

מספר מילים לפנ"י

ספר זה מכיל שאלות ממבחני בגרות מהשנים 2013-1967, המתאימות לשאלון 482 (805) בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. השאלות מחולקות לפי נושאים. לכל שאלה תשובה סופית בעמוד השאלה. 36 מבחני הבגרות של שאלון 482 שנערכו עד כה במתכונת הנוכחית, מובאים אף הם - בחלקו השני של הספר.

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

\forall - לכל, \in - שייך, \nearrow - עליה, \searrow - ירידה, \cup - איחוד: היחס 'או', \emptyset - קבוצה ריקה
 \checkmark - אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח, ab - מוחלט, ep - נקודת קצה (end point)

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוטי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוטי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ-2012 עד 2017 (מועד א), נמצאים באתר ההוצאה במרשתת (internet), בעלות שנתית מגוחכת של 20 (עשרים) ש' בלבד. ראו בגב הכריכה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדוא"ל. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורה **שריף אמארה** מכפר ז'לפה.

לאחר כל מבחן בגרות שיערך בשנה הקרובה (התש"פ - 2019), אינן בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את חלק מהחללים שבין השאלות והפתרונות **חִלְחַחְתִּי** בהבזקי אנקדוטות וסיפורים. רוב ה'הבזקים' קשורים למתמטיקה, חלקם אינו כזה, וביניהם גם אנקדוטות בעלות אופי **לאומי או יהודי**.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על-ידי חברת 'קל-ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה א'י א'טכ

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות **יצאו גם לשאלונים 481-581-582**

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים **יצאו לשאלונים 382-481-482-581-582**

© כל הזכויות על השאלות שמורות למדינת ישראל - משרד החינוך, התרבות והספורט

כל הזכויות על הסקר ועל הפתרונות שמורות למחבר.

גידול ודעיכה

(כל השאלות שלא צוין מקורן - הן משאלון 004).

1. (4 יח', קיץ תש"ן - 90) בשמורת טבע בוצעו שתי מדידות של אוכלוסיית עופות דורסים. במדידה הראשונה נמצאו 1100 עופות, במדידה השנייה, שנערכה שמונה חודשים לאחר מכן, נמצאו 1510 עופות (הנח גידול מעריכי של אוכלוסיית העופות).
חשב כעבור כמה חודשים מהמדידה הראשונה תגיע אוכלוסיית העופות ל-4800.
2. (5 יח', קיץ תש"ן - 90) 'זמן מחצית החיים' של חומר רדיואקטיבי הוא פרק הזמן שבסופו נשארת מחצית מכמותו ההתחלתית. נגדיר 'זמן רבע חיים' של חומר רדיואקטיבי כפרק הזמן שבסופו נשארת רבע מכמותו ההתחלתית.
זמן רבע החיים של חומר א שווה לזמן מחצית החיים של חומר ב. אם מ⁻ 100gr של חומר א נשארו 80gr כעבור 4 שנים, מאיזו כמות של חומר ב יישארו 80gr כעבור 4 שנים?
3. (4 יח', קיץ תשנ"ג - 93) כמות הדגים בבריכת דגים גדלה ב- 8% בכל שבוע. הכמות ההתחלתית של הדגים היא 5 טון.
כעבור 9 שבועות מכרו 5 טון דגים, והמשיכו לגדל את הדגים הנותרים באותם התנאים.
כעבור x שבועות נוספים היו בבריכה 10 טון דגים. חשב את x.
4. (5 יח', קיץ תשנ"ג - 93) כמות הדגים בבריכת דגים גדלה ב- p% בכל שבוע. הכמות ההתחלתית של הדגים היא k טון.
כעבור x שבועות מכרו k טון דגים, והמשיכו לגדל את הדגים הנותרים באותם התנאים.
כעבור x שבועות נוספים היו בבריכה 2k טון דגים. בטא את x באמצעות p.
5. (חורף ס"ז - 2006) במדינה מסוימת נערך לראשונה מפקד אוכלוסין.
9 שנים אחרי מפקד האוכלוסין הראשון נערך מפקד שני, ונמצא שהאוכלוסיה גדלה פי שניים. הנח שהאוכלוסיה גדלה בצורה מעריכית.
א. פי כמה גדלה האוכלוסיה 17 שנים אחרי המפקד הראשון?
ב. כמה שנים אחרי המפקד הראשון גדלה האוכלוסיה ב-75%?

למספר הראשוני 23, 333, 333, 333, 333, 333, 333 יש 23 ספרות!



1. 37.2 month
2. 89.44gr
3. $x = 9.019 \text{ weeks}$
4. $x = \frac{\ln 2}{\ln(1 + \frac{p}{100})}$
5. א. פי 3.7 ב. 7.27 years

6. (קיץ ס"ז - 2006, מועד א) אדם קנה מכונת חדשה. ערך המכונת יורד בצורה מעריכית.

כעבור 10 שנים מיום הקניה ירד ערך המכונת ב-75%.

א. כעבור כמה שנים מיום הקניה, ירד ערך המכונת ב-80%?

ב. בכמה אחוזים ירד ערך המכונת כעבור 6 שנים מיום הקניה?

7. (קיץ ס"ז - 2006, מועד ב) אדם הפקיד בשני בנקים A ו-B, באותו יום את אותו סכום כסף.

בכל אחד מהבנקים הסכום גדל באחוז קבוע בכל שנה.

כעבור 7 שנים מיום ההפקדה היה הסכום בבנק A - 6580 ש', ובבנק B - 6150 ש'.

כעבור 3 שנים נוספות היה הסכום בבנק A - 7402.5 ש'.

מצא בכמה אחוזים גדל כל שנה סכום הכסף: א. בבנק A ב. בבנק B

8. (קיץ ס"ז - 2006, מועד מיוחד) מברכה מלאה שבה 1200 מ"ק מים מוציאים מים.

כמות המים יורדת בצורה מעריכית. לאחר 10 שעות נשארים בברכה 719 מ"ק מים.

א. מצא את כמות המים שהוצאו מהברכה בשעתיים הראשונות.

ב. כעבור כמה שעות מתחילת הוצאת המים תתרוקן הברכה עד מחציתה?

9. (סתיו ס"ז - 2006, מועד לוחמים) א. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 3 שנים.

(1) כעבור כמה זמן תקטן כמות החומר עד ל-20% מן הכמות ההתחלתית?

(2) אם כיום נותרה במעבדה כמות של 350 gr מחומר רדיואקטיבי זה,

איזו כמות תותר ממנו בעוד שנתיים?

10. (חורף ס"ז - 2007) בתאריך 1/1/2000 התפרסמה תחזית בנוגע לגודל האוכלוסיה בעיר.

לפי תחזית זו, ב-12 השנים הקרובות יקטן כל שנה מספר התושבים בעיר ב-5%,

וכעבור שנים אלה יגדל כל שנה מספר התושבים ב-3.8%.

כעבור כמה שנים מיום התחזית יהיה מספר התושבים בעיר

שווה למספר התושבים שהיו בעיר ביום התחזית?

1,265,347 הוא המספר הראשוני הקטן ביותר המכיל את כל הספרות מ-1 עד 7

תשובות

6. א. 11.61 years ב. 56.46% 9. א. (1) $t = 6.97 \text{ years}$ (2) $m_2 = 220.49 \text{ gr}$

7. א. 4% ב. 3% 10. 28.5 years

8. א. 117 m^3 ב. 13.51 (שעות)

11. (קיץ ס"ז - 2007, מועד א)

בתאריך 1/1/1990 קנה אדם מגרש באזור המיועד לבנייה.
 עד התאריך 1/1/1994 ירד ערך המגרש כל שנה באחוז קבוע.
 בסך הכל ב־ 4 השנים הראשונות מיום הקנייה ירד ערך המגרש ב־ 40%,
א. מאצ את האחוז הקבוע שבו ירד ערך המגרש בכל שנה.
ב. בתאריך 1/1/1994 התקבל אישור לתכנון בנייה באזור.
 עם קבלת האישור עלה ערך המגרש כל שנה באחוז הגדול פי 1.5 מהאחוז שבו ירד ערכו
 כל שנה לפני כן.
 מצא כעבור כמה שנים מתאריך 1/1/1994 יהיה ערך המגרש גדול ב־ 40% מערכו ביום הקניה.

12. (קיץ ס"ז - 2007, מועד ב מיוחד)

תרופה מסוימת הנלקחת מדי יום בכמות קבועה, הורגת במשך 7 ימים חמישית מחיידקי מחלה.
 הרס החיידקים נעשה בצורה מעריכית.
 כאשר כמות החיידקים יורדת ל־ 50% מהכמות ההתחלתית,
 ניתן להפחית את כמות התרופה היומית מבלי לפגוע בקצב הרס החיידקים.
א. לאחר כמה ימים בערך ניתן להפחית את כמות התרופה היומית?
ב. כאשר כמות החיידקים מגיעה ל־ 5% מהכמות ההתחלתית ניתן להפסיק את התרופה,
 והחיידקים הנותרים יומתו בעזרת שאריות התרופה שנשארה בגוף.
 לאחר כמה ימים בערך אפשר להפסיק את מתן התרופה?

13. (קיץ ס"ז - 2007, מועד ב)

בתאריך 1/12/06 היו בבריכה אחת 160,000 דגים, שכמותם גְדָלָה כל שבוע ב־ 2.5%.
 בבריכה שניה היו בתאריך זה 148,000 דגים, שכמותם גְדָלָה כל שבוע ב־ 3.5%.
א. אחרי כמה שבועות מהתאריך 1/12/06 יהיו כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
ב. אחרי כמה שבועות מהיום שבו היו כמויות הדגים שוות,
 תהיה כמות הדגים בבריכה השניה גדולה פי 2 מכמות הדגים בבריכה הראשונה?

Math problem? Call : $1 - 800 - ((10x)^2 - 2x + 34)$



13. **א.** 8.03 weeks **ב.** 71.39 weeks

11. **א.** 12% **ב.** 5.12 years

12. **א.** 22 days **ב.** 94 days

- 14.** (חורף ס"ח - 2008) בתרביית אחת היו בשעה 08^{00} בבוקר 32,000 חיידקים, ובשעה 10^{00} היו בתרביית 38,720 חיידקים.
בתרביית שניה היו בשעה 08^{00} בבוקר 8,000 חיידקים, ובשעה 10^{00} - 11,520 חיידקים.
בכל אחת מהתרבייות הגידול הוא מעריכי.
- א.** באיזו שעה בקירוב יהיה מספר החיידקים בתרביית הראשונה גדול פי 2 ממספר החיידקים בתרביית השניה?
- ב.** בכמה אחוזים מספר החיידקים שהיו בשתי התרבייות יחד בשעה 09^{00} גדול ממספר החיידקים שהיו בשתי התרבייות יחד בשעה 08^{00} ?
- 15.** (קיץ ס"ח - 2008, מועד לוחמים) ביום הקמת המדינה היו בשמורת טבע א 300 ציפורים, ובשמורה ב היו 400 ציפורים. לאחר 10 שנים היו בשמורה א 500 ציפורים. קצב הגידול השנתי של מספר הציפורים בשמורה א גדול פי 1.02 מקצב הגידול השנתי של מספר הציפורים בשמורה ב. בשתי השמורות הגידול הוא מעריכי.
מצא כעבור כמה שנים מיום הקמת המדינה יהיה מספר הציפורים בשמורה א גדול פי 2 ממספר הציפורים בשמורה ב.
- 16.** (סתיו ס"ט - 2008, מועד לוחמים) כמות חומר רדיואקטיבי פוחתת בצורה מעריכית מ' $1/10/2001$ עד $1/10/2006$ פחתה כמות החומר הרדיואקטיבי ב' 40%.
א. חשב בכמה אחוזים פוחתת כמות החומר הרדיואקטיבי בכל שנה.
ב. כמה אחוזים מהחומר הרדיואקטיבי שהיה ב' $1/10/2001$ נשארו ב' $1/10/2005$?
ג. חשב כעבור כמה שנים כמות החומר שהיתה ב' $1/10/2006$ תפחת ב' 46%?
- 17.** (חורף ס"ט - 2009) כמויות של שני חומרים רדיואקטיביים, א' ו' ב', קטנות בצורה מעריכית. מ' 250_{gr} של חומר ב' נשארו 100_{gr} כעבור 5 שנים.
א. מצא בכמה אחוזים קטנה הכמות של חומר ב' בכל שנה.
ב. פרק הזמן שבסופו נשארת מחצית מהכמות ההתחלתית של חומר א' שווה לפרק הזמן שבסופו נשארת רבע מהכמות ההתחלתית של חומר ב'.
מצא בכמה אחוזים קטנה הכמות של חומר א' בכל שנה.

המספר הראשוני הגדול ביותר שיש לו 20 ספרות הוא: 99,999,999,999,999,989

תהליך

- 16.** **א.** 9.71% **ב.** 66.46% **ג.** 6.03 years
- 17.** **א.** 16.74% **ב.** 8.75%
- 14.** **א.** 16^{00} **ב.** 12%
- 15.** 49.53 years

18. (חורף ס"ט, מועד מיוחד) אברהם הפקיד בתכנית חיסכון בבנק סכום של 20,000 ש', לפי ריבית של 4%. לאחר 5 שנות חיסכון הוא משך את כספו, הוסיף עליו עוד 6,000 ש', והפקיד את הסכום החדש באותה תכנית חיסכון.

כעבור כמה שנים מההפקדה האחרונה יהיה בתכנית החיסכון סכום של 40,000 ש' ?

19. (חורף ס"ט - 2009) **א.** הכמות של חומר רדיואקטיבי פוחתת בצורה מעריכית.

אחרי 35 שנה נותרה מחצית מהכמות ההתחלתית של החומר הרדיואקטיבי.

מצא כעבור כמה שנים תיוותר רק $\frac{1}{6}$ מהכמות ההתחלתית של החומר.

20. (קיץ תש"ע - 2010, מועד ב) נתונות כמויות שוות של שני חומרים רדיואקטיביים, חומר I

וחומר II. החומרים מתפרקים בצורה מעריכית.

כמות חומר I פחתה ב- 17% במשך 12 שנים.

כמות חומר II פחתה ב- 29% במשך 10 שנים.

מצא כעבור כמה שנים כמות חומר II תהיה קטנה פי 3 מכמות חומר I

(מהרגע שבו היו הכמויות שוות).

21. (קיץ תש"ע - 2010, לוחמים) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית.

מחודש ינואר בשנת 2001 עד חודש ינואר בשנת 2004 קטנה כמות החומר ב- 14%.

א. מצא בכמה אחוזים קטנה כמות החומר הרדיואקטיבי מדי שנה.

ב. כעבור כמה שנים תקטן ב- 40% כמות החומר הרדיואקטיבי שנמדדה בינואר 2001 ?

ג. אם בינואר 2001 היו 220 גרם חומר רדיואקטיבי,

כמה גרם מהחומר יישארו בינואר 2012 ?

22. (קיץ תשע"א - 2011, לוחמים) ערך הקרקע באזור מסוים עלה באחוז קבוע בכל שנה, במשך

5 שנים, החל מינואר 2000 עד ינואר 2005. בינואר 2005 היה ערך הקרקע גבוה ב- 40% מערכה

בינואר 2000. מינואר 2005 והלאה ירד ערך הקרקע באחוז הגדול פי שניים מאחוז העלייה שלו

מדי שנה ב- 5 השנים הקודמות.

א. בכמה אחוזים עלה ערך הקרקע מדי שנה ב- 5 השנים הראשונות?

ב. באיזו שנה הגיע ערך הקרקע ל- 89% מערכה בינואר 2000 ?

<p>הערך המוחלט של הפולינום $3n^3 - 183n^2 + 3318n - 18,757$ מציג מספר ראשוני לכל $0 \leq n \leq 46$</p>



21. **א.** 5% **ב.** 9.96 (שנים) **ג.** 125.14gr

18. 7.05years

22. **א.** 6.96% **ב.** 2008

19. **ב.** $t = 90.52$ years

20. $t = 58.56$ (שנים)

23. (קיץ תש"ע - 2010, מועד א - המבחן הגנוז)

- זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי א' הוא $\frac{1}{2}$ שעה.
 זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי ב' הוא שעה אחת.
 חומר א' דועך כל שעה פי q_1 , וחומר ב' דועך כל שעה פי q_2 .
- א. מצא את q_1 ואת q_2 .
- ב. נתונה תערובת המכילה 5 kg חומר א' ו- 7 kg חומר ב'.
 (בתערובת מתרחשת רק התפרקות רדיואקטיבית).
 כעבור כמה זמן סכום הכמויות של שני החומרים בתערובת יהיה 6 kg ?

24. (סתיו תש"עב - 2011, לוחמים)

- אדם קנה בית והחליט לשפץ אותו.
 לאחר סיום השיפוצים החל מחיר הבית לעלות בצורה מעריכית באחוז קבוע מידי שנה.
 כעבור 4 שנים היה מחיר הבית גבוה ב- 25% ממחירו לאחר סיום השיפוצים.
- א. כעבור כמה שנים היה מחיר הבית גבוה פי 1.48 ממחירו לאחר סיום השיפוצים?
 ב. פי כמה התייקר הבית 15 שנים אחרי סיום השיפוצים?
 ג. בכמה אחוזים התייקר הבית 15 שנים אחרי סיום השיפוצים?

25. (חורף תשע"ב - 2012, לוחמים)

- סכומי כסף הופקדו בשני חשבונות בנק. הסכומים גדלים בכל שנה באחוז קבוע.
 בחשבון I הופקדו a שקלים שגדלים ב- $p\%$ בשנה.
 כעבור שנתיים היו בחשבון 11,664 שקלים, כעבור 5 שנים נוספות היו בחשבון 17,138 שקלים.
- א. (1) מצא את p , אחוז הגדילה לשנה בחשבון I.
 (2) מצא את הערך של a.
- ב. בחשבון II הופקדו a שקלים, והם גדלים ב- $m\%$ בשנה.
 כעבור שנתיים היו בחשבון II 11,881 שקלים.
 כעבור כמה שנים מיום ההפקדה, יהיה בחשבון II סכום הגדול ב- 20% מהסכום שיהיה באותו זמן בחשבון I?



23. א. $q_1 = 0.25$, $q_2 = 0.5$ ב. $t = 0.74 \text{ hours} = 44.22 \text{ minutes}$

24. א. $t = 7.03$ (שנים) ב. 2.3089 ג. 130.89%

25. א. (1) $p = 8$ (2) 10,000 (שקלים) ב. 19.78 (שנים)

26. (קיץ תשע"ב - 2012, מועד א)

- ג. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי מסוים הוא 14 דקות.
 כמות החומר דועכת בצורה מעריכית. ברגע מסוים היו לחוקר 1000 גרם של החומר.
 (1) כמה גרם של החומר יהיו לחוקר כעבור 28 דקות?
 (2) כעבור כמה דקות (מהרגע שהיו לו 1000 גרם) יהיו לחוקר פחות מ-20 גרם חומר.

27. (קיץ תשע"ב - 2012, מועד ב)

- ג. קבלן מציע למכירה דירה גדולה במחיר של 2 מיליון שקל.
 הקבלן מבטיח כי מחיר הדירה יעלה כל שנה ב- $p\%$,
 ולכן כעבור 4 שנים יהיה מחיר הדירה 2.2 מיליון שקל. חשב את p .

28. (קיץ תשע"ב - 2012, לוחמים)

- בברכה גדלים דגים בשני צבעים: דגים אדומים ודגים צהובים. הדגים מתרבים בצורה מעריכית. בתחילת השנה היה בברכה מספר זהה של דגים צהובים ודגים אדומים.
 כעבור 6 חודשים היו בברכה 1820 דגים צהובים ו-1720 דגים אדומים.
 כעבור 4 חודשים נוספים היו בברכה 2130 דגים צהובים.
 א. (1) מצא כמה דגים צהובים היו בברכה בתחילת השנה.
 (2) מצא כמה דגים צהובים היו בברכה כעבור 7 חודשים מתחילת השנה.
 ג. מה היה אחוז הדגים האדומים מכלל הדגים בברכה כעבור 10 חודשים מתחילת השנה?

פרדוקס הסתברותי

נתונות 4 קוביות A, B, C, D כשהמספרים שעל פאותיהן הם:

A : 0, 0, 4, 4, 4, 4 B : 3, 3, 3, 3, 3, 3 C : 2, 2, 2, 2, 6, 6 D : 1, 1, 1, 5, 5, 5

מטילים שתי קוביות. ההסתברות ש- A תנצח את B היא $P(4, 3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ההסתברות ש- B תנצח את C היא $P(3, 2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ההסתברות ש- C תנצח את D היא $P(2, 1) + P(6, x) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$

ההסתברות ש- D תנצח את A היא $P(1, 0) + P(5, x) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$

זאת אומרת: A מנצחת את B שמנצחת את C שמנצחת את D שמנצחת את A !!!



26. ג. (1) 250gr (2) 79.01 (דקות)

27. ג. $p = 2.41$

28. א. (1) 1438 (דגים) (2) 1893 (דגים) ג. 47.64 (אחוזים)

סדרות

סדרה חשבונית

1. (4 יח', חורף תש"ל - 70)

הוכח: אם הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ היא חשבונית, אז:

$$\left(\frac{1}{ab} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\right) \text{ (היעזר בשוויון)} \quad \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}$$

2. (4 יח', קיץ תש"ל - 70)

האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא 100, והפרשה - 6. בסדרה זו איברים חיוביים ושליליים. כמה איברים עוקבים, לכל היותר, של הסדרה הנ"ל, החל בראשון, יש לחבר כדי שסכומם יהיה עדיין חיובי? מהו סכום כל האיברים האלה?

3. (4 יח', חורף תשל"א - 71)

באולימפיאדה מתמטית לתלמידי בת"ס על-יסודיים חולקו פרסים בסכום כולל של 4050 ש. הפרס הראשון (הגדול ביותר) היה גדול פי ארבע מהפרס האחרון (הקטן ביותר). כל פרס היה קטן מקודמו ב-54 ש. כמה פרסים חולקו באולימפיאדה הנ"ל?

4. (4 יח', קיץ תשל"ב - 72)

נתונה סדרה חשבונית: 37.6, -13.4, -13.7, -14, ... (37.6 האחרון).

א. מצא את סכום האיברים במקומות הזוגיים (ז"א במקום השני, הרביעי וכו') בסדרה הנ"ל.
ב. מהו סכום האיברים השליליים בסדרה הנ"ל?

5. (4 יח', קיץ תשל"ג - 73)

בסדרה חשבונית $2n$ איברים. סכום n האיברים האחרונים בסדרה זו גדול פי שלושה מסכום n האיברים הראשונים בסדרה. האיבר השמיני בסדרה הנ"ל שווה ל-45. מצא את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה הנ"ל.

$$100 = \text{מבחן}$$

$$! 40 + 2 + 8 + 50 = 100 \text{ הגימטריה של 'מבחן' היא בדיוק מאה:}$$



4. א. 1014.8 ב. -333.7

2. $n = 34, S_{34} = 34$

5. $a_1 = 3, d = 6$

3. 10

6. (4 יח', קיץ תשל"ד - 74)

במסיבת סיום הופיעה קבוצת תלמידים בתרגילי התעמלות. באחד התרגילים הסתדרו התלמידים תחילה במשולש שווה-צלעות, כשבקדקודו עומד תלמיד אחד, בשורה שמאחוריו - שני תלמידים, בשורה שלאחריה - שלושה תלמידים וכו'. לאחר מכן הסתדרו תלמידים אלה בצורה שונה. ביחד עם 46 נוספים, שהצטרפו אליהם, עמדו בשורות שוות (בעלות אותו מספר תלמידים) זו מאחורי זו ויצרו ריבוע. לאורך צלע הריבוע עמדו 4 תלמידים פחות מאשר לאורך צלע המשולש שווה-הצלעות. מה היה מספר התלמידים שיצרו את המשולש שווה-הצלעות?

7. (4 יח', קיץ תשל"ה - 75)

נתונה נוסחת האיבר הכללי בסדרה חשבונית: $a_n = \frac{3}{4}(3n + 1)$. מצא את: **א.** הפרש הסדרה **ב.** סכום 25 האיברים הראשונים של הסדרה

8. (4 יח', חורף תשל"ז - 77)

אנציקלופדיה לנוער, שמחירה 216 ש', נמכרת ב-12 תשלומים חודשיים לא שווים. התשלומים החודשיים מהווים סדרה חשבונית, כאשר ששת התשלומים הראשונים מכסים $\frac{2}{3}$ ממחיר האנציקלופדיה. חשב את התשלום הראשון ואת התשלום האחרון.

9. (4 יח', חורף תשל"ח - 78)

בבית מלאכה הוזמנו חלקי חילוף מסוג מסוים. את ההזמנה ביצעו שני פועלים וכל אחד מהם הכין מחצית חלקי החילוף שהוזמנו. הם החלו בעבודה באותו יום. הפועל הראשון הכין ביום הראשון לעבודתו 20 חלקי חילוף ובכל יום אחר ב-5 חלקי חילוף יותר מאשר ביום שקדם לו. הפועל השני עבד בקצב קבוע והכין כל יום 65 חלקי חילוף. הפועל השני סיים את עבודתו שלושה ימים לפני הראשון. כמה חלקי חילוף הוזמנו בבית המלאכה? הבחן שני מקרים.

שבעת המספרים הבאים הם מספרים ראשוניים עוקבים: 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53. המספר המורכב מסדרת הספרות של מספרי סדרה זו: 29, 313, 741, 434, 753 גם הוא ראשוני! זהו המספר הראשוני הקטן ביותר עם תכונה זו. (Prime curios)



6. 210 תלמידים **8.** $a_1 = 29$, $a_{12} = 7$

9. $d = 2\frac{1}{4}$ **א.** $S_{25} = 750$ **ב.** 1300 (1), 390 (2)

10. (4 יח', קיץ תשל"ח - 78)

במצולע מהווים אורכי הצלעות, החל בצלע הקטנה ביותר, סדרה חשבונית שבה הפרש הסדרה הוא 3 ואיברה האחרון גדול פי 10 מאיברה הראשון. היקף המצולע הנ"ל הוא 1100cm . כמה צלעות במצולע זה?

11. (4 יח', קיץ תשמ"א - 81)

עבור אילו ערכים של x מהווה הסדרה $5x + 6$, $2x + x^2$, $4x + x^2$ סדרה חשבונית? מצא את איברי הסדרה עבור כל אחד מערכים אלה.

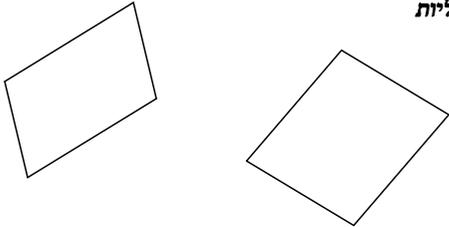
12. (4 יח', קיץ תשמ"ז - 86)

באמפיתיאטרון גדול 42 שורות. בכל שורה 2 מקומות ישיבה יותר מאשר בשורה הקודמת לה. מספר מקומות הישיבה ב־24 השורות הראשונות שווה למספר מקומות הישיבה ב־18 השורות האחרונות. כמה מקומות ישיבה יש בכל 42 השורות שבאמפיתיאטרון?

13. (4 יח', חורף תשנ"ב - 91) הולך רגל יוצא מנקודה מסוימת והולך בקו ישר.

בדקה הראשונה הוא עובר מרחק של 50 מטר, בדקה השנייה - 48 מטר וכן הלאה - בכל דקה הוא עובר ב־2 מטר פחות מאשר בדקה שקדמה לה. 5 דקות לאחר יציאת הולך הרגל הראשון, יוצא הולך רגל שני מאותה נקודה, בקו ישר ובאותו כיוון, במהירות קבועה של 35 מטר לדקה. כמה דקות לאחר שיצא הולך הרגל הראשון, יהיה המרחק בין שני הולכי הרגל 14 מטר (לפני שייפגשו)?

חידת מקביליות



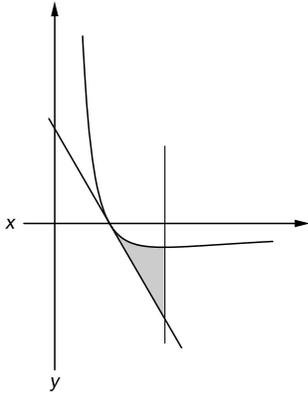
נתונות שתי מקביליות במישור.
 כיצד ניתן לחלק כל אחת מהן לשני חלקים,
 כך שכל אחד מהחלקים שווה בשטחו לחלק האחר,
 ע"י העברת ישר אחד דרך שתי המקביליות?
 תשובה (בצופן א"ת ב"ש):
 צושג מבג קגל טדפקפא יורבמ תכלחפטמ צידשמכמפת (צפלס!)

6048 .12

25 .10

23 .13

11. $x_1 = 6 : 36, 48, 60$. $x_2 = -1 : 1, -1, -3$



13. (004, סתיו תש"ע - 2009, מועד לוחמים)

בציור מוצג גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ בתחום $x > 0$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$

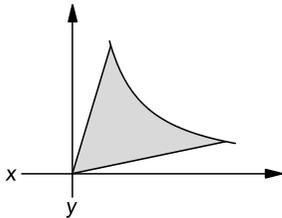
בנקודת החיתוך שלה עם ציר x .

ב. מצא את שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,

על ידי המשיק שמצאת בסעיף א, ועל ידי הישר המאונך

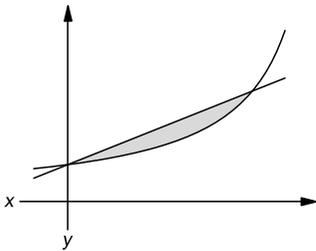
לציר x ועובר דרך נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.



14. (5 יח', חורף תשכ"ט - 69)

מצא את השטח המוגבל בגרף הפונקציה $y = \frac{16}{x}$,

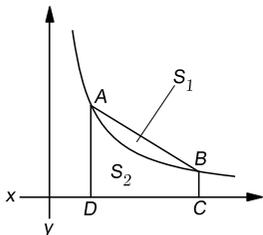
הנמצא ברביע הראשון, ובישרים $y = 4x$ ו- $y = \frac{1}{4}x$.



15. (5 יח', חורף תשנ"ח - 98)

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $y = \frac{1}{3e-2x}$

ועל-ידי הישר $y = \frac{2x+e}{3e^2}$.



16. (5 יח', חורף תש"ס - 2000) גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$

מחלק את הטרפז ABCD לשני שטחים S_1 ו- S_2 .

S_1 חשב את השטח $A(1, 1)$, $S_2 = \ln 3$.

9 ו- 2 הם המספרים השונים היחידים שמקיימים את הקשר הבא: $9 \times 2 = 18$, $9^2 = 81$

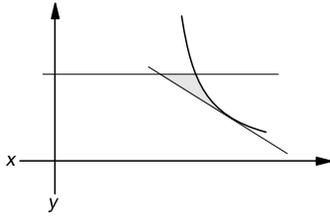
תשובות

13. א. $y = -x + 1$ ב. $\min : (2, -\frac{1}{4})$ ג. $S = 1 - \ln 2 = 0.3069$ (יחידות ריבועיות)

14. $S = 32 \ln 2 = 22.18$ (יחידות ריבועיות)

15. ב. $S = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \ln 3 = 0.12$ (יחידה ריבועית)

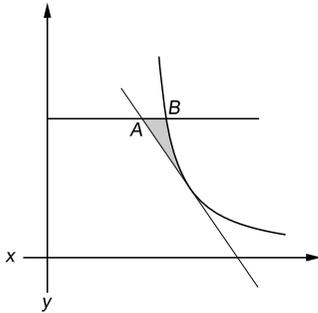
16. $S_1 = \frac{4}{3} - \ln 30.23$ (יחידה ריבועית)



17. (007, קיץ ס"ה - 2005, מועד ב)

נתונה הפונקציה $y = \frac{1}{2x-3}$

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2.5$.
מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,
על ידי המשיק ועל ידי הישר $y = 1$.



18. (004, קיץ תשע"א - 2011, מועד א)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x-2}$ בתחום $x > 2$.

העבירו משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 3$.
הישר $y = 2$ חותך את המשיק בנקודה A,
ואת גרף הפונקציה $f(x)$ הוא חותך בנקודה B.
א. מצא את השיעורים של הנקודות A ו-B.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, ע"י המשיק וע"י הישר $y = 2$.

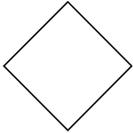
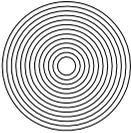
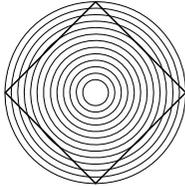
19. (004, סתיו תשע"ב - 2011, לוחמים)

בסעיפים א-ד שאלות בחשבון דיפרנציאלי.

ה. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $y = \frac{3}{2x-1}$.

על ידי ציר x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = 2$.

תעתועי ראייה

בציור מימין נראה מרובע שצלעותיו
קעורות כלפי מרכזו.
אבל זה לא: המרובע הוא ריבוע מושלם,
וצלעותיו ישרות לחלוטין!

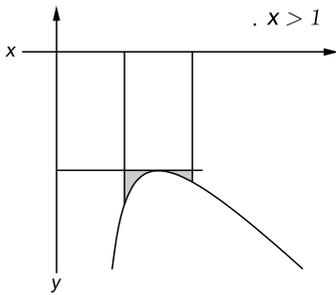
תגלית

17. $S = \ln \sqrt{2} - \frac{1}{4} = 0.0966$ (יחידה ריבועית)

18. א. $A(2, 2)$, $B(2.5, 2)$ ב. $S = \ln 2 - \frac{1}{2} = 0.1931$ (יחידה ריבועית)

19. ה. $S = 1.5 \ln 3 = 1.65$ (יחידות ריבועיות)

20. (004, קיץ תשע"ב - 2012, מועד א)



בציור מוצג הגרף של הפונקציה $f(x) = 3 - 2x - \frac{8}{x-1}$ בתחום $x > 1$.

א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום

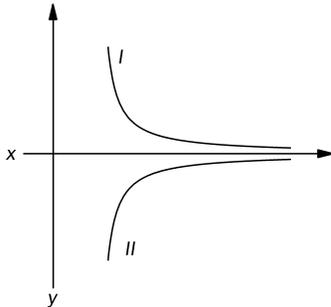
של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום

שלה ועל ידי הישרים $x = 2$ ו- $x = 4$.

21. (004, קיץ תשע"ב - 2012, מועד ב)



בציור מוצגים הגרפים I ו- II בתחום $x > \frac{3}{4}$

של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{4x-3}$ ו- $g(x) = -\frac{1}{4x-3}$.

א. איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$,

ואיזה גרף הוא של הפונקציה $g(x)$? נמק.

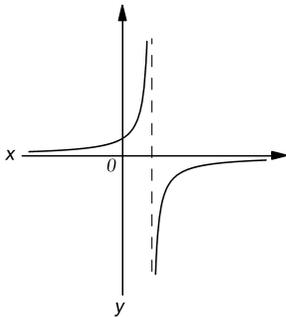
ב. הישר $y = 1$ חותך את הגרף I בנקודה A.

הישר $y = -1$ חותך את הגרף II בנקודה B.

מצא את השטח המוגבל על ידי הישר AB,

על ידי הגרפים של שתי הפונקציות ועל ידי הישר $x = 3$.

22. (004, קיץ תשע"ב - 2012, לוחמים)



נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a}{3-x}$, a הוא פרמטר.

בציור מוצג גרף הפונקציה.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. רשום את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה,

המקבילות לצירים.

ג. קבע על פי הגרף אם $a > 0$ או $a < 0$. נמק.

ד. הצב $a = 6$ בפונקציה הנתונה, וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,

ועל ידי הישרים $x = 3$, $y = 2$ ו- $y = 6$.

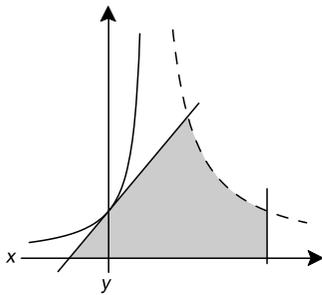
תולדות

20. א. $\max(3, -7)$ ב. $S = 8(\ln 3 - 1) = 0.79$ (יחידה ריבועית)

21. א. $I \leftrightarrow f(x)$, $II \leftrightarrow g(x)$ ב. $S = \ln 3 = 1.0986$ (יחידה ריבועית)

22. א. $x \neq 3$ ב. $x = 3$, $y = 0$ ג. $a > 0$ ד. $S = \ln 729 = 6.59$ (יחידות ריבועיות)

23. (004, חורף תשע"ג - 2013)



בציור הנתון מוצגים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{3}{x-1} \quad \text{בתחום } x > 1,$$

$$g(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{בתחום } x < 1.$$

א. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים

של כל אחת מהפונקציות.

ב. בנקודה שבה $x = 0$ העבירו משיק לגרף הפונקציה $g(x)$.

מצא את השיעורים של נקודת החיתוך של המשיק עם גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x > 1$.

ג. השטח, המוגבל ילידי המשיק, על-ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על-ידי הישר $x = a$ ועל-ידי ציר x

שווה ל-7.5 יחידות ריבועיות. מצא את הערך של a .



סיפור על מורה שלא מהעולם הזה

הגמרא במסכת עירובין דף ג"ד עמוד ב מספרת סיפור מדהים על מסירות של מורה לתלמידו.

סיפור זה נהג לספר לנו, תלמידים בכיתות ז-ח, מורה שלנו, **ינון חורי** זצוק"ל (התרפ"ו-התשס"ד,

1926-2004), איש צדיק, עניו וטהור, ציוני גדול, שזכיתי ללמוד תורה מפיו (וגם מתמטיקה...).

מי שזכה להכיר את ר' ינון חורי, יודע שסיפור זה הוא ממש סיפור חייו.

וכך מספרת הגמרא:

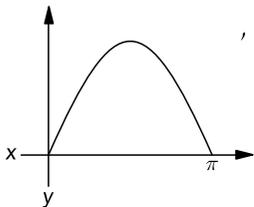
"רבי פרידא הוה ליה ההוא תלמידא דהוה תני ליה ארבע מאה וימנא וגמר. יומא חד בעייה למלתא דמצוה, תנא ליה ולא גמר. אמר ליה: האידינא מאי שנא? אמר ליה: מדההיא שעתא דאמרו ליה למר איכא מילתא דמצוה - אסחאי לדעתאי, וכל שעתא אמנא, השתא קאי מר, השתא קאי מר. אמר ליה: הב דעתנך ואתני לך. הדר תני ליה ארבע מאה וימני אחריני. נפקא בת קלא ואמרה ליה: ניתא לך דליספו לך ארבע מאה שני, או דתיזכו את ודך לעלמא דאתי? אמר: דתיזכו אנא ודרי לעלמא דאתי. אמר להן הקדוש ברוך הוא: תנו לו זו וזו."

תרגום חופשי: לרבי פרידא היה תלמיד קשה תפיסה. כדי שהוא יקלוט את שיעורו היה ר' פרידא חוזר על אותו שיעור ארבע מאות פעמים, ואז הוא היה תופס. יום אחד, תוך כדי הלימוד, קראו לרב לדבר מצוה. באותו היום התלמיד לא הצליח לקלוט את לימודו גם לאחר ארבע מאות פעמים. שאל אותו רבו: מה קרה היום שאינך מצליח להבין את לימודך? אמר לו: ברגע שקראו לך לדבר מצוה, הוסחה דעתי. בכל רגע אמרתי לעצמי: הנה עכשו הרב ילך. הרב 'שחרר' את השליח שחיכה לו, הרגיע את התלמיד שהוא אינו הולך לשום מקום, וחזר על אותו שיעור עוד ארבע מאות פעמים. יצאה בת קול מהשמיים והציעה לר' פרידא לבחור את שכרו על אותה מסירות עילאית: האם להוסיף לך עוד ארבע מאות שנות חיים או שאתה וכל הדור שלך יזכו לחיי העולם הבא? ר' פרידא העדיף את טובת הכלל הרוחנית והרחוקה מאשר את טובתו האישית והמיידית, ובחר שהוא ובני דורו יזכו לחיי העולם הבא. על כך פסק הקדוש ברוך הוא שר' פרידא יזכה גם לתוספת של ארבע מאות שנות חיים וגם שהוא ודורו יזכו לעולם הבא. (ואני חושב שצ"ש גדול מגיע גם לתלמיד...)

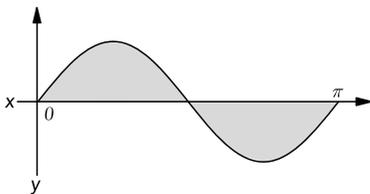
חשבון אינטגרלי - פונקציות טריגונומטריות

1. (4 יח', קיץ תש"ל - 70) שרטט את הגרפים של הפונקציות: $y = \sin x$ ו- $y = \sin 2x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$, ומצא את השטח המוגבל בקשתות הגרפים הנ"ל שבין שתי נקודות החיתוך שבתחום $0 < x \leq \pi$ (שים לב שאין לזכור את הנקודה שבה $x = 0$).

2. (4 יח', קיץ תשל"א - 71) הגרפים של הפונקציות $y = \sin x$ ו- $y = \cos 2x$ נפגשים בשתי נקודות בתחום $0 \leq x \leq \pi$. הקשתות של הגרפים הנ"ל בין שתי נקודות אלה מגבילות שטח. חשב את גודלו של שטח זה.

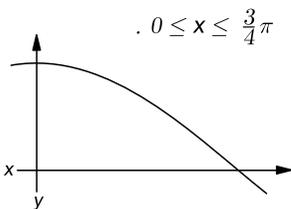


3. (4 יח', חורף תשנ"ג - 92) בציור מתואר גרף הפונקציה $y = \sqrt{2} \sin x$, בתחום $0 \leq x \leq \pi$. בנקודה שעל גרף הפונקציה שבה $x = \frac{3\pi}{4}$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה.
 א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי המשיק ועל-ידי ציר x.



4. (4 יח', קיץ תשנ"ד - 94)
 א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $y = \sin^2 x$.
 ב. בציור שלפניך מתואר גרף של הפונקציה $g(x) = \sin x \cdot \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

הראה כי $g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, וחשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה ועל-ידי ציר x.



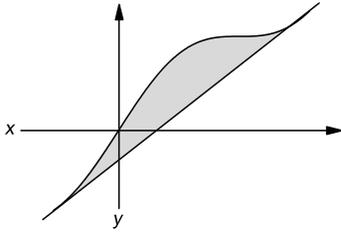
5. (4 יח', חורף תשנ"ה - 95) נתונה הפונקציה $y = \cos x$, בתחום $0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$.

מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי המשיק שמשוואתו $y = -x + \frac{\pi}{2}$ ועל-ידי ציר y.

קשה - זאת אומרת: אפשר (זאב ז'בוטינסקי)



1. $S = 2\frac{1}{4}$ (י"ר), עמ' 115
 2. $S = 1.5\sqrt{3} = 2.6$ (יחידות ריבועיות)
 3. א. $y = -x + \frac{3}{4}\pi + 1$
 ב. $S = 1.5 - \sqrt{2} = 0.086$
 4. א. $y' = \sin 2x$ ב. $S = 1$
 5. $S = \frac{\pi^2}{8} - 1 = 0.234$ (יחידות ריבועיות)

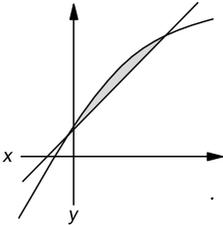


6.6. (4 יח', קיץ תשנ"ה - 95)

נתונה הפונקציה $y = x + \sin x$ בתחום $-\pi < x < 2\pi$, ונתון הישר שמשוואתו $y = x - 1$.
א. מצא בתחום הנתון את נקודות המשותפות לגרף הפונקציה ולישר.

ב. הוכח כי בנקודות, שמצאת בסעיף א', הישר משיק לגרף הפונקציה.

ג. חשב את השטח, המוגבל ע"י גרף הפונקציה וע"י הישר, בתחום שבין הנקודות שמצאת בסעיף א'.

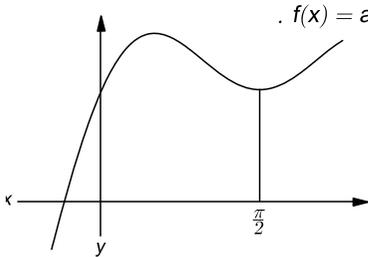


6.7. (4 יח', קיץ תשנ"ז - 97)

נתונה הפונקציה: $y = 2x + \sin x + \cos x$ והישר $y = 2x + 1$.

א. מצא את הנקודות המשותפות לפונקציה ולישר (פתרון כללי).

ב. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציה לבין הישר בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.



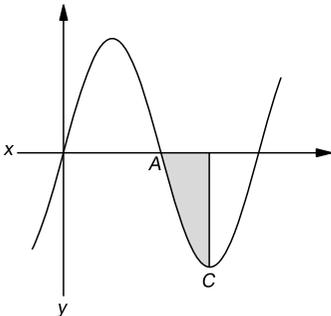
6.8. (4 יח', קיץ תשנ"ז - 97) נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot \sin x + \cos 2x$

לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$.

א. מצא את a .

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה,

ע"י ציר x וע"י הישרים $x = 0$ ו- $x = \frac{\pi}{2}$.



6.9. (4 יח', חורף תשס"ג - 2003)

בציר מתואר קטע של גרף הפונקציה $y = 4 \sin x$.

א. מצא את שיעור x של נקודת החיתוך A

של גרף הפונקציה עם ציר x .

ב. מצא את שיעור x של נקודת המינימום C של הפונקציה.

ג. מנקודה C הורידו אנך לציר x .

חשב את השטח המוגבל ע"י האנך, ע"י גרף הפונקציה וע"י ציר x .

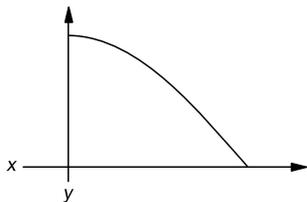
תולדות

6. **א.** $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ **ג.** $S = 2\pi$ (יחידות ריבועיות)

7. **א.** $(2\pi k, 4\pi k + 1)$, $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi + 4\pi k + 1)$ **ב.** $S = 2 - \frac{\pi}{2} = 0.429$ (יחידות ריבועיות)

8. **א.** $a = 2$ **ב.** $S = 2$ (יחידות ריבועיות)

9. **א.** $x_A = \pi$ **ב.** $x_C = \frac{3\pi}{2}$ **ג.** $S = 4$ (יחידות ריבועיות)



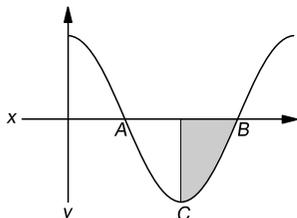
10. (004, חורף תשס"ה - 2005)

נתונה הפונקציה: $y = \cos 2x$ בתחום: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק, ועל ידי ציר y .



11. (004, קיץ תשס"ז - 2006, מועד א)

בציור מתואר גרף הפונקציה $y = 3 \cos 3x$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.

נקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של הגרף עם ציר x ,

ונקודה C היא נקודת מינימום של הפונקציה.

א. מצא את שיעורי הנקודה B. ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

ג. מ' C הורידו אנך לציר x . חשב את השטח המוגבל ע"י האנך, ע"י גרף הפונקציה וע"י ציר x .

12. (004, חורף תשס"ז - 2007) נתונה הפונקציה $f(x) = 3 - 6 \sin 2x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

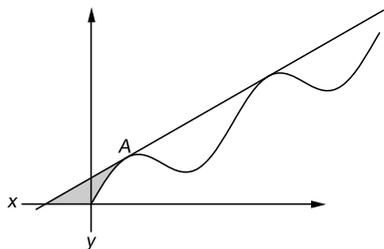
ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה בתחום הנתון, וקבע את סוגי הקיצון.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המינימום המוחלט שלה, ומנקודה זו העבירו

אנך לציר x . מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי המשיק, האנך והצירים.

13. (004, קיץ תשס"ז - 2007, מועד לוחמים) בציור מתוארים הגרפים של הפונקציות:



$f(x) = x + \sin 2x$ ו- $g(x) = x + 1$ בתחום $x \geq 0$.

A היא הנקודה הראשונה מימין לראשית הצירים,

שבה הישר $g(x)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.

א. חשב את שיעורי הנקודה A.

ב. הראה שהישר $g(x)$ משיק לפונקציה בנקודה A.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x)$, ע"י הישר $g(x)$, ועל ידי ציר x .

תשובות

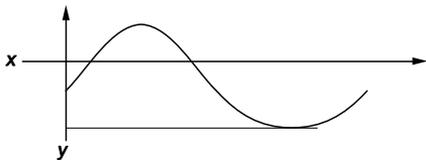
10. א. $y = -2x + \frac{\pi}{2}$ ב. $S = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = 0.1169$ (יחידה ריבועית)

11. א. $B(\frac{\pi}{2}, 0)$ ב. $C(\frac{\pi}{3}, -3)$ ג. $S = 1$ (יחידה ריבועית)

12. א. $(\frac{\pi}{12}, 0)$, $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ ב. $\max_{ab}(\frac{3\pi}{4}, 9)$, $\min_{ab}(\frac{\pi}{4}, -3)$ ג. עמ' 115 ד. $S = \frac{3\pi}{4}$ (ר')

13. א. $A(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 1)$ ב. $f'(\frac{\pi}{4}) = m_{g(x)} (= 1)$ ג. $S = \frac{\pi}{4}$ (ר')

14. (004, קיץ תשס"ח - 2008, מועד לוחמים) בציר מתואר גרף של הפונקציה



$$y = 7 \sin x - \cos 2x - 3 \quad \text{בתחום } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

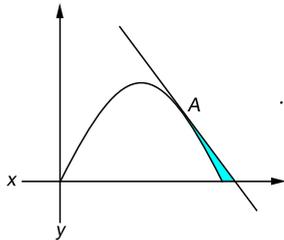
א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון

הפנימיות של הפונקציה בתחום.

ב. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המינימום הפנימית שלה.

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר y .

15. (004, קיץ תשס"ח - 2008, מועד לוחמים)



בציר מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{2} \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

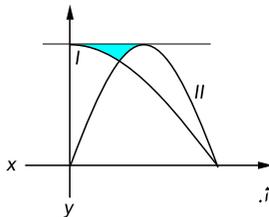
א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x .

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A הוא -1 .

ב. מצא את משוואת המשיק.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, ע"י המשיק שמצאת בסעיף א, וע"י ציר x .

16. (004, חורף תשס"ט - 2009) הגרפים I ו- II שבציר הם



של הפונקציות $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin 2x$ בתחום: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

א. איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$, ואיזה של $g(x)$? נמק.

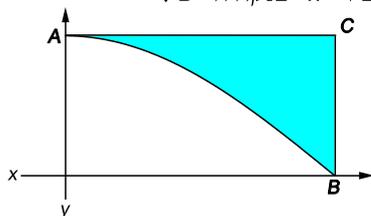
ב. מעבירים ישר המשיק לגרף II בנקודת המקסימום של הפונקציה.

מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ועל ידי המשיק.

17. (004, חורף תשס"ט - 2009, מועד מיוחד)

בציר שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר y בנקודה A , ואת ציר x בנקודה B .



מנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר x ,

ומנקודה B מעבירים ישר המקביל לציר y .

שני הישרים נפגשים בנקודה C .

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הישרים המקבילים לצירים וע"י גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות

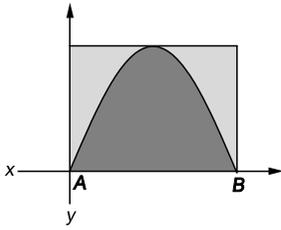
14. א. $\max(\frac{\pi}{2}, 5)$, $\min(\frac{3\pi}{2}, -9)$ ב. $S = 9\pi + 7$ (יחידות ריבועיות)

15. א. $(\pi, 0)$, $(0, 0)$ ב. $y = -x + \frac{3\pi}{4} + 1$ ג. $S = 1.5 - \sqrt{2} = 0.0858$ (יחידות ריבועיות)

16. א. $f(x) \leftrightarrow I$, $g(x) \leftrightarrow II$ ב. $S = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} = 0.0354$ (יחידות ריבועיות)

17. א. $A(0, 1)$, $B(\pi, 0)$ ב. $S = \pi - 2 = 1.14$ (יחידות ריבועיות)

18. (004, קיץ תשס"ט - מועד א)

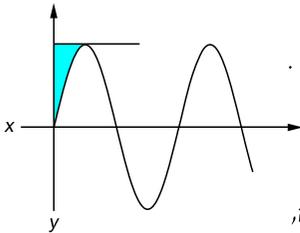


הגרף של הפונקציה $f(x) = \sin 2x$ חותך את ציר x בשתי נקודות: A ו- B .

מנקודה B העלו אנך לציר x , ודרך נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ העבירו משיק לגרף הפונקציה.

S_1 הוא השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x)$, ע"י המשיק, ע"י ציר y וע"י האנך (השטח הבהיר).
 S_2 הוא השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x)$ וע"י ציר x (השטח הכהה).
 חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

19. (004, קיץ תשס"ט - מועד ב)

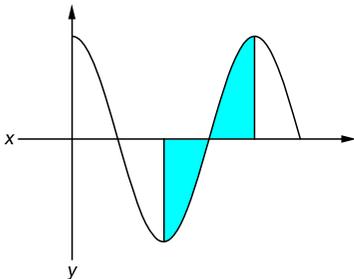


נתון הגרף של הפונקציה $f(x) = \sin ax$, $a > 0$, בתחום $x \geq 0$.
 דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, הקרובה לציר y העבירו משיק לגרף הפונקציה.

א. (1) מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של הפונקציה, הקרובה לציר y (הבע באמצעות a במידת הצורך).
 (2) רשום את משוואת המשיק.

ב. השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, ע"י המשיק וע"י ציר y הוא $\frac{\pi-2}{4}$. מצא את הערך של a .

20. (004, קיץ תשס"ט - מועד לוחמים)



נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -3 \sin 3x$.

בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$.
 שיעור y של נקודת המינימום הפנימית של הפונקציה בתחום הנתון הוא -1 .

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי נקודת המקסימום הפנימית של הפונקציה בתחום הנתון.

ג. מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$ הורידו אנכים לציר x .

חשב את השטח המוגבל על ידי הפונקציה, על ידי האנכים לציר x ועל ידי ציר x .

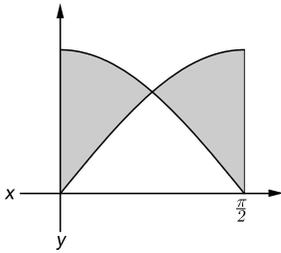
4567 הוא המספר הראשוני היחיד שיש לו ארבע ספרות עוקבות בסדר עולה

תהליך

18. $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) : 1 = 0.57 : 1$

19. א. (1) $\max : \left(\frac{\pi}{2a}, 1\right)$ (2) $y = 1$ ב. $a = 2$

20. א. $f(x) = \cos 3x$ ב. $\max : \left(\frac{2\pi}{3}, 1\right)$ ג. $S = \frac{2}{3}$ (יחידות ריבועיות)



21. (004, סתו תש"ע - 2009, מועד לוחמים)

בציור מוצגים גרפים של שתי פונקציות:

$f(x) = \sin \frac{ax}{2}$ ו- $g(x) = \cos x$, בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

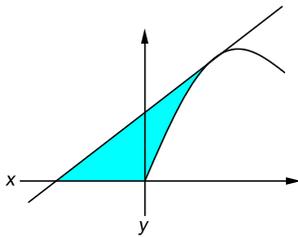
שיעור y של נקודת החיתוך של שתי הפונקציות הוא $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

א. (1) מצא את שיעור x של נקודת החיתוך של הפונקציות.

(2) מצא את a .

ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א(2),

וחשב את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בתחום הנתון.



22. (004, חורף תש"ע - 2009)

נתונה הפונקציה $f(x) = x + a \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$, $a > 0$.

לגרף הפונקציה העבירו משיק ששיפועו 1 .

א. (1) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה.

הבע באמצעות a במידת הצורך.

(2) הבע באמצעות a את משוואת המשיק.

ב. (1) נתון כי השטח ברביע השני, המוגבל על ידי המשיק ועל ידי הצירים,

הוא 2 (חלק מהשטח האפור). חשב את הערך של a .

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, ע"י גרף הפונקציה וע"י ציר x (כל השטח האפור).

23. (004, אביב ס"ח - 2008, לוחמים)

נתונה הפונקציה $y = \sin 2x$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$.

A ו- B הן נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x ,

מימין לראשית הצירים. C היא נקודת מקסימום של

הפונקציה ושיעור x שלה הוא $\frac{\pi}{4}$.

מעבירים משיק לפונקציה בנקודה C .

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מנקודה B מעבירים אנך לציר x .

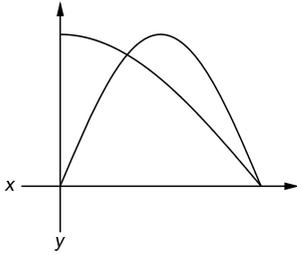
חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק, האנך וציר x .

תשובות

21. א. (1) $x = \frac{\pi}{4}$ (2) $a = 2$ ב. $S = 2\sqrt{2} - 2 = 0.83$ (יחידות ריבועיות)

22. א. (1) $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + a)$ (2) $y = x + a$ ב. (1) $a = 2$ (2) $S = \pi$ (יחידות ריבועיות)

23. א. $y = 1$ ב. $S = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2} = 1.86$ (יחידות ריבועיות)

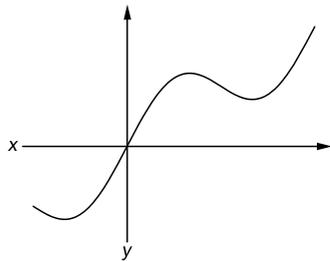


24. (004, קיץ תש"ע - 2010, לוחמים)

בציור מתוארים הגרפים של שתי הפונקציות:
 $f(x) = \cos x$ ו- $g(x) = 2 \sin x \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
 חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים של הפונקציות
 ובין הישר $y = 1$.

25. (004, חורף תשע"א - 2011)

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin ax$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$. פרמטר a , $0 < a < 9$.
 א. ישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$, מקביל לציר x . מצא את הערך של a .
 הצב $a = 3$, וענה על הסעיפים ב-ה.
 ב. מצא את השיעורים של נקודת המינימום המוחלט ואת השיעורים של נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה בתחום הנתון. נמק.
 ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x בתחום הנתון.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
 ה. מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה ועל ידי ציר x בתחום הנתון.



26. (004, קיץ תשע"א - 2011, מועד א')

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x$ בתחום $-\pi \leq x \leq 2\pi$.
 נתון גם ישר שמשוואתו $y = \frac{1}{2}x - 1$.
 א. מצא את שיעורי x של הנקודות המשותפות לישר ולגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.
 ב. הראה כי הישר הנתון משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות שמצאת בסעיף א.
 ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הישר הנתון.
 (השטח נמצא בין נקודות ההשקה של הישר.)

הוכח: $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$ (יחס הזהב)

●●●● תהליך ●●●●

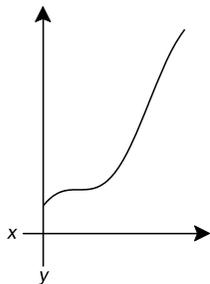
24. $S = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} = 0.0354$ (יחידה ריבועית)

25. א. $a = 3$ ב. $\max_{ab}(\frac{\pi}{6}, 1)$ ג. $\min_{ab}(\frac{\pi}{2}, -1)$ ד. $(0, 0), (\frac{\pi}{3}, 0), (\frac{2\pi}{3}, 0)$

ד. עמ' 115 ה. $S = \frac{4}{3}$ (י"ר)

26. א. $x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2}$ ג. $S = 2\pi$ (יחידות ריבועיות)

38. (004, חורף תשע"ג - 2013)



נתונה הפונקציה $f(x) = x + \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

בתחום הנתון מצא את:

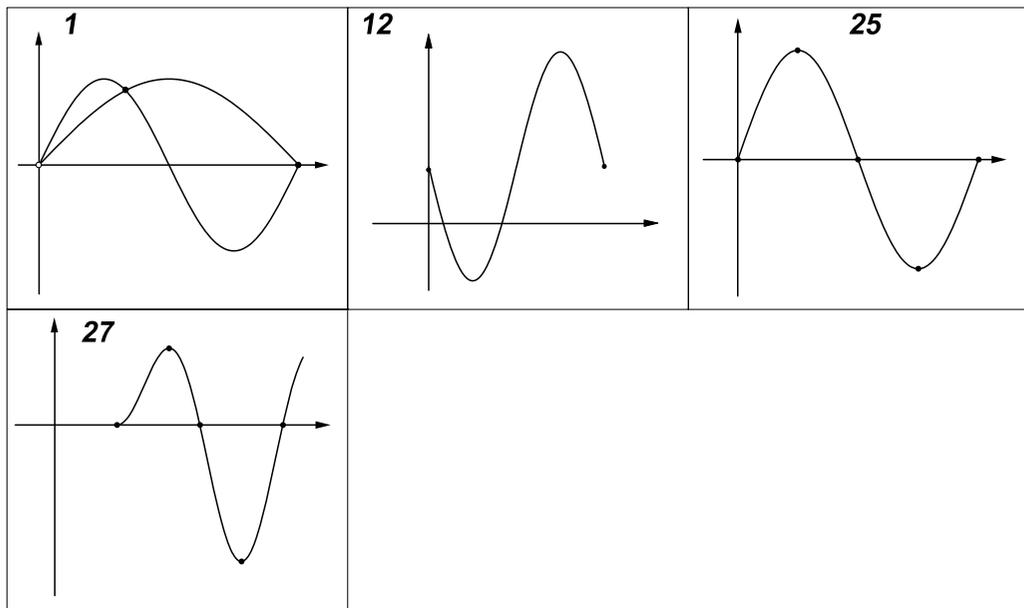
א. נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן. נמק.

ב. משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לציר x .

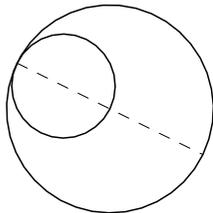
ג. השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $f(x)$,

ע"י המשיק שאת משוואתו מצאת, וע"י ציר y .

תשובות



מעגל שמשרטט קו ישר



בציור מעגל קטן משיק למעגל גדול מבפנים.

אורך רדיוס המעגל הגדול גדול פי שניים מאורך רדיוס המעגל הקטן.

אם ננעץ כלי כתיבה על המעגל הקטן בנקודת ההשקה,

ונסובב אותו לאורך היקף המעגל הגדול מבפנים תוך כדי המשך השקתו לו,

המסלול שישרטט כלי הכתיבה יהיה קו ישר!

תשובות

38. א. $\max_{ab} (2\pi, 2\pi + 1)$, $\min_{ab} (0, 1)$, $y = \pi$ ב. $S = \frac{\pi^2}{8} - 1 = 0.2337$ (יחידה ריבועית) ג.

מבנה מבחן הבגרות לשאלון 482 (805)

שאלון ד' (35804) מהווה 65% מהציון הסופי.

שאלון ה' (35805) מהווה 35% מהציון הסופי.

משך זמן המבחן: שעה ושלושה רבעים.

פרק א - בחירה: שאלה אחת מתוך שתי שאלות.

סדרות, טריגונומטריה במרחב.

פרק ב - בחירה: שתי שאלות מתוך 3 שאלות.

בעיות גדילה ודעיכה, חדר"א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות חזקה (עם מעריך רציונלי),

פונקציות מעריכיות, פונקציות לוגריתמיות.

הערה חשובה:

מבנה זה מיושם החל ממועד חורף תשע"ג, ולכן מבנה כל המבחנים בספר עד מועד חורף תשע"ג,

שונים מהמבנה לעיל.

הגרפים הנדרשים במבחנים של חלק זה - מוצגים בסוף הספר

13 - מול של שם

לנח היו שלושה בנים: שם, חם ויפת.

היהודים (וגם הערבים) הם בני שם. מכאן המילה אנטישמיות (אנטי שם).

הצאצא ה־13 של שם הוא יקטן: עילם, אשור, ארפכשד, לוד, ארם, עוץ, חול, גתר, מש, שלח, עבר, פלג, יקטן.

ליקטן היו 13 ילדים: אלמורד, שלף, חצרמות, ירח, הרורם, אוול, דקלה, עובל, אבימאל, שבא, אופר, חוילה, יובב.

הפרשיה המספרת לנו זאת היא כבראשית. פרק י', פסוקים כ"א-ל"ב.

$$13^2 = 169 \text{ יקטן בגימטריה שווה}$$

סכום הגימטריות של כל 13 צאצאי שם מתחלק ב־13:

$$\text{עילם (150) + אשור (507) + ארפכשד (605) + לוד (40) + ארם (241) + עוץ (166) + חול (44)}$$

$$+ \text{גתר (603) + מש (340) + שלח (338) + עבר (272) + פלג (113) + יקטן (169) = 3588 : 13 = 276}$$

סכום הגימטריות של כל 13 צאצאי יקטן מתחלק ב־13:

$$\text{אלמורד (85) + שלף (410) + חצרמות (744) + ירח (218) + הרורם (255) + אוול (44) + דקלה (139)}$$

$$+ \text{עובל (108) + אבימאל (84) + שבא (303) + אופר (287) + חוילה (59) + יובב (20) = 2756}$$

$$2756 : 13 = 212$$

בחומש מתוקמות פרשיות באותיות 'פ' (פתוחה) או 'ס' (סגורה).

הפרשיה שמספרת לנו את תולדות שם נמצאת כבראשית פרק י' פסוקים כ"א-כ"ט.

מספר המילים באותה פרשיה מתחלק ב־13, ומספר האותיות באותה פרשיה מתחלק ב־13.

$$\text{הפרשיה מכילה 104 מילים (8 = 13 : 104), ו־390 אותיות (10 = 13 : 390)}$$

הצימוק שבעוגה: המילה ה־169 (13²) בספר דברי הימים היא: יקטן !!!

(אוסקר גולדברג / הרב שמואל יניב)

מבחן 1 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד א

בחירה: שלוש שאלות מתוך ארבע.

גדילה ודעיכה

1. מ^ר 100gr חומר רדיואקטיבי I נשארו כעבור 4 שנים 72gr שלא התפרקו.

א. מצא את זמן מחצית החיים של חומר I.

זמן מחצית חיים של חומר רדיואקטיבי II גדול פי 2 מזמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי I.

ב. מצא באיזה אחוז קטנה כל שנה כמות החומר II.

ג. מצא את הכמות של חומר II שממנה יישארו 80gr כעבור 4 שנים.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

2. נתונה הפונקציה $y = x + \frac{4}{x-1}$ בתחום $x > 1$.

העבירו לגרף הפונקציה משיק שמשוואתו $y = 5$,

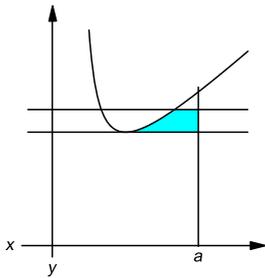
והעבירו ישר המקביל למשיק ונמצא מעליו

במרחק יחידה אחת ממנו.

א. מצא את השיעורים של נקודת ההשקה של המשיק לגרף הפונקציה.

ב. השטח, המוגבל על ידי שני הישרים המקבילים, על ידי גרף הפונקציה

ועל ידי הישר $x = a$, שווה ל- $4 \ln 2 - 1$. מצא את הערך של a.



3. שאלה זו כבר אינה בחומר הלימודים של שאלון זה (בעית קיצון).

המלחמה הקצרה ביותר

מלחמת אנגליה-זנויבר התנהלה בין האימפריה הבריטית לזנויבר ב-27.8.1896. המלחמה ארכה 38 דקות.

הסולטאן של זנויבר עד אז, שיתף פעולה עם הבריטים. אחיינו תפס את השלטון לאחר מות הסולטאן.

הבריטים דרשו ממנו להתפטר כי העדיפו מועמד אחר.

לאחר שפקע האולטימטום שלהם לאותו אחיין בשעה 9:00 בבוקר, הפגיוו ספינות הצי את הארמון, היאכטה של

המושל ואת המגדלור המקומי. ההפגזה הופסקה לאחר 38 דקות וכך בא הקץ לשלטונו של האחיין.

במהלך אותם 38 דקות נהרגו כ-500 איש.

זה עדיין פחות מקצב המוות שהיה במלחמת העולם שניה: כ-1200 מידי שעה!



1. א. 8.44years ב. 4.02% ג. 94.27gr

2. א. (3, 5) ב. a = 6

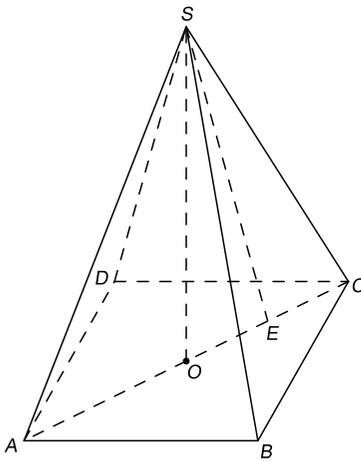
3. $A(\ln 2, 24)$

מבחן 36 - קיץ תשע"ט - 2019 - מועד ב

בחירה: שלוש שאלות: שאלה אחת מהשאלות 1-2, שתי שאלות מהשאלות 3-5.

פרק ראשון - סדרות, טריגונומטריה במרחב

1. נתונות שתי סדרות חשבוניות, a_n ו- b_n . $a_1 = b_1$.
- הפרש הסדרה a_n הוא d והפרש הסדרה b_n הוא $d+1$. a_4 גדול ב-2 מ- b_3 .
- א. מצא את ערכו של d .
- ב. הראה כי $b_n = a_n + n - 1$.
- בכל אחת מהסדרות a_n ו- b_n יש n איברים.
- ג. הבע באמצעות n את ההפרש בין סכום כל האיברים בסדרה b_n ובין סכום כל האיברים בסדרה a_n .
- נתון כי ההפרש בין סכום כל איברי הסדרה b_n לסכום כל איברי הסדרה a_n הוא 780, וסכום כל איברי הסדרה a_n הוא 3,040.
- ד. מצא את ערכו של a_1 .



2. נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה הוא ריבוע. שטח בסיס הפירמידה הוא $4a^2$. $a > 0$ הוא פרמטר.
- א. הבע באמצעות a את אורך אלכסון הבסיס. נתון כי הזווית שבין מקצוע צדדי ובין בסיס הפירמידה היא 67° .
- ב. הבע באמצעות a את גובה הפירמידה, SO . נתון כי נפח הפירמידה הוא 15 יחידות קוב.
- ג. (1) חשב את ערכו של הפרמטר a . (2) הנקודה E היא אמצע הקטע OC . חשב את שטח המשולש ASE .
- ד. חיברו את אמצעי צלעות הבסיס לקדקוד הפירמידה, S , כך שנוצרה פירמידה ישרה חדשה. חשב את נפח הפירמידה החדשה.

מי שמדבר איתך על אחרים - מדבר עם אחרים עליך.

השאלות

1. א. $d = 4$ ג. $S_{b_n} - S_{a_n} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{n(n-1)}{2}$ ד. $a_1 = -2$
2. א. $AC = a\sqrt{8}$ (יחידות אורך) ב. $SO = 3.33a$ (יחידות אורך)
- ג. (1) $a = 1.5$ (יחידות אורך) (2) $S_{\triangle ASE} = 7.94$ (יחידות ריבועיות) ד. $V = 7.49$ (יחידות קוב)

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1 + \ln x}{ax}$, $a > 0$, הוא פרמטר.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- ג. מצא את שיעור x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.
- ד. רשום את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- נתון כי שיעור y של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא $\frac{1}{4}$.
- ה. (1) מצא את ערכו של הפרמטר a .
- (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x)$.

1. רשום את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה. נמק.

בהצלחה

זכות היצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

באחד הימים, כשעבדתי בגינה שלי, השכנים שלי, שחזרו מטיול עם כלבם, עצרו לפטפט איתי. תוך כדי שיחה ידידותית, שאלתי את ביתם בת ה-12 מה היא רוצה להיות כשהיא תהיה גדולה. "נשיאת ארה"ב", היא ענתה.

שאלתי אותה: "אילו היית הנשיאה, מה הרבר הראשון שהיית עושה?"

היא ענתה: "הייתי מחלקת מזון ודואגת למגורים לכל חסרי הבית."

שני הוריה, הרמוקרטים, עמדו שם וזרחו מגאווה.

אמרתי: "וואו, איזו מטרה נעלה! אבל את לא חייבת לחכות עד שתהיי נשיאה...".

"למה הכוונה?" שאלה הילדה.

עניתי: "את יכולה לבא אלי, לכסא את הרשא, לנכש עשבים ולקצוץ את הגדר החיה."

אני אתן לך 50%, תוכלי ללכת למקום בו מרוכזים ההומלסים ולתת להם את הכסף

כדי שיקנו לעצמם אוכל, או ישלמו עבור דיוור."

הילדה חשבה על כך מספר שניות וענתה:

"למה שחסר הבית לא יבא אליך, יעבוד אצלך ואז אתה תתן לו את הכסף?"

צחקתי ואמרתי לה: "ברוכה הבאה למפלגה הרפוליקנית."

הוריה אינם מדברים איתי מאז...



אלתן

5. א. $x > 0$ ב. $(\frac{1}{e}, 0)$ ג. $x_{\max} = 1$ ד. $x > 1$, ∇ : $0 < x < 1$

ה. (1) $a = 4$ (2) בסוף הספר 1. $\min(1, -\frac{1}{4})$

דוגמאות שאלות - משרד החינוך

בעקבות בקשות הבהרה של מורים. פרסם משרד החינוך דוגמאות שאלות למבחני בגרות. שאמורות לייצג את רמת הידע הנדרשת ואת רמת המורכבות של השאלות במבחן עצמו.

אנליזה - פונקציות מעריכיות

1. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2-2}{e^{2x}}$.

- א. מצא את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (2) השיעורים של נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- (3) השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- (4) תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

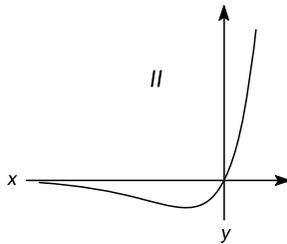
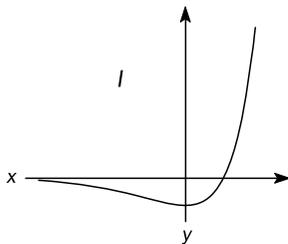
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצא את ערכי x שעבורם גם ערכי הפונקציה $f(x)$ וגם ערכי נגזרתה $f'(x)$ חיוביים.

ד. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x) = \sqrt{\frac{x^2-2}{e^{2x}}}$.

2. נתונה נגזרת של הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2 \ln 3 \cdot (3^{2x} - 3^x)$.

א. איזה גרף מביין השניים שלפניך מתאר את $f'(x)$? נמק.



ב. נתון כי $f(0) = -1$.

מצא את: (1) $f(x)$.

(2) נקודת הקיצון של $f(x)$ וקבע את סוגה.

(3) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר x .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל-ידי הצירים.

תשובות

1. א. (1) $\forall x$ (2) $(0, -2)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$

(3) $\min(-1, -e^2)$, $\max(2, \frac{2}{e^4})$ (4) \downarrow : $(x < -1) \cup (x > 2)$, \uparrow : $-1 < x < 2$

ב. בסוף הספר ג. $\sqrt{2} < x < 2$ ד. $(x \leq -\sqrt{2}) \cup (x \geq \sqrt{2})$

2. א. II ב. (1) $f(x) = 3^{2x} - 2 \cdot 3^x$ (2) $\min(0, -1)$ (3) $(\log_3 2, 0) \equiv (0.631, 0)$

ג. בסוף הספר ד. $S = \frac{1}{\ln 9} = 0.4551$ (יחידה ריבועית)

אנליזה - פונקציות טריגונומטריות

3. נתונה הפונקציה $y = (a \sin x + \cos x)^2$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 0$ שווה ל-2.

א. מצא את ערכו של הפרמטר a .

ב. הצב בפונקציה $a = 1$ ומצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה וציר x ,

בין שתי נקודות המינימום המוחלט של הפונקציה בתחום הנתון.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^2 x - 2 \cos x + mx$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

הישר $x = \pi$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הקיצון היחידה שלו בתחום הנתון.

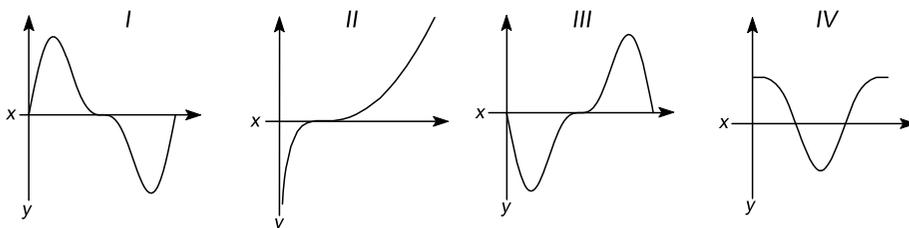
נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה בתחום היא מקסימלית.

א. מצא את ערכו של הפרמטר m .

ב. הצב בפונקציה $m = 0$ ומצא את נקודות הקיצון המוחלטות של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. קבע איזה מבין הגרפים שלפניך מתאים לגרף הנגזרת $f'(x)$. נמק.



ה. מצא את השטח הכלוא בין גרף פונקצית הנגזרת ובין ציר x בתחום הנתון.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $-2\pi \leq x \leq 0$. הסבר.

תשובות

3. א. $a = 1$ ב. $\min_{ep} (0, 1)$, $\max (\frac{\pi}{4}, 2)$, $\min (\frac{3\pi}{4}, 0)$, $\max (\frac{5\pi}{4}, 2)$, $\min (\frac{7\pi}{4}, 0)$, $\max_{ep} (2\pi, 1)$

ג. בסוף הספר ד. $S = \pi$ (יחידות ריבועיות)

4. א. $m = 0$ ב. $\min_{ab} (0, -2)$, $\min_{ab} (2\pi, -2)$, $\max_{ab} (\pi, 2)$

ג. בסוף הספר ד. I ה. $S = 8$ (יחידות ריבועיות) ו. בסוף הספר

תשובות

<p>2/2 A(3)</p>	<p>4/2 C</p>	<p>4/2 E</p>
<p>5/3 C</p>	<p>6/2 E</p>	<p>7/3 A</p>
<p>11/3 C</p>	<p>12/4 C(3)</p>	<p>12/4 D</p>
<p>13/3 C</p>	<p>13/5 E</p>	<p>14/4 C</p>
<p>15/4 C</p>	<p>15/5 C(3)</p>	<p>16/3 B</p>

תשובות

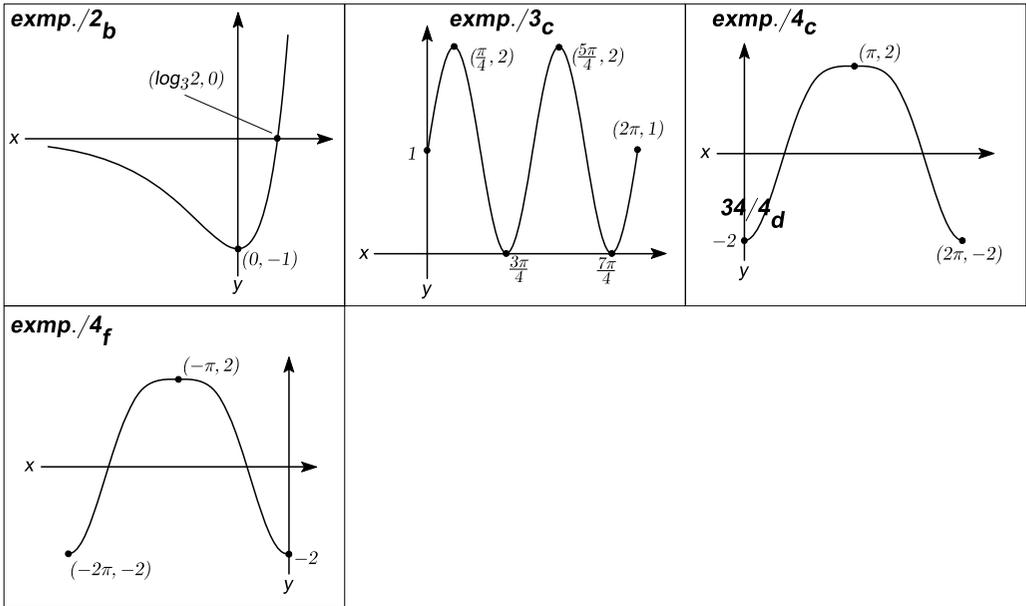
<p>17/3 B(3)</p>	<p>18/3 D</p>	<p>19/4 C(3)</p>
<p>19/5 B(3)</p>	<p>20/5 c</p>	<p>22/3 c</p>
<p>23/4 b(3)</p>	<p>23/5 c</p>	<p>23/5 d(1)</p>
<p>24/4 c(3)</p>	<p>25/4 b</p>	<p>25/5 a5</p>
<p>26/3 a(3)</p>	<p>26/4 a(3)</p>	<p>26/5 d(2)</p>

תהלות

<p>27/3_b</p>	<p>27/4_{c(2)}</p>	<p>27/5_d</p>
<p>28/5_d</p>	<p>29/3_c</p>	<p>29/4_{c4}</p>
<p>29/5_{e,f}</p>	<p>30/3_c</p>	<p>30/3_d</p>
<p>30/4_b</p>	<p>31/3_b</p>	<p>31/4_{b(3)}</p>
<p>31/5_{a(5)}</p>	<p>31/5_{b(2)}</p>	<p>32/3_d</p>

תהלות

<p>32/4 c(3)</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ that passes through the point $(\ln 3, 0)$ on the x-axis and the point $(0, -8)$ on the y-axis.</p>	<p>33/3 b</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ with points $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{2})$, and $(\frac{\pi}{2}, 1)$.</p>	<p>33/4 c(2)</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ with a point $(\ln 2, -\frac{1}{4})$.</p>
<p>33/5 a(5)</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ with points $(-\sqrt{e}, \frac{1}{e})$ and $(\sqrt{e}, \frac{1}{e})$.</p>	<p>34/3 c,d(1)</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ and its derivative $f'(x)$. Points on $f(x)$ include $(-\pi, 6)$, $(-\frac{\pi}{2}, 7)$, $(\frac{\pi}{2}, 7)$, $(\pi, 6)$, and $(0, 6)$. The x-axis has points $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, and π.</p>	<p>34/4 d</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ with points $(-3, -1)$ and $(-2, -1)$.</p>
<p>34/5 d,e</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ and its negative $-f(x)$. A point $(\sqrt{e}, 0)$ is marked on the x-axis.</p>	<p>35/3 d</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ with points $(0, \frac{3}{4})$, $(\frac{\pi}{6}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, -2\frac{1}{4})$, $(\frac{2\pi}{6}, 0)$, and $(\pi, \frac{3}{4})$.</p>	<p>35/4 d</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ with points $(0, 6)$ and $(\ln 2, 0)$.</p>
<p>35/4 e(2)</p> <p>A Cartesian coordinate system showing two curves $f(x)$ and $g(x)$ with points $(\ln 2, 0)$ and $(0, -3)$.</p>	<p>35/5 d(3)</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ with a point $(\frac{1}{2}, \ln 2\frac{1}{4})$ and a vertical dashed line at $x=3$.</p>	<p>36/3 d</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ with points $(-\frac{\pi}{2}, 2)$, $(\frac{\pi}{2}, 2)$, $(\frac{2\pi}{3}, 1\frac{3}{4})$, and $(0, 1)$.</p>
<p>36/4 c</p> <p>A Cartesian coordinate system showing two curves $f(x)$ and $g(x)$ with points $(1, e-1)$ and $(\frac{1}{e}, 0)$. A horizontal dashed line is at $y=-1$.</p>	<p>36/5 e(2)</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ with points $(1, \frac{1}{4})$ and $(\frac{1}{e}, 0)$.</p>	<p>exmp./1 b</p> <p>A Cartesian coordinate system showing a curve $f(x)$ with points $(-1, -e^2)$, $(\sqrt{2}, 0)$, and a maximum at $(2, \frac{2}{e^4})$.</p>



מעגל תשע הנקודות

בשנת 1765 גילה **אویلר** שתשע הנקודות הבאות במשולש: אמצעי הצלעות, עקבי גבהי המשולש, ונקודות האמצע שבין קדקודי המשולש לנקודת מפגש גבהיו - נמצאים על מעגל אחד. ב-1822 גילה **קרל וילהלם פיינברך** שמעגל זה משיק גם לשלושת המעגלים המשיקים למשולש מבחוץ.

מעגל זה נקרא גם '**מעגל אוילר**' וגם '**מעגל פיינברך**'.

יש נקודות שמתלכדות בחלק מהמשולשים:

במשולש שווה-שוקיים יש שמונה נקודות (הגובה לבסיס הוא גם תיכון).

במשולש שווה-צלעות - שש נקודות, במשולש ישר-זווית - חמש נקודות

ובמשולש ישר-זווית ושווה-שוקיים - ארבע נקודות.

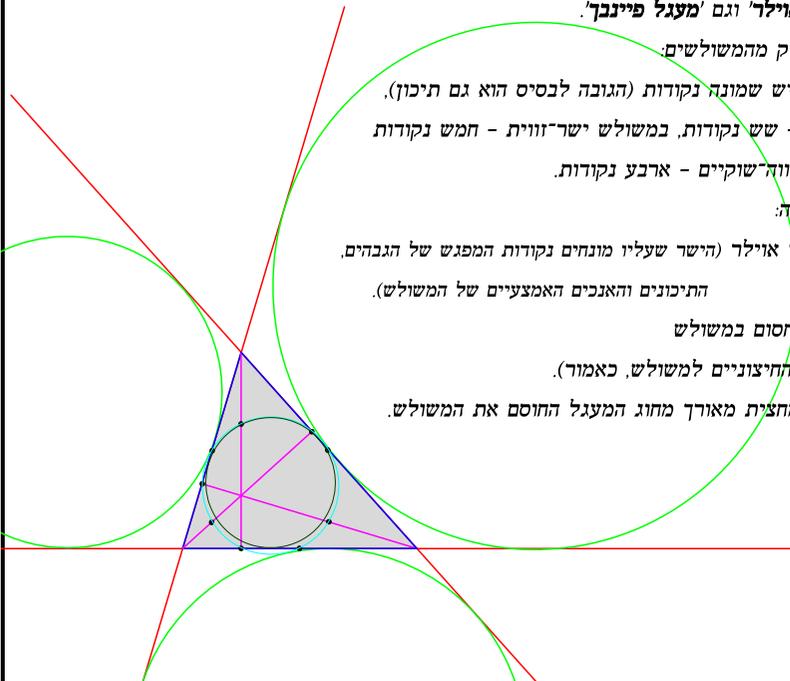
תכונות נוספות של מעגל זה:

מרכז המעגל נמצא על ישר אוילר (הישר שעליו מונחים נקודות המפגש של הגבהים, התיכונים והאנכים האמצעיים של המשולש).

המעגל משיק גם למעגל החוסם במשולש

(בנוסף לשלושת המעגלים החיצוניים למשולש, כאמור).

אורך מחוג המעגל שווה למחצית מאורך מחוג המעגל החוסם את המשולש.



סיווג שאלות המבחנים - חלק ב

פענוח הרישום: שאלה/מבחן. דוגמה: 38/4 - מבחן 38 שאלה 4. את הסיווג הכין שרון חיים.

		גידול ודעיכה
20/1, 24/1	סדרה יורדת/עולה	הסיווג לפי הפרמטר הנדרש לחישוב בסעיף הראשון של השאלה
20/1	- איברים/סכומים חיוביים/שליליים	- מצב התחלתי
21/1	- סכום כל האיברים שאחרי איבר נתון	- זמן
15/1	- אי-שוויון	- קצב גידול/דעיכה
22/1	- בעיות מעשיות תנועה	- מצב סופי
25/1, 27/1, 28/1, 29/1, 32/1	סדרות נסיגה - כסדרה חשבונית	- זמן מחצית החיים
8/1, 10/1, 18/1	- כסדרה הנדסית	- הבעה באמצעות פרמטר
18/1	- איברים עוקבים	סדרות חשבונית - נוסחת האיבר הכללי ונוסחת סכום הסדרה
27/1	- איבר אמצעי	- סדרה יורדת/עולה
25/1, 28/1	- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים	- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
18/1	- סכום כל האיברים שאחרי איבר נתון	- איברים/סכומים חיוביים/שליליים
8/1, 10/1, 18/1, 25/1, 28/1, 29/1, 32/1	- שתי סדרות (a_n, b_n)	- איבר במקום $2n-1$
8/1, 10/1	- מציאת ערך פרמטר	- סכום איברים אחרונים
10/1, 28/1, 29/1	- הבעה באמצעות פרמטר	- סכום כל האיברים שלפני איבר נתון
	טריגונומטריה במרחב מנסרה ישרה משולשת שבסיסה:	- סדרה בת $2n$ איברים
12/2, 27/2, 35/2	- משולש שווה-שוקיים	- שתי סדרות (a_n, b_n)
13/2	- משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים	- שלוש סדרות (a_n, b_n, c_n)
10/2, 14/2, 22/2	- משולש שווה-צלעות (משוכללת)	- בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה
7/4, 19/2	תיבה	- הבעה באמצעות פרמטר
4/4, 8/4, 31/2	- תיבה שבסיסה ריבוע	- בעיות מעשיות כללי
23/2, 33/2, 34/2	קוביה	קנייה ומכירה
	פירמידה משולשת ישרה שבסיסה	תנועה
21/2	- משולש ישר-זווית	סדרה הנדסית
18/2	- משולש שווה-שוקיים	- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
3/4, 6/4, 29/2	- משולש שווה-צלעות (משוכללת)	- סכום איברים אחרונים
	פירמידה ישרה מרובעת שבסיסה	סדרה הנדסית אינסופית יורדת
9/4, 18/2, 25/2, 26/2	- מלבן	- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
1/4, 2/4, 5/4, 11/2, 15/2, 16/2, 17/2, 24/2, 28/2, 30/2, 32/2, 36/2	- ריבוע	- איברים/סכומים חיוביים/שליליים
4/4, 6/4, 7/4, 8/4, 10/2, 11/2, 13/2, 14/2, 15/2, 16/2, 17/2, 20/2, 21/2, 22/2, 29/2, 31/2, 34/2, 36/2	הבעה באמצעות פרמטר	- סימנים מתחלפים/היפוך סימנים
	חישובי זוויות (נתון או צ"ל)	- סכום ריבועי האיברים
2/4, 5/4, 7/4, 9/4, 12/2, 16/2, 19/2, 20/2, 21/2, 23/2, 25/2, 26/2, 27/2, 34/2	- בין ישרים	- שתי סדרות (a_n, b_n)
3/4, 4/4, 5/4, 6/4, 7/4, 8/4, 9/4, 10/2, 11/2, 12/2, 13/2, 14/2, 15/2, 17/2, 18/2, 20/2, 21/2, 22/2, 24/2, 25/2, 26/2, 27/2, 28/2, 29/2, 30/2, 31/2, 32/2, 33/2, 34/2, 35/2	- בין ישר למישור	- בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה
5/4, 9/4, 12/2, 20/2, 21/2, 25/2, 26/2, 27/2, 34/2	- בין ישר למישור	- הבעה באמצעות פרמטר
	סדרות מעורבות	סדרות מעורבות - חשבונית-הנדסית
	- בין ישרים וגם בין ישר למישור (חיתוך שתי הקטגוריות הקודמות)	- חשבונית-הנדסית אינסופית יורדת
		- איברים עוקבים

הנוסחאות הרשמי לארבע יחידות

אלגברה

נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- סדרות:

סדרה הנרסית	סדרה חשבונית	כלל נסיגה
$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$	
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	האיבר ה-n
$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	סכום
$S = \frac{a_1}{1 - q}$: סכום אינסופי	$S_n = \frac{n \cdot [2a_1 + (n - 1)d]}{2}$	

- חוקות: $(a \neq 0, b \neq 0)$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

לוגריתמים $(a, b, c > 0 ; a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

גאומטריה אנליטית

שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר $y = mx + b$ העובר בנקודה (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי נקודת האמצע $M(x_M, y_M)$ של קטע שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הם:

$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו- m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

משוואת מעגל שמרכזו (a, b) , ורדיוסו R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל- k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית, כאשר

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{כאשר } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, - נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

טריגונומטריה

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

- משפט הסינוסים: (R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

- משפט הקוסינוסים: (γ היא הזווית הכלואה בין a ל- b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$

- שטח משולש: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל- c)

- גופים במרחב: מנסרה ישרה וגליל: נפח: $V = B \cdot h$ (B - שטח הבסיס, h - גובה הגוף)

שטח מעטפת: $M = P \cdot h$ (P - היקף הבסיס, h - גובה הגוף)

פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס, h - גובה הגוף)

שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול, l - הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות:

$$(x^t)' = t x^{t-1}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

נגזרת של מכפלת פונקציות: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

נגזרת של מנת פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקציה מורכבת: $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת

של u לפי x (נגזרת פנימית) ו- $f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז: $\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + c$