $z=\begin{cases}\frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

7) בדוק את רציפות הפונקציה הנתונה $f(x,y)$ בנקודה $(1,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}, & (x,y)\neq(1,0)\\ 2, & (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

3. נגזרות חלקיות ודיפרנציאביליות של פונקציות של משתנים אחדים

נגזרת חלקית של פונקציה של מספר משתנים $y=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n\right)$ מוגדרת כנגזרת רגילה של פונקציה של משתנה אחד x_i כאשר כל המשתנים האחרים נחשבים כפרמטרים קבועים. למשל עבור פונקציה של 2 משתנים $z=f(x,y)$ הנגזרות החלקיות בנקודה (x,y) לפי ההגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\quad,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

כאשר $x,y,x+\Delta x,y+\Delta y$ שייכים לתחום ההגדרה. משתמשים גם בסימונים: $f'_x\,,f'_y$ או $z'_x\,,z'_y$.

דוגמה 1. מצא את הנגזרות החלקיות של הפונקציה $u=x^2y^3+xz^2$.

פתרון: $u'_x=2xy^3+z^2\quad,\quad u'_y=3x^2y^2\quad,\quad u'_z=2xz$

נגזרות חלקיות של פונקציה יכולות להיות קיימות גם בנקודה, שבה הפונקציה לא רציפה.

דוגמה 2. הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$ לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

חשב (לפי ההגדרה) את הנגזרת החלקית $f'_x(0,0)$.

פתרון: $$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot 0}{\Delta x^2+0}-0}{\Delta x}=0$$

פונקציה מקבלת תוספת שלמה כאשר כל המשתנים שלה מקבלים תוספות. למשל התוספת השלמה Δz של פונקציה של שני משתנים $z=f(x,y)$ היא: $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$.

אם התוספת Δz ניתנת להצגה בצורה $\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+\varepsilon\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$,

כאשר $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon=0$ אז $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x,y) והחלק העיקרי של Δz:

$dz=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$ (או $dz=f'_x\,dx+f'_y\,dy$) נקרא "הדיפרנציאל השלם".

פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה רק אם היא רציפה בנקודה זאת. אם לפונקציה רציפה בנקודה יש נגזרות חלקיות רציפות, אז היא דיפרנציאבילית בנקודה (התנאי המספיק). אם הנגזרות לא רציפות, אז אפשר לבדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה לפי ההגדרה.

דוגמה 3. בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הרציפה $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$ בנקודה $(0,0)$.

פתרון: נמצא את הנגזרות החלקיות ואת תוספת הפונקציה בנקודה $(0,0)$ ונביע ε (לפי ההגדרה):

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x^2\cdot 0}{\Delta x^2+0}-0}{\Delta x}=0\quad,\quad f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot\Delta y}{0+\Delta y^2}-0}{\Delta y}=0\quad,\quad \Delta z=\frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

מהתנאי: $\dfrac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\varepsilon\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ נקבל: $\varepsilon=\dfrac{\Delta x^2\Delta y}{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^{3/2}}$.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x^2\Delta y}{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^{3/2}}=\left|\Delta y=k\,\Delta x\right|=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{k\,\cancel{\Delta x^3}}{\left(1+k^2\right)\cancel{\Delta x^3}}=\frac{k}{1+k^2}\neq 0$$

הגבול שונה מ-0. לכן הפונקציה לא דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

15. אינטגרל משולש בקואורדינטות קרטזיות

הגדרה: תהי $f(x,y,z)$ פונקציה שמוגדרת בתחום חסום וסגור V במרחב תלת-מימדי. נחלק באופן כלשהו את התחום ל-n תתי-תחום ΔV_i $(1 \le i \le n)$. נסמן: d_i - המרחק הגדול ביותר בין 2 נקודות על שפת ΔV_i ו- $d_{max} = \max\{d_i\}$. בכל תת-תחום ΔV_i נבחר באקראי נקודה (x_i, y_i, z_i) ונחשב את המכפלה $f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$. הסכום $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ נקרא "סכום אינטגרלי" עבור הפונקציה $f(x,y,z)$ בתחום V. אם קיים גבול סופי $I = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ d_{max}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ שלא תלוי באופן החלוקה של התחום V ובאופן הבחירה של הנקודות (x_i, y_i, z_i), אז אומרים שהפונקציה $f(x,y,z)$ אינטגרבילית בתחום V, הגבול I נקרא האינטגרל המשולש של הפונקציה $f(x,y,z)$ ומסמנים:

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_{max}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \iiint_V f(x,y,z)\,dV = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz \,.$$

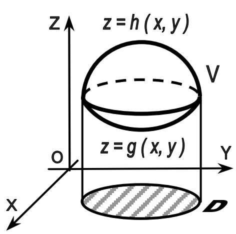
יישומים של אינטגרל משולש

באמצעות האינטגרל המשולש ניתן לחשב נפח של גוף (נפח של התחום V במרחב תלת-מימדי):

$$V = \iiint_V dV = \iiint_V dxdydz \quad \text{(נפח התחום V)}$$

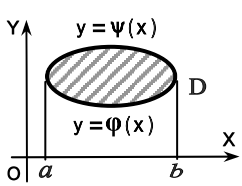
אם התחום V מייצג גוף במרחב תלת-מימדי והפונקציה הרציפה $f(x,y,z)$ היא צפיפות נפחית של חומר הגוף, אז האינטגרל המשולש של $f(x,y,z)$ שווה למסת הגוף:

$$\text{(מסה של גוף)} = m = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$$



חישוב של אינטגרל משולש

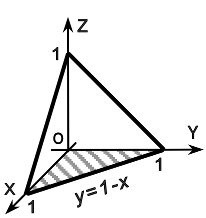
תהי $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה שמוגדרת בתחום V שמוגבל על-ידי שני המשטחים $z = g(x,y)$ ו- $z = h(x,y)$. אם היטל התחום V על המישור XY (תחום מישורי D) כלוא בין שני הקווים: $y = \varphi(x)$ ו- $y = \psi(x)$ כאשר $a \le x \le b$, אז מחשבים את האינטגרל המשולש של הפונקציה $f(x,y,z)$ באמצעות האינטגרל החוזר:

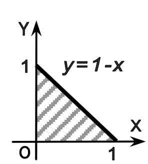


$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

דוגמה. חשב את האינטגרל $\iiint_V (x+y+2z)\,dxdydz$ כאשר התחום V מוגבל על-ידי המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

פתרון.





$$\iiint_V (x+y+2z)\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+2z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(xz + yz + z^2\right)\Big|_0^{1-x-y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left((1-x)y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x} = \int_0^1 dx \left((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = -\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

קבע את גבולות האינטגרציה עבור האינטגרל $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ ורשום אותו כאינטגרל חוזר כאשר תחום האינטגרציה V מוגבל על-ידי המשטחים:

1) $y=0\ ,\ z=0\ ,\ x=2\ ,\ z=5\ ,\ y=2x$

2) $y=0\ ,\ z=0\ ,\ x=3\ ,\ y=4\ ,\ z=3x$

3) $z=0\ ,\ x^2+y^2+z^2=1\ (z\ge 0)$

4) $x=0\ ,\ z=0\ ,\ x+y+z=2\ ,\ y=\sqrt{x}$

5) $z=1\ ,\ z^2=x^2+y^2$

6) $y=1\ ,\ y^2=x^2+z^2$

7) $z=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ x^2+y^2+z^2=8$
(כך שהנקודה $(0,0,1)$ בתוך התחום)

8) $x=0\ ,\ z=0\ ,\ z=1\ ,\ x^2+y^2=1\ ,\ (x\ge 0)$

9) $x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0\ ,\ x+y=1\ ,\ z=x^2+y^2$

10) $y=x-1\ ,\ y=1-x\ ,\ z=0\ ,\ x=0\ (x\ge 0)\ ,\ z=1-x^2-y^2$

11) $z=0\ ,\ z=4-x^2-y^2\ ,\ x^2+y^2=2x$
(כך שהנקודה $(1,0,0)$ בתוך התחום)

חשב:

12) $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$

13) $I=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} dy\int\limits_0^{\sqrt{x-y^2}} xdz$

חשב את האינטגרל כאשר תחום האינטגרציה V מוגבל על-ידי משטחים נתונים:

14) $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz \qquad V: x=0\ ,\ x=a\ ,\ y=0\ ,\ y=a\ ,\ z=0\ ,\ z=a$

15) $\iiint\limits_V x\,dxdydz \qquad V: x=0\ ,\ y=0\ ,\ y=3\ ,\ z=0\ ,\ x+z=2$

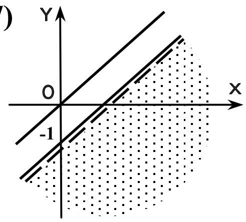
16) $\iiint\limits_V z\,dxdydz \qquad V: x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0\ ,\ x+y+z=a$

17) $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz \qquad V: x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0\ ,\ x^2+y^2+z^2=1\ (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$

18) $\iiint\limits_V (1-x-y)dxdydz \qquad V: x=0\ ,\ y=0\ ,\ x+y+z=1\ ,\ x+y-z=1$

19) $\iiint\limits_V \cos(x^6)y^2z\,dxdydz \qquad V: z=0\ ,\ x=1\ ,\ y=x\ ,\ z=\sqrt{xy}\ (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$

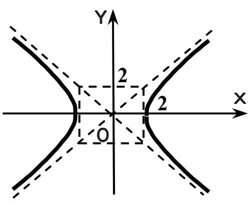
20) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z)^3} \qquad V: x=1\ ,\ x=2\ ,\ y=1\ ,\ y=2\ ,\ z=1\ ,\ z=2$

7) 

$$z=\ln\ln(x-y)\ \Rightarrow\ \begin{cases}x-y>0\\ \ln(x-y)>0\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}y<x\\ \ln(x-y)>\ln 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}y<x\\ x-y>1\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}y<x\\ y<x-1\end{cases}$$

תחום ההגדרה: כל הנקודות מתחת לקו $y=x-1$ (לא כולל נקודות הקו).

8) 

$$z=\sqrt{-\left|x^2-y^2-4\right|}\ \Rightarrow\ -\left|x^2-y^2-4\right|\ge 0\ \Rightarrow$$

$$x^2-y^2-4=0\ \Rightarrow\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$$

הפונקציה מוגדרת רק על נקודות ההיפרבולה.

9) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)\ \Rightarrow\ \ln\left(x^2+y^2\right)=C\ \Rightarrow\ x^2+y^2=e^C$

קווי גובה הם מעגלים (רדיוס המעגל שווה ל- $\sqrt{e^C}=e^{C/2}$).

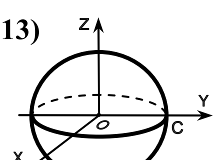
10) $z=\sqrt{xy}\ \Rightarrow\ \sqrt{xy}=C\ \ (C\ge 0)\ \Rightarrow\ y=\dfrac{C^2}{x}\ \Rightarrow$ (קווי גובה הם היפרבולות)

11) $z=e^{y-x^2}\ \Rightarrow\ e^{y-x^2}=C\ \ (C>0)\ \Rightarrow\ y-x^2=\ln C\ \Rightarrow\ y=x^2+\ln C$

קווי גובה הם פרבולות.

12) $z=\arctan(y-x)\ \Rightarrow\ \arctan(y-x)=C\ \ (-\pi/2<C<\pi/2)\ \Rightarrow$

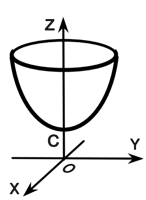
$y-x=\tan C\ \Rightarrow\ y=x+\tan C\ \Rightarrow$ (קווי גובה הם ישרים)

13) 

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \Rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}=C\ \ (C\ge 0)\ \Rightarrow$$

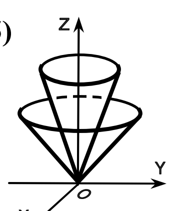
$$x^2+y^2+z^2=C^2$$

כל משטח רמה הוא ספרה (sphere – מעטפת של כדור).
רדיוס ספרה שווה ל-C.

14) 

$$u=z-x^2-y^2\ \Rightarrow\ z-x^2-y^2=C\ \Rightarrow\ z=x^2+y^2+C$$

כל משטח רמה הוא פרבולואיד. קדקוד הפרבולואיד נמצא בנקודה $(0,0,C)$.

15) 

$$u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \ (z>0)\ \Rightarrow\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C\ \ (C>0)\ \Rightarrow$$

$$z=C\sqrt{x^2+y^2}$$

כל משטח רמה הוא חרוט (לא כולל הנקודה $(0,0,0)$). כאשר C הולך וקטן, החרוט נעשה יותר "רחב".

13) $z=\left(x^2-2y^2\right)e^{x-y}$

$$\begin{aligned}z'_x&=2xe^{x-y}+\left(x^2-2y^2\right)e^{x-y}=e^{x-y}\left(x^2-2y^2+2x\right)\\ z'_y&=-4ye^{x-y}-\left(x^2-2y^2\right)e^{x-y}=-e^{x-y}\left(x^2-2y^2+4y\right)\end{aligned}\;\Rightarrow\;\begin{cases}x^2-2y^2+2x=0\\ x^2-2y^2+4y=0\end{cases}(-)$$

$$2x-4y=0\;\Rightarrow\;x=2y\;\Rightarrow\;4y^2-2y^2+4y=0\;\Rightarrow\;\begin{array}{ll}y=0\;,\;x=0 & \Rightarrow A(0,0)\\ y=-2\;,\;x=-4 & \Rightarrow B(-4,-2)\end{array}$$

$$\begin{aligned}z''_{xx}&=e^{x-y}\left(x^2-2y^2+2x\right)+e^{x-y}\left(2x+2\right)=e^{x-y}\left(x^2-2y^2+4x+2\right)\\ z''_{xy}&=-e^{x-y}\left(x^2-2y^2+2x\right)-4e^{x-y}y=-e^{x-y}\left(x^2-2y^2+2x+4y\right)\\ z''_{yy}&=e^{x-y}\left(x^2-2y^2+4y\right)+e^{x-y}\left(4y-4\right)=e^{x-y}\left(x^2-2y^2+8y-4\right)\end{aligned}$$

$$z''_{xx}\Big|_A=2\;,\;z''_{xy}\Big|_A=0\;,\;z''_{yy}\Big|_A=-4\;\Rightarrow\;\Delta_A=\begin{vmatrix}2&0\\0&-4\end{vmatrix}<0$$

אין אקסטרמום בנקודה A.

$$z''_{xx}\Big|_B=-6/e^2\;,\;z''_{xy}\Big|_B=8/e^2\;,\;z''_{yy}\Big|_B=-12/e^2\;\Rightarrow\;\Delta_B=\begin{vmatrix}-6/e^2&8/e^2\\8/e^2&-12/e^2\end{vmatrix}=\frac{8}{e^4}>0$$

B היא נקודת מקסימום כי $z''_{xx}<0$. ערך הפונקציה המקסימלי: $z_{max}=z(B)=8/e^2$

14) $z=y\sqrt{x}\left(5-x-y\right)\;,\;x>0$

$$\begin{aligned}z'_x&=\frac{y}{2\sqrt{x}}\left(5-x-y\right)-y\sqrt{x}=\frac{y}{2\sqrt{x}}\left(5-3x-y\right)\\ z'_y&=\sqrt{x}\left(5-x-2y\right)\;,\;\left(x>0\right)\end{aligned}\;\Rightarrow\;\begin{cases}y\left(5-3x-y\right)=0\\ 5-x-2y=0\end{cases}$$

$$a)\begin{cases}y=0\\5-x-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}x=5\\y=0\end{array}\Rightarrow A(5,0),\quad b)\begin{cases}5-3x-y=0\\5-x-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}x=1\\y=2\end{array}\Rightarrow B(1,2)$$

$$z''_{xx}=\frac{y}{2}\cdot\frac{-3\sqrt{x}-\left(5-3x-y\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\frac{y\left(3x-y+5\right)}{4x\sqrt{x}}\;,\quad z''_{xy}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(5-3x-2y\right)\;,$$

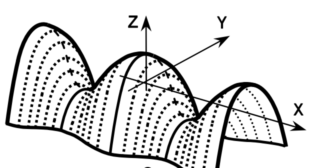
$$z''_{yy}=-2\sqrt{x}\;\Rightarrow\;z''_{xx}\Big|_A=0,\;z''_{xy}\Big|_A=-\sqrt{5},\;z''_{yy}\Big|_A=-2\sqrt{5},\;\Delta_A=\begin{vmatrix}0&-\sqrt{5}\\-\sqrt{5}&-2\sqrt{5}\end{vmatrix}<0$$

אין אקסטרמום בנקודה A .

$$z''_{xx}\Big|_B=-\frac{3}{2},\;z''_{xy}\Big|_B=-1\;,\;z''_{yy}\Big|_B=-2\;\Rightarrow\;\Delta_B=\begin{vmatrix}-3/2&-1\\-1&-2\end{vmatrix}=3-1>0,\;z''_{xx}=-\frac{3}{2}<0$$

B היא נקודת מקסימום וערך הפונקציה המקסימלי: $z_{max}=z(B)=4$.

15a) $z=\cos x-y^2$



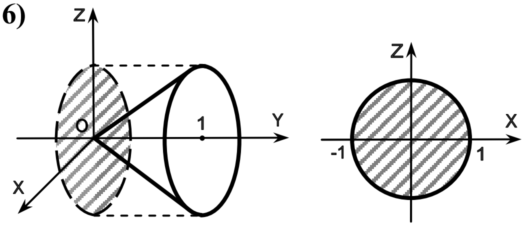
$z = \cos x - y^2$

$$\begin{aligned}z'_x&=-\sin x\\ z'_y&=-2y\end{aligned}\;\Rightarrow\;\begin{cases}\sin x=0\;\Rightarrow\;x=\pi k\\ y=0\end{cases}\;\Rightarrow\;A_k\left(\pi k,0\right)$$

קיימות אינסוף נקודות קריטיות כאשר $k=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

$$z''_{xx}=-\cos x\;,\;z''_{xy}=0\;,\;z''_{yy}=-2\;\Rightarrow$$

6)

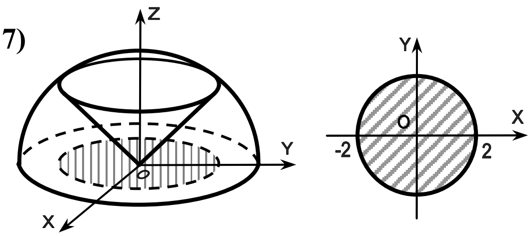


$$y=1\ ,\ y^2=x^2+z^2$$

$$\begin{cases} y=\sqrt{x^2+z^2} \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+z^2=1 \\ z=\pm\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dz\int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{1}f(x,y,z)dy$$

7)



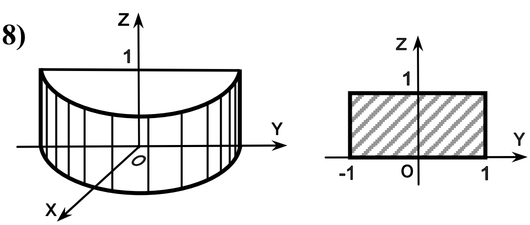
$$z=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ x^2+y^2+z^2=8$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$2\left(x^2+y^2\right)=8 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=\pm\sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

$$I=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}}f(x,y,z)dz$$

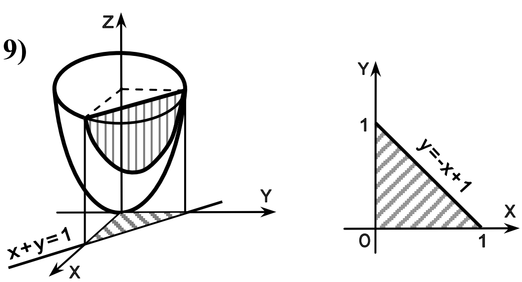
8)



$$x=0\ ,\ z=0\ ,\ z=1\ ,\ x^2+y^2=1$$
$$(x\geq 0)$$

$$I=\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{1}dz\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y,z)dx$$

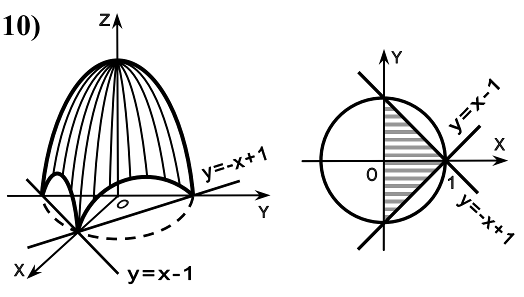
9)



$$x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0\ ,\ x+y=1\ ,$$
$$z=x^2+y^2$$

$$I=\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x}dy\int_{0}^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz$$

10)

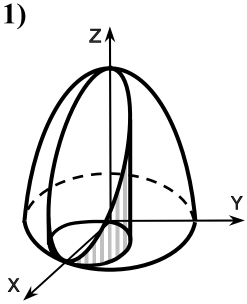


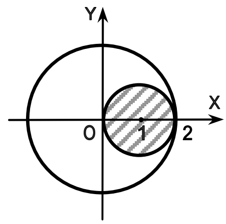
$$y=x-1\ ,\ y=1-x\ ,\ z=0\ ,\ x=0$$
$$(x\geq 0)\ ,\ z=1-x^2-y^2$$

$$\begin{cases} z=1-x^2-y^2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow\ x^2+y^2=1$$

$$I=\int_{0}^{1}dx\int_{x-1}^{1-x}dy\int_{0}^{1-x^2-y^2}f(x,y,z)dz$$

11)





$$z=0\ ,\ \ z=4-x^2-y^2\ ,\ x^2+y^2=2x$$

$$x^2+y^2=2x \quad\Rightarrow\quad y=\pm\sqrt{2x-x^2}$$

$$\begin{cases} z=4-x^2-y^2 \\ z=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=4$$

$$I=\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^{4-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz$$

12) $I=\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$

$$I=\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2-z^2}}=$$

$$=\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\left(\arcsin\frac{z}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)=\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\left(\arcsin 1-\arcsin 0\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy=\frac{\pi}{2}\int_0^1 dx\left(y\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{\pi}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c} x=\sin t,\ dx=\cos t\,dt \\ 0\le t\le \pi/2 \end{array}\right|=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{\pi}{4}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{8}$$

13) $I=\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{x-y^2}} x\,dz$

$$I=\int_0^2 x\,dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{x-y^2}} dz=\int_0^2 x\,dx \int_0^{\sqrt{x}} dy\left(z\Big|_0^{\sqrt{x-y^2}}\right)=\int_0^2 x\,dx \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{x-y^2}\,dy=$$

$$=\left|\begin{array}{c} y=\sqrt{x}\sin t,\ dy=\sqrt{x}\cos t\,dt \\ 0\le t\le \pi/2 \end{array}\right|=\int_0^2 x^2\,dx \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx \int_0^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}\int_0^2 x^2\,dx=\frac{\pi}{12}\left(x^3\Big|_0^2\right)=\frac{2\pi}{3}$$

4) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}\ ,\ x_0=0$

נשתמש בפיתוח הפונקציה $\dfrac{1}{1-x}$ לטור חזקות בסביבת $x_0=0$ ונציב במקום x את x^2 :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots \qquad -1<x<1 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^2\right)^3+\ldots+\left(x^2\right)^n+\ldots$$

צריך להתקיים $-1<x^2<1$. מכאן $-1<x<1$. לכן

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2n}+\ldots \qquad -1<x<1$$

5) $f(x)=\cosh\dfrac{x}{2}\ ,\ x_0=0$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad -\infty<x<\infty \qquad \Rightarrow$$

$$\cosh\frac{x}{2}=1+\frac{(x/2)^2}{2!}+\frac{(x/2)^4}{4!}+\frac{(x/2)^6}{6!}+\ldots+\frac{(x/2)^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad -\infty<\frac{x}{2}<\infty$$

$$\cosh\frac{x}{2}=1+\frac{x^2}{2^2\,2!}+\frac{x^4}{2^4\,4!}+\frac{x^6}{2^6\,6!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!}+\ldots \qquad -\infty<x<\infty$$

6) $f(x)=e^{-2x}\ ,\ x_0=-1$

יש למצוא פיתוח של $f(x)$ לפי חזקות של $x-x_0=x+1$. נשתמש בפיתוח של e^x לטור מקלורן ובהצבה $x+1=t$:

$$e^{-2x}=\begin{vmatrix}x+1=t\\ x=t-1\end{vmatrix}=e^{-2(t-1)}=e^2e^{-2t}=e^2\left[1+(-2t)+\frac{(-2t)^2}{2!}+\frac{(-2t)^3}{3!}+\frac{(-2t)^4}{4!}+\ldots\right]=$$

$$=e^2\left[1-2t+\frac{2^2t^2}{2!}-\frac{2^3t^3}{3!}+\frac{2^4t^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^nt^n}{n!}+\ldots\right] \qquad -\infty<-2t<\infty \qquad \Rightarrow$$

$$e^{-2x}=e^2\left[1-2(x+1)+\frac{2^2(x+1)^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^n(x+1)^n}{n!}+\ldots\right] \qquad -\infty<x<\infty$$

נעיר, שאפשר לעשות את הפיתוח הנדרש בלי להשתמש בהצבה:

$$e^{-2x}=e^{-2(x+1-1)}=e^2e^{-2(x+1)}=$$

$$=e^2\left[1+\left(-2(x+1)\right)+\frac{\left(-2(x+1)\right)^2}{2!}+\frac{\left(-2(x+1)\right)^3}{3!}+\frac{\left(-2(x+1)\right)^4}{4!}+\ldots\right] \qquad \Rightarrow$$

$$e^{-2x}=e^2\left[1-2(x+1)+\frac{2^2(x+1)^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^n(x+1)^n}{n!}+\ldots\right] \qquad -\infty<x<\infty$$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ ,\ x_0=2$

יש לפתח את הפונקציה הנתונה לטור לפי חזקות של $x-2$. נשתמש בטור:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots \qquad -1<x<1 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2+x-2}=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{x-2}{2}\right)+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots\right]$$

$$-1<\frac{x-2}{2}<1 \qquad \Rightarrow \qquad -2<x-2<2 \qquad \Rightarrow \qquad 0<x<4$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\frac{(x-2)^3}{2^4}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+\ldots \qquad 0<x<4$$

8) $f(x)=\dfrac{1}{x-7}\ ,\ x_0=4$

יש לפתח את הפונקציה לטור לפי חזקות של $x-4$. נשתמש בטור:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots \qquad -1<x<1 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x-7}=-\frac{1}{3-(x-4)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-4}{3}}=-\frac{1}{3}\left[1+\frac{x-4}{3}+\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+\left(\frac{x-4}{3}\right)^3+\ldots\right]$$

$$-1<\frac{x-4}{3}<1 \qquad \Rightarrow \qquad -3<x-4<3 \qquad \Rightarrow \qquad 1<x<7$$

$$\frac{1}{x-7}=-\frac{1}{3}-\frac{x-4}{3^2}-\frac{(x-4)^2}{3^3}-\frac{(x-4)^3}{3^4}-\ldots-\frac{(x-4)^n}{3^{n+1}}-\ldots \qquad 1<x<7$$

9) $f(x)=3^x5^{-x}\ ,\ x_0=0$

$$3^x5^{-x}=\left(\frac{3}{5}\right)^x=(0.6)^x=e^{\ln(0.6)^x}=e^{x\ln 0.6}=$$

$$=1+(x\ln 0.6)+\frac{(x\ln 0.6)^2}{2!}+\frac{(x\ln 0.6)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x\ln 0.6)^n}{n!}+\ldots \qquad -\infty<x\ln 0.6<\infty$$

$$3^x5^{-x}=1+\ln 0.6\,x+\frac{(\ln 0.6)^2}{2!}x^2+\frac{(\ln 0.6)^3}{3!}x^3+\ldots+\frac{(\ln 0.6)^n}{n!}x^n+\ldots \qquad -\infty<x<\infty$$

10) $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}\ ,\ x_0=0$

$$\frac{x}{9+x^2}=\frac{x}{9}\cdot\frac{1}{1+(x/3)^2}=\frac{x}{9}\left[1-\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^4-\left(\frac{x}{3}\right)^6+\ldots\right]=\frac{x}{3^2}-\frac{x^3}{3^4}+\frac{x^5}{3^6}-\frac{x^7}{3^8}+\ldots$$