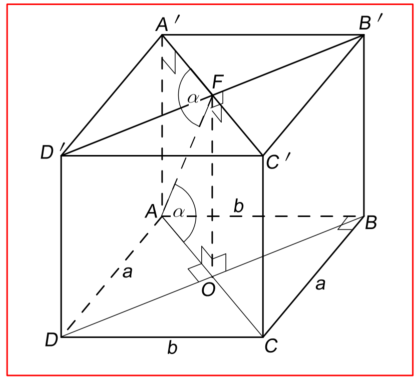
12. א.



$$AC = \sqrt{a^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad AO = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = A'F$$

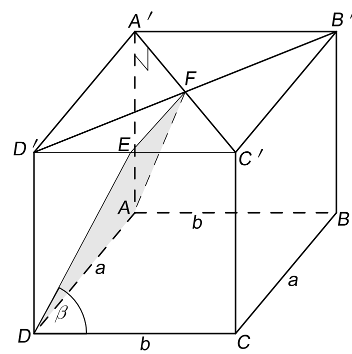
$$\underline{\triangle FOA:}\ \frac{h}{AO} = tg\ \alpha \quad \Rightarrow \quad h = AO\ tg\ \alpha$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{h = \frac{tg\ \alpha \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$ **(יחידות אורך)**

ב.

קו החיתוך בין המישורים $DEFA$ ו־$ABCD$ הוא AD . מתקיים: $AD \perp DC$ וכן: $AD \perp DE$

הסבר: $AD \perp CDD'C'$, בפרט: $AD \perp DE$ לכן הזווית המבוקשת היא: $\angle EDC$ (β)

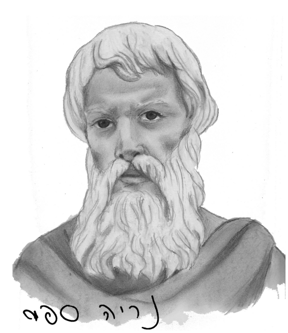


$$\angle CDD' = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle EDD' = 90^\circ - \beta$$

$$\underline{\triangle DD'E:}\ \cot(90^\circ - \beta) = \frac{DD'}{D'E} = \frac{tg\ \alpha \sqrt{a^2+b^2}}{2} : \frac{b}{2}$$

$$\cot(90^\circ - \beta) = tg\ \beta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{tg\ \beta = \frac{tg\ \alpha \sqrt{a^2+b^2}}{b}}$$

אֶוּקְלִידֶס



הגאומטריה האוקלידית נקראת כך על שם **אֶוּקְלִידֶס** 330–275 לפנה"ס. מתמטיקאי יווני שחי באלכסנדריה שבמצרים ויִסד שם בית ספר. אחד מגדולי המתמטיקה היוונית. חִבּורו הגדול נקרא ספר 'היסודות' הכולל 13 כרכים בהם ביסס את הגאומטריה כמדע. הספר כולל את גאומטרית המישור, הנדסת המרחב ונושאים נבחרים בתורת המספרים. מספר תרגומיו של ספר זה נופל אך ורק ממספר תרגומי התנ"ך. הגאומטריה הרגילה המוכרת לנו, נקראת כאמור, 'גאומטריה אוקלידית' על שמו.

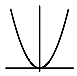
אחת האכסיומות של גאומטריה זו אומרת כי ישרים מקבילים אינם נפגשים לעולם. במאה ה־19 התפתחה הגאומטריה ה'לא אוקלידית' שנקודת המוצא שלה היא שקווים מקבילים אכן נפגשים – באינסוף.

אוקלידס עסק ותרם גם בתחומי האסטרונומיה, האופטיקה, המוסיקה והמכניקה.

3. א. $z = x + yi \ , \ |z - \bar{z} + i| = |3z + \bar{z} - i| \quad \Rightarrow \quad |x + yi - (x - yi) + i| = |3(x + yi) + x - yi - i|$

$|2yi + i| = |4x + 2yi - i| \quad \Rightarrow \quad |(2y + 1)i| = |4x + (2y - 1)i|$

$(2y + 1)^2 = (4x)^2 + (2y - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad 4y^2 + 4y + 1 = 16x^2 + 4y^2 - 4y + 1 \quad \Rightarrow \quad 8y = 16x^2$

$y = 2x^2 \quad \Rightarrow$  $\Rightarrow \quad \boldsymbol{y = 0}$

---

4. א. הנוסחה: $m_t = m_0 \cdot a^t$. x - קצב הדעיכה של חומר I מידי שעה . y - כנ״ל עבור חומר II

$\underline{I:} \ 100 \cdot x^{0.5} = 80 \quad \Rightarrow \quad x^{0.5} = 0.8 \ \ /(\ )^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0.64$

$\underline{II:} \ 100 \cdot y^{0.5} = 64 \quad \Rightarrow \quad y^{0.5} = 0.64 \ \ /(\ )^2 \quad \Rightarrow \quad y = 0.4096$

$100 \cdot 0.64^t - 100 \cdot 0.4096^t = 25 \ \ / : 25 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot 0.64^t - 4 \cdot 0.4096^t - 1 = 0 \ \ / \cdot (-1)$

$\Rightarrow \quad 4 \cdot 0.4096^t - 4 \cdot 0.64^t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot (0.64^t)^2 - 4 \cdot 0.64^t + 1 = 0$

$(2 \cdot 0.64^t - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.64^t = 0.5 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.64} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t = 1.55_{hours}}$

ב. נייצג נקודה על הפונקציה: $(k, 2^k)$. נרשום את הישר $y = x \ln 4$

בייצוג הכללי: $-x \ln 4 + y = 0$, ונפעיל את נוסחת מרחק נקודה מישר: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

מתקיים: $2^x - x \ln 4 > 0$ לכל x (ראה כוכבית), לכן: $d(k) = \frac{2^k - k \ln 4}{\sqrt{\ln^2 4 + 1}}$

$d'(k) = \frac{2^k \ln 2 - \ln 4}{\sqrt{\ln^2 4 + 1}} \stackrel{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \ln 4 = 2^k \ln 2 \quad \Rightarrow \quad 2^k = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \ln_2 4 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = 1$

$d''(k) = \frac{2^k \ln^2 2}{\sqrt{\ln^2 4 + 1}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \min \ (\surd) \ , \ k = 1 \quad \Rightarrow \quad 2^k = 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(1, 2)}$

$(*)$ לפונקציה $y = 2^x - x \ln 4$ יש ערך קיצון מינימלי בלבד (הַשְׁלֵם!).

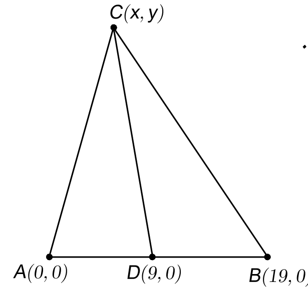
ערכה המינימלי הוא $2 - \ln 4 > 0$ לכן: $2^x - x \ln 4 > 0$ לכל x (ערך מוחלט מיותר).

האריה של ברנולי

פעם פרסם **יוהאן ברנולי** (Johann Bernoulli , 1667–1748) בעיה מתמטית קשה,
שהמתמטיקאים בני זמנו התקשו מאוד לפתרה.
ניוטון פתר את הבעיה בתוך שעות ספורות ופרסם את הפתרון בעילום שם.
כשהפתרון התפרסם, אמר ברנולי כי ניוטון הוא זה שפתר את החידה,
והוסיף משפט פִּרגון יפהפה: "מזהה אני את האריה לפי טביעת כף רגלו . . ."

פתרון מבחן 30

1. א.



$A(0,0)\ ,\ B(19,0)\ ,\ D(9,0)\ ,\ C(x,y)$

$\angle ACD = \angle BCD \quad \underset{\text{משפט חוצה־זווית}}{\Rightarrow} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$

$\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{\sqrt{(x-19)^2+y^2}} = \frac{9}{10} \quad \Rightarrow \quad 100(x^2+y^2) = 81((x-19)^2+y^2)$

$100x^2 + 100y^2 = 81x^2 - 81\cdot 2\cdot 19x + 81\cdot 19^2 + 81y^2 \quad / -81x^2 - 81y^2$

$19x^2 + 19y^2 = -81\cdot 2\cdot 19x + 81\cdot 19^2 \quad / : 19$

$x^2 + y^2 = -81\cdot 2x + 81\cdot 19 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2\cdot 81x + \underbrace{81^2 - 81^2}_{\text{השלמה לריבוע}} + y^2 = 81\cdot 19 \quad / + 81^2$

$(x+81)^2 + y^2 = 81\cdot 19 + 81^2 = 81(19+81) = 81\cdot 100 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(x+81)^2 + y^2 = 8100\ \ ,\ \ y \neq 0}$

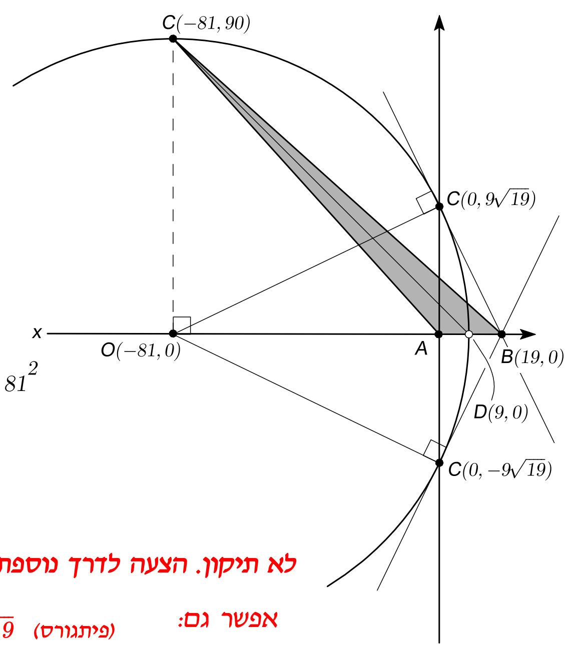
ב. נתבונן על AB כעל בסיס המשולש. $AB = 19$.

מכיון שהבסיס 'יושב' על ציר x, אורך הגובה שלו יהיה מרחק הנקודה C מציר זה.

המרחק המקסימלי הוא אורך הרדיוס וזה מתקיים כאשר $C(-81,90)$.

$\Rightarrow \quad \max S_{\triangle} = \frac{19\cdot 90}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\max S_{\triangle} = 855}$ **(יחידות ריבועיות)**

ג. משיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה.



$C(x,y)\ ,\ B(19,0)\ ,\ O(-81,0)$

$m_{BC}\cdot m_{OC} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y-0}{x-19}\cdot\frac{y-0}{x+81} = -1$

$\Rightarrow \quad (I)\ \ y^2 = (19-x)(x+81)$

$C \in \{(x+81)^2 + y^2 = 8100\}$

$\Rightarrow \quad (II)\ \ y^2 = 8100 - (x+81)^2$

$(19-x)(x+81) = 8100 - (x+81)^2$

$19x + 1539 - \cancel{x^2} - 81x = 8100 - \cancel{x^2} - 162x - 81^2$

$100x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$(II)\ \ y^2 = 8100 - 81^2 = 81(100-81) = 81\cdot 19$

$\Rightarrow \quad y = \pm 9\sqrt{19} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C(0, \pm 9\sqrt{19})}$

לא תיקון. הצעה לדרך נוספת:

אפשר גם:

$OB = 100\ ,\ OC = R = 90 \quad \Rightarrow \quad CB = 10\sqrt{19}$ (פיתגורס)

$S_{\triangle OCB} = \frac{CB\cdot OC}{2} = 450\sqrt{19} = \frac{100\cdot y_C}{2} \quad \Rightarrow \quad y_C = 9\sqrt{19} \quad \Rightarrow \quad x_C = 0$ (הצבת $C(x_C, 9\sqrt{19})$ במשוואת המעגל)