מספר מילים לפני

ספר זה מכיל שאלות ממבחני הבגרות בין השנים 2004–2019, המתאימות לשאלונים 481 ו־581 (804 ו־806) בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. משרד החינוך פרסם המלצה לחלוקה חומר הלימוד לכיתות י–יא. ספר זה מכיל את החומר המתאים לכיתה י על בסיס המלצה זו (ולא בדיוק לפיה) ועל־פי המלצות מורים המלמדים כיתות י. המבחנים המקוריים של שאלונים אלו מופיעים בספרים הרגילים של שאלונים אלו שיצאו בנפרד (39 מבחני 481 (804), ו־35 מבחני 581 (806)). השאלות מחולקות לפי נושאים ומובאות עם פתרון מלא. לכל שאלה תשובה סופית בעמוד השאלה ופתרון מלא בצמוד לפרק, עם הפניה למספר העמוד (המספר המעובה משמאל לכל שאלה).

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

$\forall$ – לכל , $\in$ – שייך , $\nearrow$ – עליה , $\searrow$ – ירידה , $\cup$ – איחוד: היחס 'או' , $\emptyset$ – קבוצה ריקה

$\checkmark$ – אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח , ab. – מוחלט , ep. – נקודת קָצֶה (end point)

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'.
ככלל – סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעִתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ־2012 עד 2017 (מועד א), כפי שהם בספר, נמצאים באתר ההוצאה במִרְשֶׁתֶת (internet), בעלות שנתית מגוחכת של 20 (עשרים) שקלים בלבד. ראו בגב הכריכה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי – בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל.
כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורים מ**ארכימדס – פתרונות למידה** ולמורה **שריף אמארה** מכפר זָלָפָה.

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התש"פ – 2020), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את חלק מהחללים שבין השאלות והפתרונות לְחַלְחֵתִי בהבזקי אנקדוטות וסיפורים. ה'הבזקים' קשורים למתמטיקה, חלקם אינו כזה, וביניהם גם אנקדוטות בעלות אופי **לאומי או יהודי**.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על־ידי חברת 'קל־ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה אלי מיטב

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יָצאו לשאלונים 582-581-482-481-382

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יָצאו לשאלונים 582-581-482-481

אלגברה

חקירת משוואה בנעלם אחד ממעלה ראשונה - שאלות

(כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 005.)

1. (קיץ תשס"ה - 2005 , מועד א) נתונה המשוואה $\frac{2x}{m^2-5m+6}+\frac{mx}{m-2}=7$.

א. לאילו ערכים של m יש פתרון למשוואה? **(3)**

2. (קיץ תשס"ו - 2006 , לוחמים) נתונה המשוואה $a(1+x)+2=a^2(1-x)$.

א. מצא עבור איזה ערך של a יש למשוואה אין־סוף פתרונות.

ב. מצא עבור איזה ערך של a אין פתרון למשוואה.

ג. מצא עבור אילו ערכים של a יש פתרון יחיד למשוואה. **(3)**

ד. מצא עבור אילו ערכים של a הפתרון היחיד של המשוואה מקיים $x^2-1>0$.

3. (קיץ תשס"ז - 2007 , מועד ב) נתונה המשוואה $x-2=a(a-3-x)$.

א. מצא עבור אילו ערכים של a יש פתרון יחיד למשוואה.

ב. מצא עבור אילו ערכים של a הפתרון היחיד של המשוואה הנתונה, מקיים את אי־השוויון $x+2<0$. **(4)**

4. (סתיו תש"ע - 2009 , לוחמים) נתונה המשוואה: $mx+4x-1=\frac{3-3x}{m}$, $m\neq 0$.

א. מצא עבור אילו ערכי m : **(1)** יש למשוואה אין־סוף פתרונות.

(2) אין למשוואה פתרון.

(3) יש למשוואה פתרון יחיד.

ב. הבע באמצעות m את הפתרון היחיד של המשוואה. **(4)**

ג. מצא עבור אילו ערכים של m הפתרון היחיד של המשוואה קטן מ־ $m+1$.

תשובות

1. **א.** $m\neq 1\ ,\ m\neq 2\ ,\ m\neq 3$

2. **א.** $a=-1$ **ב.** $a=0$ **ג.** $a\neq 0\ ,\ a\neq -1$ **ד.** $(a<-1)\cup(-1<a<0)\cup(0<a<1)$

3. **א.** $a\neq -1$ **ב.** $a<-1$

4. **א.** **(1)** $m=-3$ **(2)** $m=0\ ,\ m=-1$ **(3)** $m\neq 0\ ,\ m\neq -1\ ,\ m\neq -3$ **ב.** $x=\frac{1}{m+1}$

ג. $(-2<m<-1)\cup(m>0)$

5. (קיץ תשע"ב - 2012 , מועד ב)

א. נתונה המשוואה $(6m-2m^2)x = m^2-4m+3$. m הוא פרמטר.

מצא עבור אילו ערכי m (אם יש כאלה): **(1)** יש אינסוף פתרונות למשוואה.

(2) אין פתרון למשוואה.

(3) למשוואה יש פתרון יחיד.

ב. **(1)** הבע באמצעות m את הפתרון היחיד של המשוואה.

(2) נקודה A נמצאת על הישר $y = m(2m+5)x$.

(m הוא הפרמטר של המשוואה הנתונה.)

שיעור x של הנקודה A הוא הפתרון היחיד שהבעת בתת־סעיף ב(1).

מצא עבור אילו ערכי m הנקודה A נמצאת מתחת לציר x . **(5)**

6. (קיץ תשע"א - 2011 , מועד ב)

נתונה המשוואה $(a^2-2a-15)y = (a^2-3a-10)x+7$. a פרמטר.

א. מצא עבור איזה ערך של a : **(1)** המשוואה מייצגת ישר המקביל לציר x .

(2) המשוואה מייצגת ישר המקביל לציר y .

(3) אין פתרון למשוואה. **(5)**

7. (חורף תשע"ג - 2013) נתונה משוואת הישר $y = mx+4-3m$. m הוא פרמטר.

א. מצא עבור איזה ערך של m הישר עובר דרך ראשית הצירים.

ב. מצא עבור אילו ערכים של m הישר חותך את ציר x בחלקו השלילי.

(סעיף זה אינו בתכנית הלימודים של 4-5 יחידות, למעט יישום בחדו"א. א.מ.)

ג. ישר, המקיים את המשוואה הנתונה, מקביל לציר x . **(6)**

(1) מצא את המשוואה של ישר זה.

(2) מצא עבור אילו ערכים של x , יהיה ישר זה מתחת לישר שבסעיף א.

ד. כל הישרים שמקיימים את המשוואה הנתונה (עבור ערכים שונים של m) עוברים דרך אותה נקודה A . מצא את שיעורי הנקודה A .

תשובות

5. **א.** **(1)** $m=3$ **(2)** $m=0$ **(3)** $m\neq 0\ ,\ m\neq 3$

ב. **(1)** $x=\frac{1-m}{2m}$ **(2)** $(m<-2.5)\cup(1<m<3)\cup(m>3)$

6. **א.** **(1)** $a=-2$ **(2)** $a=-3$ **(3)** $a=5$

7. **א.** $m=\frac{4}{3}$ **ב.** $0<m<\frac{4}{3}$ **ג.** **(1)** $y=4$ **(2)** $x>3$ **ד.** $A(3,4)$

אלגברה - חקירת משוואה בנעלם אחד ממעלה ראשונה - פתרונות

1. א.

$m^2-5m+6=0$

$m_{1,2}=\frac{5\pm1}{2} \Rightarrow m_1=3\ ,\ m_2=2 \Rightarrow m^2-5m+6=(m-2)(m-3)$

תחום הגדרה: $m\neq2\ ,\ m\neq3$; $\frac{2x}{m^2-5m+6}+\frac{mx}{m-2}=\frac{2x}{(m-2)(m-3)}+\frac{mx}{m-2}=7\ \ /\cdot(m-2)(m-3)$

$2x+mx(m-3)=7(m-2)(m-3) \Rightarrow x(2+m^2-3m)=7(m-2)(m-3)\ \ (*)$

$m^2-3m+2=0 \Rightarrow m_{1,2}=\frac{3\pm1}{2} \Rightarrow m_1=2\ ,\ m_2=1 \Rightarrow m^2-3m+2=(m-1)(m-2)$

$(*)\ \ x(m-1)(m-2)=7(m-2)(m-3) \Rightarrow x=\frac{7(m-2)(m-3)}{(m-1)(m-2)}=\frac{7(m-3)}{m-1}$

עבור $m=1$ נקבל בכוכבית $(*)$: $0=14$ - סתירה

$\Leftarrow$ למשוואה יש פתרון כאשר: $\mathbf{m\neq1\ ,\ m\neq2\ ,\ m\neq3}$

---

2. א-ב-ג.

$a(1+x)+2=a^2(1-x) \Rightarrow a+ax+2=a^2-a^2x \Rightarrow a^2x+ax=a^2-a-2$

$\underline{ax(a+1)\overset{*}{=}(a-2)(a+1)}$

$(*)\ \ a^2-a-2\overset{?}{=}0 \rightarrow a_{1,2}=\frac{1\pm3}{2} \Rightarrow a_1=2\ ,\ a_2=-1 \Rightarrow a^2-a-2=(a-2)(a+1)$

$\underline{a=0:}\quad 0=-2 \Rightarrow$ **$a=0$ אין פתרון**

$\underline{a=-1:}\quad 0=0 \Rightarrow$ **$a=-1$ כל מספר**
(אין־סוף פתרונות)

$\Rightarrow$ **$a\neq0\ ,\ a\neq-1$ פתרון יחיד**

ד.

$x=\frac{(a-2)(a+1)}{a(a+1)}=\frac{a-2}{a} \rightarrow \left(\frac{a-2}{a}\right)^2-1>0 \Rightarrow \frac{a^2-4a+4}{a^2}-1>0\ \ /\cdot a^2$

$a^2-4a+4-a^2>0 \Rightarrow -4a+4>0\ \ /-4$

$-4a>-4\ \ /:(-4) \Rightarrow a<1$

$\underbrace{(a<1)\cap(a\neq-1)\cap(a\neq0)}_{\text{התנאים לפתרון יחיד}} \Rightarrow \mathbf{(a<-1)\cup(-1<a<0)\cup(0<a<1)}$

> **שלום מתוזמן**
>
> *המילה 'שלום' מופיעה בפעם הראשונה בבראשית בברית בין הבתרים (בראשית ט"ו ט"ו).*
> *פסוק זה הוא הפסוק ה־376 בתורה. מספר זה הוא בדיוק הערך הגימטרי של המילה 'שלום'.*

3. א.

$x-2=a(a-3-x) \quad \Rightarrow \quad x-2=a^2-3a-ax \quad \Rightarrow \quad x+ax=a^2-3a+2$

$\Rightarrow \quad x(1+a)=a^2-3a+2$

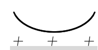
$a=-1 \quad \Rightarrow \quad 0=2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a \neq -1}$

(אם היינו מקבלים $0=0$ אזי עבור $a=-1$ הפתרון הוא כל x ממשי.)

ב.

$x=\frac{a^2-3a+2}{1+a} \quad \Rightarrow \quad x+2=\frac{a^2-3a+2}{1+a}+2=\frac{a^2-3a+2+2+2a}{1+a}=\frac{a^2-a+4}{1+a}<0$

פירוק הטרינום שבמונה:

$a^2-a+4 \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{-15}}{2}=\emptyset \;,\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{המקדם של } a^2}}{1>0} \quad \Rightarrow$  $a^2-a+4>0 \;\; \forall x$

$\Rightarrow \quad (\frac{a^2-a+4}{1+a}<0 \iff 1+a<0) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a<-1}$

---

4. א.

$mx+4x-1=\frac{3-3x}{m} \;\; /\cdot m \quad \Rightarrow \quad m^2x+4mx-m=3-3x \;\; /+m+3x$

$m^2x+4mx+3x=3+m \quad \Rightarrow \quad (m^2+4m+3)x=3+m$

$(*)$ $\underline{(m+1)(m+3)x=3+m}$ $\quad m=-3 \quad \Rightarrow \quad 0\cdot x=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m=-3}$ **אינסוף פתרונות**

$m=-1 \quad \Rightarrow \quad 0=2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m=0 \;,\; m=-1}$ **אין פתרון**

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{m\neq 0 \;,\; m\neq -1 \;,\; m\neq -3}$ **פתרון יחיד**

$(*)\;\; m_{1,2}=\frac{-4\pm 2}{2}=-2\pm 1 \quad \Rightarrow \quad m_1=-1 \;,\; m_2=-3 \quad \Rightarrow \quad m^2+4m+3=(m+1)(m+3)$

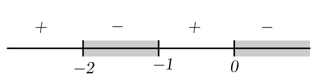
ב.

$(m+1)(m+3)x=3+m \;\; /:(m+3) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x=\frac{1}{m+1}}$

ג.

$\frac{1}{m+1}<m+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m+1}-(m+1)<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-(m+1)^2}{m+1}<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-m^2-2m}{m+1}<0$

$\frac{-m(m+2)}{m+1}<0 \quad \rightarrow \quad m_1=-2 \;\;,\;\; m_2=-1 \;\;,\;\; m_3=0 \;\;;\;\; \underline{m<-2:}\;\; \frac{-m(m+2)}{m+1}=\frac{-\,-\,-}{-}=+$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow \quad \boldsymbol{(-2<m<-1)\cup(m>0)}$

5. א. ^\circ $(6m-2m^2)x = m^2-4m+3 \quad \Rightarrow \quad 2m(3-m)x = m^2-4m+3$

$m=0 \quad \Rightarrow \quad 0=3 \quad \Rightarrow$ אין פתרון

$m=3 \quad \Rightarrow \quad 0=0 \quad \Rightarrow$ אינסוף פתרונות (כל מספר)

(1) אינסוף פתרונות: $m=3$ **(2)** אין פתרון: $m=0$ **(3)** פתרון יחיד: $m\neq 0\ ,\ m\neq 3$

ב. (1)

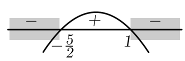
$\underline{m^2-4m+3:}\ \ m_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1 \quad \Rightarrow \quad m_1=3\ ,\ m_2=1$

$\Rightarrow \quad m^2-4m+3=(m-1)(m-3)$

$x=\frac{m^2-4m+3}{6m-2m^2}=\frac{(m-1)(m-3)}{2m(3-m)}=\frac{(m-1)\cdot(-1)}{2m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x=\frac{1-m}{2m}}$

(2)

$x_A=\frac{1-m}{2m} \quad \Rightarrow \quad y_A=m(2m+5)\cdot\frac{1-m}{2m}=\frac{(2m+5)(1-m)}{2}\overset{?}{<}0$

$m_1=-\frac{5}{2}\ ,\ m_2=1\ ,\ a=-2<0 \quad \Rightarrow$  $\Rightarrow \quad (m<-2.5)\cup(m>1)$

$\Big((m<-2.5)\cup(m>1)\Big)\cap(m\neq 0)\cap(m\neq 3) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(m<-2.5)\cup(1<m<3)\cup(m>3)}$

---

6. א. $(a^2-2a-15)y=(a^2-3a-10)x+7$

$\underline{a^2-2a-15:}\ \ \frac{2\pm 8}{2}=1\pm 4=5\ ,\ -3 \quad \Rightarrow \quad a^2-2a-15=(a-5)(a+3)$

$\underline{a^2-3a-10:}\ \ \frac{3\pm 7}{2}=5\ ,\ -2 \quad \Rightarrow \quad a^2-3a-10=(a-5)(a+2)$

$(a-5)(a+3)y=(a-5)(a+2)x+7$

$a=5 \ \Rightarrow\ 0=7 \quad , \quad a=-3 \ \Rightarrow\ 0=8x+7 \ \equiv\ x=-\frac{7}{8} \quad , \quad a=-2 \ \Rightarrow\ y=\frac{7}{-7}=-1$

$\Leftarrow$ **(1)** $\mathbf{a=-2}$ **(2)** $\mathbf{a=-3}$ **(3)** $\mathbf{a=5}$

מתוך ספר ההוכחות למשפט פיתגורס, שערך Elisha Scot Loomis ושיצא ב־1940. בספר 367 הוכחות שונות למשפט פיתגורס ביניהן של ליאונרד דה וינצ'י וג'יימס גרפילד, הנשיא ה־20 של ארה"ב. למשפט פיתגורס יש למעלה מ־600(!) הוכחות שונות.

One Hundred Twenty-Seven

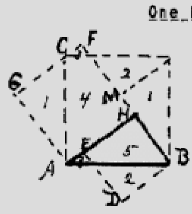


Fig. 225

In the fig. 225, draw KM par. to AH.

Sq. AK = (tri. BKM = tri. ACG) + (tri. KLM = tri. BND) + quad. AHLC common to sq's AK and AK + (tri. ANE = tri. CLF) + trap. NBHE common to sq's AK and ED = sq. HD + sq. HG.

∴ sq. upon AB = sq. upon BH + sq. upon AH. ∴ $h^2 = a^2 + b^2$.

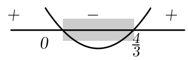
7. א.

$y = mx + 4 - 3m \ , \quad (0,0) \quad \Rightarrow \quad 0 = 4 - 3m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m = \frac{4}{3}}$

ב.

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad mx + 4 - 3m = 0 \quad \Rightarrow \quad mx = 3m - 4 \quad \Rightarrow \quad x = 3 - \frac{4}{m}$

$x < 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - \frac{4}{m} < 0 \ \ / \cdot m^2 \quad \Rightarrow \quad 3m^2 - 4m < 0 \quad \Rightarrow \quad m(3m-4) < 0$

$m_1 = 0 \ , \ m_2 = \frac{4}{3} \quad , \quad a = 3 > 0 \quad \Rightarrow$  $\Rightarrow \quad \mathbf{0 < m < \frac{4}{3}}$

ג. (1) שיפוע ישר המקביל לציר x הוא 0 .

$m = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = 4}$

(2)

$(y = 4) < (y = \frac{4}{3}x) \quad \Rightarrow \quad 4 < \frac{4}{3}x \ \ / \cdot \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x > 3}$

ד. בכלל כל הישרים המקיימים את המשוואה הנתונה, נכללים גם הישרים $y = \frac{4}{3}x$ ו־ $y = 4$.
גם שניהם עוברים דרך A , לכן A היא נקודת המפגש ביניהם:

$\frac{4}{3}x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A(3,4)}$

12,345,679

למספר זה מספר תכונות מעניינות:

1. **הכפלה ב־1 נותנת את כל הספרות מ־1 עד 9 למעט 8 :** $12345679 \times 1 = 12345679$
   הכפלה ב־8 נותנת את כל הספרות מ־1 עד 9 למעט 1 : $12345679 \times 8 = 98765432$
2. **הכפלה ב־2 נותנת את כל הספרות מ־1 עד 9 למעט 7 :** $12345679 \times 2 = 24691358$
   הכפלה ב־7 נותנת את כל הספרות מ־1 עד 9 למעט 2 : $12345679 \times 7 = 86419753$
3. **הכפלה ב־4 נותנת את כל הספרות מ־1 עד 9 למעט 5 :** $12345679 \times 4 = 49382716$
   הכפלה ב־5 נותנת את כל הספרות מ־1 עד 9 למעט 4 : $12345679 \times 5 = 61728395$
4. **כל הכפלה של מספר זה במספר המתחלק ב־3 (עד 78) נותנת מספר שספרותיו מחזוריות**

   $12345679 \times 3 = 37037037 \ ; \ 12345679 \times 6 = 74074074 \ ; \ 12345679 \times 12 = 148148148$

   $12345679 \times 15 = 185185185 \ ; \ 12345679 \times 21 = 259259259 \ ; \ 12345679 \times 296296296$
5. **כל הכפלה של מספר זה במספר המתחלק ב־9 (עד 81) נותנת מספר שכל ספרותיו שוות**

   $12345679 \times 9 = 111111111 \ ; \ 12345679 \times 18 = 222222222 \ ; \ 12345679 \times 27 = 333333333$

   $12345679 \times 36 = 444444444 \ ; \ 12345679 \times 45 = 555555555 \ ; \ 12345679 \times 54 = 666666666$

   $12345679 \times 63 = 777777777 \ ; \ 12345679 \times 72 = 888888888 \ ; \ 12345679 \times 81 = 999999999$

אלגברה - חקירת מערכת משוואות ממעלה ראשונה - שאלות

(כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 005.)

1. (קיץ תשס"ו - 2006 , מועד א) נתונה מערכת המשוואות: $2x-y=1$

$(m^2+1)x+my=1$ m הוא פרמטר.

א. לאילו ערכים של m יש למערכת המשוואות פתרון יחיד? **(13)**

ב. לאילו ערכים של m הפתרון היחיד של המערכת מקיים את אי השוויון $y>-6x+3$?

2. (קיץ תשס"ו - 2006 , מיוחד) נתונה מערכת המשוואות: $x+3my=m$, $mx+3y=4m-3$.

א. הבע באמצעות m את פתרון מערכת המשוואות.

ב. מצא עבור אילו ערכי m למערכת פתרון יחיד הנמצא ברביע השלישי. **(13)**

3. עבור אילו ערכי הפרמטר m נמצאת נקודת החיתוך

של שני הישרים: $x+y=5$ ו־ $2(m-x)=y-4$ **(14)**

בתוך הריבוע שקודקודיו הם: $(-3,-3)$, $(3,-3)$, $(-3,3)$, $(3,3)$ (ולא על אחת מצלעותיו)?

4. (קיץ תשס"ח - 2008 , מועד א)

נתונים שני ישרים שמשוואותיהם הן: $3y+ax=1$ ו־ $ay+3x=-1$ (a הוא פרמטר).

א. מצא עבור אילו ערכי a הישרים נחתכים בנקודה אחת.

ב. מצא עבור אילו ערכי a נקודת החיתוך של שני הישרים

נמצאת מעל הישר $y=-3$ ומימין לציר y. **(14)**

5. (קיץ תשס"ח - 2008 , לוחמים)

נתונה מערכת המשוואות: $(2)\ \ x+4y=2m$, $(1)\ \ x+m^2y=m^2$.

א. מצא עבור אילו ערכים של m יש למערכת פתרון יחיד.

ב. מצא את הפתרון היחיד של מערכת המשוואות, **(15)**

והראה שהוא נמצא על הישר $y=\frac{1}{2m}x$ ($m\neq 0$).

ג. מצא עבור אילו ערכים של m ($m\neq 0$), הפתרון היחיד של המערכת מקיים $\frac{y}{x}>3$.

תשובות

1. א. $m\neq -1$ **ב.** $-1<m<1$

2. א. $\left(\frac{4m}{m+1}\ ,\ \frac{m-3}{3(m+1)}\right)$ **ב.** $-1<m<0$

3. $1.5<m<2$

4. א. $a\neq \pm 3$ **ב.** $a>3\frac{1}{3}$

5. א. $m\neq \pm 2$ **ב.** $\left(\frac{2m^2}{m+2}\ ,\ \frac{m}{m+2}\right)$ **ג.** $0<m<\frac{1}{6}$

6. (חורף תשס"ט - 2009, לוחמים) נתונה מערכת המשוואות: $x+6y=1$, $mx+(m^2+9)y=3$.

א. מצא עבור אילו ערכים של m יש למערכת פתרון יחיד.

ב. מצא את הפתרון היחיד של מערכת המשוואות. **(16)**

ג. מצא עבור אילו ערכים של m , הפתרון היחיד של המערכת מקיים את אי־השוויון $0<x<3$.

7. (אביב תשס"ח - 2008, לוחמים) נתונה מערכת המשוואות: $(II)\ \ x+5ay=0$, $(I)\ \ x+a^2y=2$.

א. מצא עבור אילו ערכי a יש למערכת פתרון יחיד. **(16)**

ב. מצא עבור אילו ערכי a הפתרון היחיד (x,y) של המערכת מקיים: $x\cdot y<0$.

8. (קיץ תש"ע - 2010, מועד א)

נתונים שני ישרים שמשוואותיהם: $f(x)=-\frac{a^2+8}{a}x+a$ ו־ $g(x)=4-6x$, $a\neq 0$ פרמטר.

א. מצא עבור אילו ערכי a הישרים: **(1)** נחתכים **(2)** מקבילים ואינם מתלכדים

ב. (1) מצא את ערך a שעבורו סכום השיעורים של נקודת החיתוך בין שני הישרים הוא 1 .

עבור ערך a שמצאת בתת־סעיף ב(1):

(2) האם יש ערך של x שעבורו שני הישרים, $f(x)$ וגם $g(x)$, נמצאים מעל ציר x ? נמק.

(3) מצא עבור אילו ערכי x גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא ברביע הראשון. **(17)**

9. (קיץ תש"ע - 2010, מועד ב)

נתונה מערכת המשוואות: $(a+3)^2x+(a-3)y=18-4a^2$

$(a+3)^2x-(a-3)y=2a^2$, a הוא פרמטר.

א. (1) הבע את פתרון המערכת באמצעות a עבור $a\neq\pm 3$.

מצא עבור איזה ערך של a : **(2)** אין פתרון למערכת. נמק. **(18)**

(3) יש אין־סוף פתרונות למערכת. נמק

ב. מצא את הערך של a שעבורו הפתרון היחיד של המערכת מקיים $xy=3$.

המתמטיקה היא מלכת המדעים ושפחתם.

תשובות

6. א. $m\neq 3$ **ב.** $m\neq 3$, $\left(\frac{3+m}{m-3}, \frac{1}{3-m}\right)$ **ג.** $(m<-3)\cup(m>6)$

7. א. $a\neq 5$, $a\neq 0$ **ב.** $(0<a<5)\cup(a>5)$

8. א. (1) $a\neq 4$, $a\neq 2$, $a\neq 0$ **(2)** $a=2$ **ב. (1)** $a=-3$ **(2)** כן **(3)** $0<x<\frac{2}{3}$

9. א. (1) $\left(\frac{3-a}{3+a}, \frac{9-3a^2}{a-3}\right)$ **(2)** $a=3$ **(3)** $a=-3$ **ב.** $a=-2$

.10 (קיץ תשע"א - 2011 , מועד א)

נתונות משוואות של שני ישרים: $2x+y=12$, $mx+3y=m^2$, m הוא פרמטר.

א. **(1)** עבור אילו ערכים של m הישרים נחתכים בנקודה אחת בלבד?

(2) האם יש ערך של m שעבורו לישרים אין נקודה משותפת?

אם כן - מצא את הערך. אם לא - הסבר. **(18)**

ב. נתון כי הישרים נחתכים בנקודה אחת בלבד.

מצא עבור אילו ערכים של m נקודת החיתוך בין הישרים נמצאת בתוך מלבן

(ולא על צלעותיו), הנוצר על ידי שני הצירים ועל ידי הישרים $x=4$ ו־ $y=16$.

.11 (קיץ תשע"א - 2011 , מועד ב)

נתונה המשוואה $(a^2-2a-15)y=(a^2-3a-10)x+7$. a פרמטר.

א. מצא עבור איזה ערך של a : **(1)** המשוואה מייצגת ישר המקביל לציר x .

(2) המשוואה מייצגת ישר המקביל לציר y .

(3) אין פתרון למשוואה.

ב. נתונה מערכת המשוואות: $(I)\ \ x+y=0$, $(II)\ \ (a-5)(a+2)x-(a-5)(a+3)y=-7$.

$a\neq-2.5$, 5 . נתון כי למערכת המשוואות יש פתרון יחיד.

(1) מצא עבור אילו ערכים של a הפתרון היחיד נמצא על הישר שמשוואתו $y=-1$.

(2) עבור איזה ערך של a , מבין הערכים שמצאת בתת־סעיף ב(1),

המשוואה II מייצגת ישר החותך את ציר x ? נמק.

(פתרון סעיף ב אינו תלוי בפתרון סעיף א.) **(19)**

.12 (קיץ תשע"א - 2011 , לוחמים)

נתונים הישרים: $ax-(a^2+2)y=1$ ו־ $x-3y=1$. a פרמטר.

א. מצא עבור אילו ערכי a יש לשני הישרים נקודה משותפת אחת בלבד.

ב. מצא עבור אילו ערכי a שני הישרים מתלכדים לישר אחד.

ג. נתון ששני הישרים נחתכים בנקודה אחת הנמצאת על הישר $y=x$.

מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הישרים, ומצא את ערכו של a . **(19)**

תשובות

.10 **א. (1)** $m\neq6$ **(2)** לא. **ב.** $-6<m<-2$

.11 **א. (1)** $a=-2$ **(2)** $a=-3$ **(3)** $a=5$ **ב. (1)** $a_1=-2$, $a_2=4.5$ **(2)** $a=4.5$

.12 **א.** $a\neq1$, $a\neq2$ **ב.** $a=1$ **ג.** $a=0$, $(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2})$

13. (קיץ תש"ע - 2010 , המבחן הגנוז)

נתונים שני הישרים: $(m+2)x+y=3$ ו- $(3m+4)x+(m+2)y=m^2+4m+6$. m פרמטר.

א. מצא עבור אילו ערכי m הישרים: **(1)** נחתכים. **(2)** מתלכדים.

ב. מצא עבור אילו ערכי m הישרים נחתכים בנקודה אחת הנמצאת ברביע השני. **(20)**

14. (סתיו תשע"ב - 2011 , לוחמים)

נתונות המשוואות: $(II)\ m^2(x-1)+m(x+1)-6x+2=0$, $(I)\ t^2(2-x)=25+t(5x+t)$.

א. (1) עבור אילו ערכי הפרמטר t יש למשוואה I פתרון יחיד, קטן מ- 0 ?

(2) עבור אילו ערכי הפרמטר m יש למשוואה II פתרון יחיד?

ב. מצא את היחס $\frac{t}{m}$ במקרים האלה: **(1)** למשוואות I ו- II יש אינסוף פתרונות.

(2) למשוואות I ו- II אין פתרון.

ג. נתון: $t=m$. מצא את הפתרון המשותף של שתי המשוואות. **(21)**

15. (חורף תשע"ב - 2012)

נתונים הישרים: $(m+1)x-y=-m^2-2m+1$, $(m+1)x+y=2m^2-4$, m פרמטר.

א. מצא עבור אילו ערכי m (אם יש כאלה) הישרים:

(1) מתלכדים **(2)** מקבילים **(3)** נחתכים.

ב. מצא עבור אילו ערכי m נקודת החיתוך בין שני הישרים נמצאת ברביע השני

(ולא על הצירים). **(22)**

921 **הספרות הראשונות של יחס הזהב;** ϕ $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ **מהוות מספר פלינדרומי ראשוני:**

$161, 803, 398, 874, 989, 484, 820, 458, 683, 436, 563, 811, 772, 030, 917$

$\vdots$

$0, 141, 713, 513, \mathbf{1}315, 317, 141, 0$

$\vdots$

$719, 030, 277, 118, 365, 634, 386, 854, 028, 484, 989, 478, 893, 308, 161$

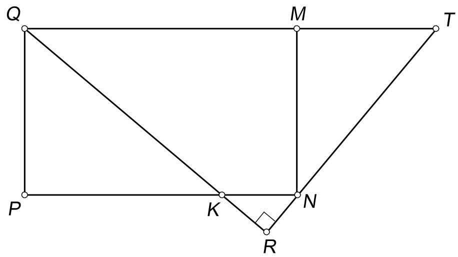
תשובות

13. א. (1) $m\neq 0$, $m\neq -1$ **(2)** $m=0$, $m=-1$ **ב.** $(-5<m<-1)\cup(-1<m<0)\cup(m>0)$

14. א. (1) $0<t<5$ **(2)** $m\neq 2$, $m\neq -3$ **ב. (1)** $\frac{t}{m}=-2.5$ **(2)** $\frac{t}{m}=0$ **ג.** $x=2$

15. א. (1) $m=-1$ **(2)** $\emptyset$ **(3)** $m\neq -1$ **ב.** $(m<-\frac{5}{3})\cup(1<m<3)$

.37 (804 , סתיו תשע"ה - 2014 , מועד ד)



נתון מלבן $MNPQ$.

המשיכו את הצלע QM עד לנקודה T .

הקטע QT הוא יתר במשולש ישר־זווית QRT .

קדקוד המלבן N מונח על הניצב RT .

הניצב QR חותך את צלע המלבן PN בנקודה K .

א. הוכח כי $PK \cdot KN = QK \cdot KR$.

נתון: $KN < PK$, $KR = 2_{cm}$, $QM = 10.5_{cm}$, $QK = 10_{cm}$.

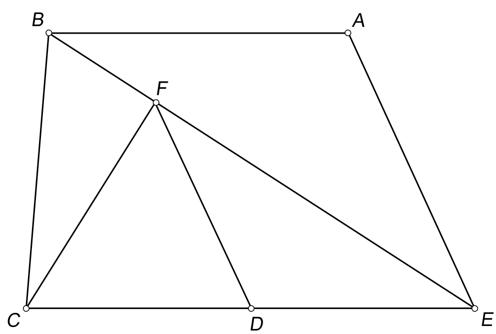
ב. חשב את אורך PK .

ג. חשב את אורך PQ .

ד. **(1)** הוכח כי $\triangle QRT \sim \triangle KRN$. **(128)**

(2) חשב את אורך QT .

.38 (804 , קיץ תשע"ו - 2016 , מועד א)



נתון טרפז $ABCE$ $(AB \parallel EC)$.

הנקודה F נמצאת על האלכסון BE

כך ש־ $CF \perp BE$.

הנקודה D היא אמצע הבסיס CE .

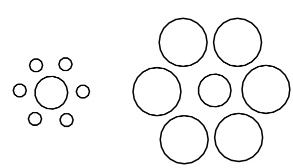
$EA = 4a$, $ED = 3a$, $\angle CEB = \angle AEB$.

א. הוכח כי $\triangle EAB \sim \triangle EDF$. **(129)**

ב. נתון כי שטח המשולש EAB הוא S . הבע באמצעות S את שטח המשולש CEF .

ג. המשך DF חותך את AB בנקודה G . הבע באמצעות S את שטח המשולש BFG .

תעתועי ראיה



בציור נראה כאילו העיגול המרכזי בקבוצה השמאלית גדול יותר מהעיגול המרכזי בקבוצה הימנית, נכון?

אז זהו, שלא:

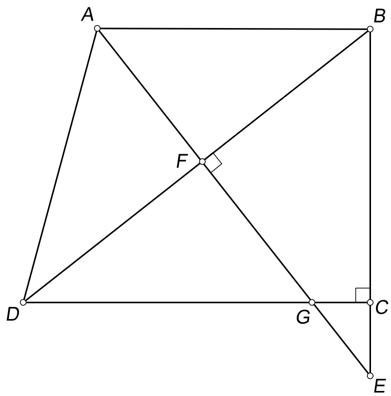
שני הכדורים המרכזיים בשתי הקבוצות שווים זה לזה!

תשובות

.37 **ב.** $PK = 8_{cm}$ **ג.** $PQ = 6_{cm}$ **ד.** **(2)** $QT = 15_{cm}$

.38 **ב.** $S_{\triangle EDF} = \frac{9S}{8}$ (יחידות ריבועיות) **ג.** $S_{\triangle BFG} = \frac{S}{16}$ (יחידות ריבועיות)

.39 (481 - קיץ תשע"ז - 2017 - מועד א)



$ABCD$ הוא טרפז ישר־זווית

$(\angle BCD = 90^{\circ}\ ,\ AB \parallel DC)$

E היא נקודה על המשך הצלע BC ,

כך שהקטע AE מאונך לאלכסון BD

וחותך אותו בנקודה F .

AE חותך את הקטע DC בנקודה G .

א. הוכח: $\angle AEB = \angle BDC$.

נתון כי $DC = BE$. **(130)**

ב. הוכח: $\triangle DCB \cong \triangle EBA$

נתון כי $CB = 4\ CE$.

ג. **(1)** הוכח: $\triangle GCE \sim \triangle ABE$.

(2) מצא את היחס $\frac{GC}{AB}$.

איך עושה כלב?

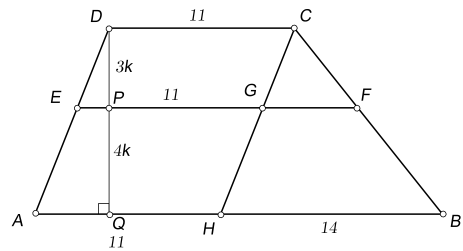
אווז - מגעגע , אוח - נאנח , אַיִל - צוהל , אַיָּל - עורג , אפרוח - מצייץ , אריה - שואג , ברווז - מגעגע , גמל - מחרחר , דבורה - מזמזמת , דב - נוהם , דוכיפת - מהדהדת , זאב - מיילל , זבוב - מזמזם , זמיר - מסתלסל , זרזיר - מפטפט , חרגול - מנסר , חזיר - נוחר , חמור - נוער (גם: נוהק) , חסידה - מלקלקת , חתול - מיילל (וגם: מגרגר) , יונה - הומה , ינשוף - נושף , יתוש - מזמזם , כבשה - פועה , כלב - נובח , נחש - לוחש , נמר - שואג , נץ - מצפצף , סוס - צוהל , עגור - מצפצף , עורב - קורא , עז - פועה , עיט - צועק , עכבר - מצייץ , עפרוני - מסלסל , פיל - מריע (וגם: תוקע, נוהם, מחצצר), פרא - נוהק , פרה - גועה , צבוע - צוחק (גם מיילל) , צבי - מפרט , ציפור - מצייצת , צפרדע - מקרקרת , צרצר - מצרצר , קוף - לוהג , ראם - מצלצל , שועל - מיילל , שור - גועה , שרקן - שורק , תוכי - מדבר (גם: שורק, מפטפט, מקשקש) , תן - מיילל , תנשמת - נושמת , תרנגול - קורא , תרנגול־הודו - מהלצר ,

תשובות

.39 ג. **(2)** $\frac{GC}{AB} = \frac{1}{5}$

גאומטריה אוקלידית - ב - פרופורציה ללא מעגל - פתרונות

1. א. בנית עזר: $CH \parallel DA$ $\Leftarrow$ המרובעים $CDEG$ ו־ $GEAH$ הם מקביליות (הגדרת מקבילית)



$(1)\ \ CD = 11_{cm} \quad \Rightarrow^{(2)} \quad EG = AH = 11_{cm}$

$\Rightarrow^{(1)} \quad HB = 25 - 11 = 14_{cm}$

$(2)\ \ CG = DE\ ,\ GH = EA \quad \Rightarrow \quad \frac{CG}{GH} = \frac{DE}{AE} =^{(1)} \frac{3}{4}$

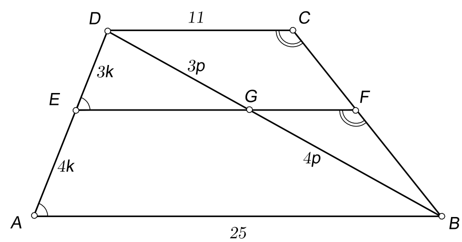
$\frac{CG}{GH} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{CG}{CH} = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}$

$(1)\ \ GF \parallel HB \quad \Rightarrow^{(3)} \quad \frac{CG}{CH} = \frac{GF}{HB}$

$\Rightarrow \quad \frac{3}{7} = \frac{GF}{14} \quad \Rightarrow \quad GF = 6_{cm}$

$\Rightarrow \quad EF = 11 + 6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{EF = 17_{cm}}$

<u>דרך נוספת:</u> בנית עזר: BD



$(5)\ \ \angle D_{\triangle DEG} = \angle D_{\triangle DAB}\ \ ,\ \ (4)\ \ \angle DEG = \angle DAB$

$(1)\ \ EG \parallel AB \quad \Rightarrow \quad \frac{EG}{AB} =^{(3)} \frac{DE}{DA} =^{(1)} \frac{3}{7}$

$\Rightarrow \quad \frac{EG}{25} = \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad \underline{EG = \frac{75}{7}}$

$(1)\ \ EG \parallel AB\ \ ,\ \ (1)\ \frac{DE}{EA} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow^{(4)} \quad \frac{DG}{GB} = \frac{3}{4}$

$(3)\ \ \frac{FG}{CD} = \frac{BG}{BD} = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7} \quad \Rightarrow \quad \frac{FG}{11} = \frac{4}{7} \quad \Rightarrow \quad \underline{FG = \frac{44}{7}}$

$EF = EG + GF = \frac{75}{7} + \frac{44}{7} = \frac{119}{7} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{EF = 17_{cm}}$

ב. על פי השרטוט העליון בעמוד זה:

$(5)\ \ DQ \perp AQ\ ,\ EP \parallel AQ\ \ ,\ \ (1)\ \frac{DE}{AE} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad (4)\ \ \frac{DP}{PQ} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad DP = 3k\ ,\ PQ = 4k$

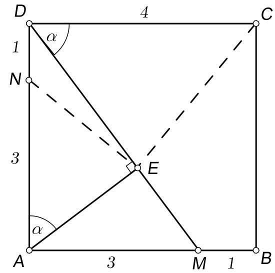
$$\frac{S_{EFCD}}{S_{ABFE}} = \frac{\frac{(17+11)\cdot 3\cancel{k}}{\cancel{2}}}{\frac{(25+17)\cdot 4\cancel{k}}{\cancel{2}}} = \frac{14\cdot 3}{21\cdot 4} = \frac{2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{S_{EFCD}}{S_{ABFE}} = \frac{1}{2}}$$

---

(1) נתון (2) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו (3) תאלס מורחב (4) תאלס

(5) בנית עזר

2. א.



$\underline{\triangle DAM:}$ (1) $DM^2 = AD^2 + AM^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{DM = 5_{cm}}$

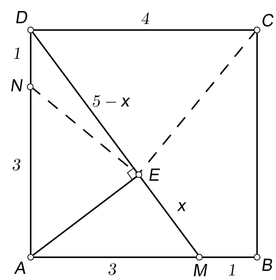
$S_{\triangle DAM} = \frac{AM \cdot AD}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6_{cm^2}$

$S_{\triangle DAM} = \frac{DM \cdot AE}{2} = \frac{5 \cdot AE}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AE = 2.4_{cm}}$

$\underline{\triangle DEA:}$ (1) $DE^2 + 2.4^2 = 4^2 \quad \Rightarrow \quad DE^2 = 10.24 \ /\sqrt{\ }$

$\Rightarrow \quad \mathbf{DE = 3.2_{cm}}$

אפשר גם כך:



$DM = 5 \ , \ EM = x \quad \Rightarrow \quad ED = 5 - x (1) \ AE = \sqrt{x(5-x)}$

$\underline{\triangle AME:}$ (1) $AE^2 + x^2 = 3^2$

$\Rightarrow \quad x(5-x) + x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad 5x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 1.8_{cm}$

$\Rightarrow \quad AE = \sqrt{1.8(5-1.8} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AE = 2.4_{cm}}$

$DE = 5 - 1.8 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{DE = 3.2_{cm}}$

ב.

$(2) \ \angle NAE = \alpha \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad \angle ADE = 90^\circ - \alpha \quad \overset{(4)}{\Rightarrow} \quad \angle EDC = \alpha \quad \Rightarrow \quad \underline{\angle NAE = \angle EDC}$

$\frac{AE}{DE} = \frac{2.4}{3.2} = 0.75 \ , \ \frac{AN}{DC} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{AE}{DE} = \frac{AN}{DC}} \quad \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{\triangle AEN \sim \triangle DEC} \ (\checkmark)$

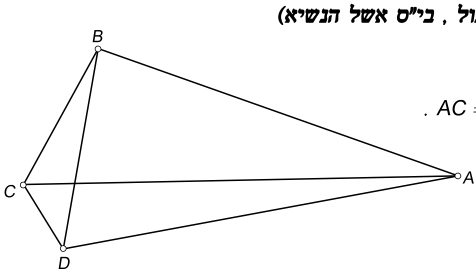
---

(1) משפט פיתגורס (2) סימון (3) השלמה ל־ 180° במשולש ישר־זווית AED

(4) השלמה ל־ 90° של זווית ישרה ($\angle D$) בריבוע $ABCD$

(5) משפט דמיון צלע-זווית-צלע

בעיית אתגר (ד"ר פטר סמובול , בי"ס אשל הנשיא)



במרובע $ABCD$ נתון:

$\angle BCA = \angle DCA = 60^\circ \ , \ \angle BAD = 30^\circ \ , \ AC = 5780_{cm}$.

מצא את היקף המשולש BCD .

הפתרון בכלים אוקלידיים (לא טריגונומטריה!).

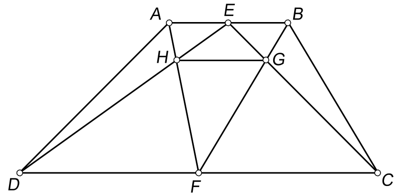
3. א.

(1) $AE = EB = \frac{8}{2} = 4 \quad , \quad DF = FC = \frac{24}{2} = 12$

(2) $EB \parallel FC \quad \Rightarrow^{(3)} \quad \frac{EG}{GC} = \frac{BG}{GF}$

(4) $\angle AHE = \angle FHD \quad \Rightarrow^{(5)} \quad \triangle EBG \sim \triangle CFG$

(5) $\frac{EG}{CG} = \frac{EB}{CF} = \frac{4}{12} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{EG}{CG} = \frac{1}{3}}$



ב.

(6) $\frac{EH}{HD} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{EH}{HD} = \frac{EG}{CG} \quad \Rightarrow^{(7)} \quad \boldsymbol{HG \parallel CD} \ (\checkmark)$

ג.

$\frac{EH}{HD} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{EH}{ED} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

(5) $\triangle EHG \sim \triangle EDC \quad \Rightarrow \quad \frac{HG}{DC} = \frac{EH}{ED} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{HG}{24} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{HG = 6_{cm}}$

---

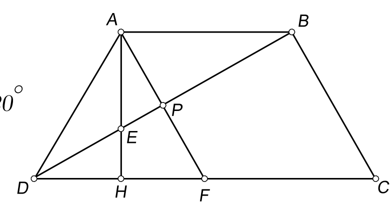
(1) נתון (2) הגדרת טרפז (3) משפט תאלס המורחב (4) זוויות קודקודיות שוות זו לזו

(5) משפט דמיון צ.ז.צ. (6) כמו ההוכחה שבסעיף א׳ (7) משפט תאלס הפוך

---

4. א. בנית עזר: $AF \parallel BC$ לכן: $ABCF$ מקבילית לפי הגדרה.

(1) $AF = BC = a \quad , \quad FC = AB = a \quad \Rightarrow \quad DF = 2a - a = a$



$AD = DF = AF = a \quad \Rightarrow^{(2)} \quad \angle ADF = 60^\circ \quad \Rightarrow^{(3)} \quad \angle BAD = 120^\circ$

(4) $AD = AB \quad \Rightarrow^{(5)} \quad \angle ADB = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle PDF = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ \quad \Rightarrow$ DP חוצה זווית ב־ $\triangle ADF$ $\Rightarrow^{(6)}$ DP תיכון ב־ $\triangle ADF$

(4) $AH \perp DF \quad \Rightarrow^{(6)} \quad DH = HF \quad \Rightarrow^{(7)} \quad \boldsymbol{\frac{AE}{EH} = 2}$

אפשר גם: הוכח: $DH = \frac{a}{2}$, DE חוצה זווית ב־ $\triangle ADH$. הפעל את משפט חוצה הזווית ב־ $\triangle ADH$.

ב.

$\underline{\triangle ADH:}\ DH = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow^{(8)} \quad AH = \sqrt{AD^2 - HD^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

(7) $AE = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}}$ **(יחידות אורך)**

---

(1) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו (2) זווית במשולש שווה־צלעות $(\triangle ADF)$ היא בת 60°

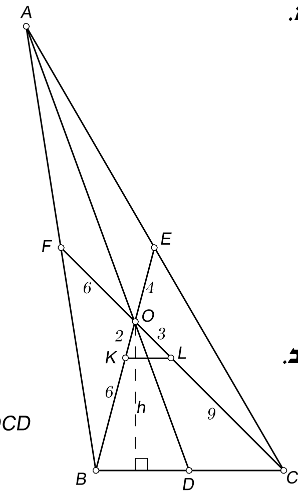
(3) השלמה ל־ 180° של זוויות על שוק בטרפז (4) נתון (5) זוויות בסיס במש״ש שוות זו לזו

(6) במשולש שווה־צלעות חוצה הזווית, הגובה והתיכון מתלכדים

(7) נקודת מפגש תיכונים במשולש מחלקת אותם ביחס של $1:2$ כשהחלק הגדול קרוב לקודקוד

(8) משפט פיתגורס

5. א.



$(1)\ CO=\frac{2\ CF}{3}=\frac{2\cdot 18}{3}=12_{cm}\quad,\quad (2)\ CL=\frac{CF}{2}=\frac{18}{2}=9_{cm}$

$LO=CO-CL=12-9\quad\Rightarrow\quad \mathbf{LO=3_{cm}}$

$(1)\ BO=\frac{2\ BE}{3}=\frac{2\cdot 12}{3}=8_{cm}\quad,\quad (2)\ BK=\frac{BE}{2}=\frac{12}{2}=6_{cm}$

$KO=BO-BK=8-6\quad\Rightarrow\quad \mathbf{KO=2_{cm}}$

$\frac{LO}{CL}=\frac{3}{9}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{\frac{LO}{CL}=\frac{1}{3}}$

ב.

$(2)\ BD=DC\ ,\ h_{o(\triangle OBD)}=h_{o(\triangle OCD)}\quad\Rightarrow^{(3)}\ S_{\triangle OBD}=S_{\triangle OCD}$

$(2)\ S_{\triangle OBD}=20_{cm^2}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{S_{\triangle OCD}=20_{cm^2}}$

$S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OBD}+S_{\triangle OCD}=2\cdot 20=40_{cm^2}$

$(1,2)\ \frac{OK}{OB}=^{*}\frac{\frac{2}{3}BE-\frac{1}{2}BE}{\frac{2}{3}BE}=\frac{1}{4}\quad,\quad \frac{OL}{OC}=\frac{\frac{2}{3}CF-\frac{1}{2}CF}{\frac{2}{3}CF}=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad \frac{OK}{OB}=\frac{OL}{OC}$

$(4)\ \angle O_{\triangle OKL}=\angle O_{\triangle OBC}\quad\Rightarrow^{(5)}\ \triangle OKL\sim\triangle OBC$

$(6)\ \frac{S_{\triangle OKL}}{S_{\triangle OBC}}=\left(\frac{OK}{OB}\right)^2\quad\Rightarrow\quad S_{\triangle OKL}=40\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{40}{16}=\frac{5}{2}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{S_{\triangle OKL}=2\frac{1}{2}\ _{cm^2}}$

(*) <u>הערה:</u> לא ברור מניסוח השאלה שניתן להשתמש בסעיף ב׳ בנתונים המספריים שבסעיף א׳.

---

(1) נקודת המפגש של תיכוני משולש מחלקת אותם ביחס של 1:2 כשהחלק הגדול קרוב לקודקוד

(2) נתון

(3) לשני המשולשים בסיסים שווים. לשני הבסיסים אותו גובה (h) לכן שטחם שווה.

(4) זווית משותפת

(5) משפט דמיון צ-ז-צ

(6) היחס בין שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון ביניהם

עוד טעות של אוילר

אוילר טען כי אין פתרון של מספרים טבעיים למשוואה מהצורה: $x^4+y^4+z^4=w^4$.

במשך 200 שנים הטענה לא הופרכה, אך גם לא הוכחה.

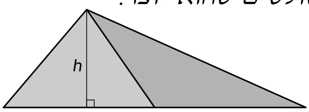
ב־1988 מצא **נועם אֶלקיס** (ישראלי לשעבר), מאוניברסיטת הרווארד, את הפתרון הסותר הזה:

$2,682,440^4+15,365,639^4+18,796,760^4=20,615,673^4$

6. א. יהיו חצאי הצלע שאותה חוצה התיכון לבסיסים של שני המשולשים שהוא יוצר.

לשני המשולשים יש, אם־כן, בסיסים שאורכם שווה.

הגובה לאותו בסיס משותף. מכאן: שטחיהם שווים.

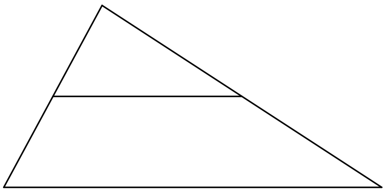


ב. קטע אמצעים מקביל לצלע השלישית.

לכן (תאלס) הוא יוצר שני משולשים דומים.

קטע האמצעים הוא מחצית הצלע השלישית,

לכן יחס הדמיון בין שני המשולשים הוא $\frac{1}{2}$.



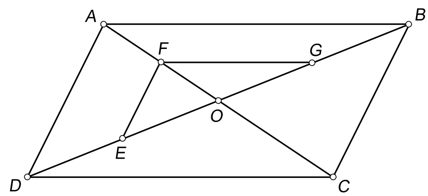
יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון, לכן יחס השטחים ביניהם הוא $\frac{1}{4}$.

מסעיף א׳ יוצא שארבעת המשולשים שיוצרים אלכסוני המקבילית שווים בשטחם. מכאן:

$S_{ABCD} = S \quad \Rightarrow \quad S_{ABD} = \frac{S}{2}$

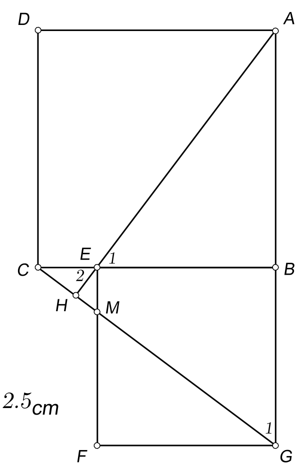
$S_{OFG} = \frac{1}{4} S_{OAB} \ , \ S_{OFE} = \frac{1}{4} S_{OAD}$

$\Rightarrow \quad S_{EFG} = \frac{1}{4} S_{ABD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{EFG} = \frac{S}{8}}$



---

7. א.



$(1)\ AB = BC \ , \ BE = BG \ , \ (2)\ \angle ABE = \angle CBG$

$\Rightarrow^{(3)} \triangle ABE \cong \triangle CBG \ (\surd)$

ב. (1)

$(4)\ \angle HCE = \angle BCG \ , \ (5)\ \angle G_1 = \angle E_1 =^{(6)} \angle E_2$

$\Rightarrow^{(7)} \triangle CHE \sim \triangle CBG \ (\surd)$

(2)

$(1)\ AB = BC = 10_{cm} \ , \ BG = BE = 7.5_{cm} \quad \Rightarrow \quad CE = 10 - 7.5 = 2.5_{cm}$

$(8)\ CG = \sqrt{BC^2 + BG^2} = \sqrt{10^2 + 7.5^2} = 12.5_{cm}$

$\triangle CHE \sim \triangle CBG \quad \Rightarrow \quad \frac{HE}{BG} = \frac{CE}{CG} \quad \Rightarrow \quad \frac{HE}{7.5} = \frac{2.5}{12.5} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{HE = 1.5_{cm}}$

---

(1) צלעות ריבוע שוות זו לזו (2) זוויות ריבוע שוות זו לזו (3) מ״ח צ-ז-צ

(4) זווית משותפת (5) זמב״ח (6) זוויות קודקודיות שוות זו לזו (7) משפט דמיון ז-ז

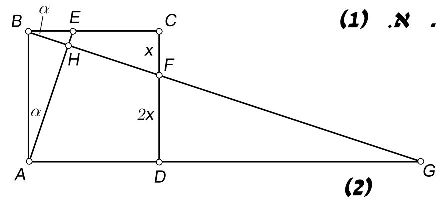
(8) משפט פיתגורס

200 הוא המספר הקטן ביותר שלא ניתן להפוך אותו לראשוני על־ידי שינוי של אחת מספרותיו.

תכונה זו מתקיימת גם בארבעת המספרים הזוגיים העוקבים,

שביחד עם 200 מהווים סדרה חשבונית בת חמשה איברים: 208 , 206 , 204 , 202 , 200

8. א. (1)



$(1)\ BE = CF\ ,\ (2)\ \angle C = \angle ABE\ ,\ (3)\ AB = BC$

$\Rightarrow^{(4)}\ \triangle AEB \cong \triangle BFC\ (\surd)$

(2)

$(5)\ \angle BAE = \alpha\ \Rightarrow^{(6)}\ \angle BEA = 90^\circ - \alpha\ ,\ (7)\ \angle FBC = \angle EAB = \alpha$

$\underline{\triangle BEH:}\ \angle B = \alpha\ ,\ \angle E = 90^\circ - \alpha\ \Rightarrow^{(6)}\ \angle BHE = 90^\circ\ \Rightarrow^{(8)}\ \angle \mathbf{BHA = 90^\circ}\ (\surd)$

ב.

$(5)\ CF = x\ \Rightarrow^{(1)}\ DF = 2x\ ,\ (9)\ BC \parallel DG\ \Rightarrow\ (10)\ \frac{DG}{BC} = \frac{FD}{FC} = \frac{2x}{2}\ \Rightarrow\ \mathbf{\frac{DG}{BC} = 2}$

$(3)\ BC = CD = 3x\ \Rightarrow\ DG = 2\ BC = 2\cdot 3x = 6x\ \Rightarrow\ \frac{DG}{CF} = \frac{6x}{x}\ \Rightarrow\ \mathbf{\frac{DG}{CF} = 6}$

---

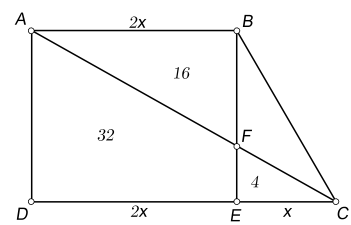
(1) נתון (2) זוויות ריבוע שוות זו לזו (3) צלעות ריבוע שוות זו לזו (4) מ.ח. צ.ז.צ.

(5) סימון (6) השלמה ל־ 180° במשולש (7) זמב״ח (8) השלמה ל־ 180° בזוויות צמודות

(9) צלעות ריבוע מקבילות זו לזו (10) הרחבה של משפט תאלס

---

9. א.



$(1)\ AB \parallel EC\ \Rightarrow^{(2)}\ \triangle ABF \sim \triangle CEF$

$(3)\ \frac{BC}{EC} = 2\ \Rightarrow^{(4)}\ \frac{BF}{FE} = 2$

$(3)\ S_{\triangle CEF} = 4\ \Rightarrow^{(5)}\ \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{S_{\triangle ABF}}{4} = 2^2 = 4$

$\Rightarrow\ \mathbf{S_{\triangle ABF} = 16_{cm^2}}$

ב. (1)

$(6)\ EC = x\ \Rightarrow^{(7)}\ AB = 2x\ ,\ (8)\ DE = 2x\ \Rightarrow\ DC = 3x$

$(9)\ EF \parallel AD\ \Rightarrow^{(2)}\ \triangle EFC \sim \triangle DAC\ ,\ (7)\ \frac{DC}{EC} = \frac{3x}{x}\ \Rightarrow\ \mathbf{\frac{DC}{EC} = 3}$

(2)

$(5)\ \frac{S_{\triangle DAC}}{S_{\triangle EFC}} = 3^2 = 9\ \Rightarrow\ \frac{S_{\triangle DAC}}{4} = 9\ \Rightarrow\ S_{\triangle DAC} = 36$

$S_{ADEF} = S_{\triangle ADC} - S_{\triangle EFC} = 36 - 4 = 32$

$S_{ABED} = S_{ADEF} + S_{\triangle ABF} = 32 + 16\ \Rightarrow\ \mathbf{S_{ABED} = 48_{cm^2}}$

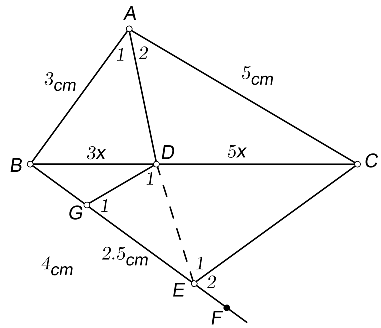
---

(1) בסיסי טרפז מקבילים זה לזה (2) תאלס (3) נתון (4) משפט חוצה־זווית ב־ $\triangle CEB$

(5) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון (6) סימון

(7) יחס הדמיון (8) צלעות מלבן שוות זו לזו (9) צלעות מלבן מקבילות זו לזו

10. א.



(1) $\angle A_1 = \angle A_2 \quad \Rightarrow^{(2)} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$

(3) $BD = 3x \quad \Rightarrow \quad DC = 5x$

(1) $GD \parallel EC \quad \Rightarrow^{(4)} \quad \frac{BG}{GE} = \frac{BD}{DC} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$

(1) $BE = 4 \quad \Rightarrow \quad GE = \frac{4}{8} \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{GE = 2.5_{cm}}$

ב.

$\angle G_1 =^{(5)} \angle E_2 =^{(1)} \angle E_1 \; , \; \angle D_1 =^{(5)} \angle E_1 \quad \Rightarrow \quad \angle G_1 = \angle D_1 \quad \Rightarrow^{(6)} \mathbf{ED = GE}$ (✓)

---

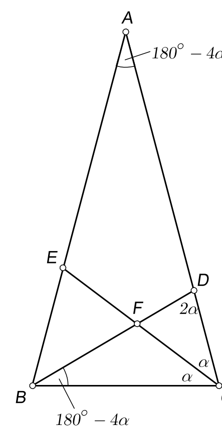
(1) נתון (2) משפט חוצה־זווית במשולש (3) סימון (4) משפט תאלס

(5) זוויות מתאימות או מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים ע״י ישר שלישי - שוות זו לזו

(6) משולש ששתים מזוויותיו שוות זו לזו - הוא משולש שווה־שוקיים

---

11. א.



(1) $\angle BCE = \angle ACE = \alpha \quad \Rightarrow^{(2)} \quad \angle BDC = 2\alpha \; , \; \angle ABC = 2\alpha$

$\underline{\triangle BDC:}$ (3) $\angle DBC = 180^\circ - 4\alpha$

$\underline{\triangle ABC:}$ (3) $\angle BAC = 180^\circ - 4\alpha \quad \Rightarrow^{(4)} \quad \mathbf{\triangle AEC \sim \triangle BFC}$ (✓)

ב.

$\triangle AEC \sim \triangle BFC \quad \Rightarrow$ יחס הדמיון $= \frac{AC}{BC} = \frac{4a}{2a} = 2$

$\Rightarrow^{(5)} \quad \mathbf{\frac{AE+EC+CA}{BF+FC+CB} = 2}$

ג.

$\triangle AEC \sim \triangle BFC \quad \Rightarrow \quad \frac{EC}{FC} = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{EF = FC}$ (✓)

---

(1) סימון (2) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו (3) השלמה ל־ 180° במשולש

(4) משפט דמיון זווית־זווית (5) יחס היקף משולשים דומים שווה ליחס הדמיון

מספר ריבועי הקסם

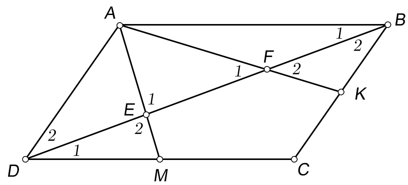
יש רק ריבוע קסם בסיסי אחד מסדר 3×3.

'בסיסי' - שאינו תוצאה של שיקוף או סיבוב של ריבוע קסם אחר - אלה ריבועי קסם שקולים ונחשבים כאחד.

יש 880 ריבועי קסם בסיסיים מסדר 4×4 ו־ $275,305,224$ ריבועי קסם בסיסיים מסדר 5×5.

מספר ריבועי הקסם הבסיסיים מסדר 6×6 אינו ידוע, אבל מוערך ב־ 1.77×10^{19}.

12. א. (1)



(2)

(1) $\angle B_1 = \angle D_1$, (2) $\angle E_1 = \angle E_2$

(3) $\triangle DEM \sim \triangle BEA \quad \Rightarrow^{(4)} \quad \mathbf{\frac{DE}{EB} = \frac{DM}{AB}}$ (√)

(5) $DM = MC = \frac{1}{2}DC$, (6) $AB = DC$

$\Rightarrow \quad \frac{DM}{AB} = \frac{1}{2}$

(7) $\frac{DE}{EB} = \frac{DM}{AB} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{DE}{EB} = \frac{1}{2}}$

ב.

(1) $\angle B_2 = \angle D_2$, (2) $\angle F_1 = \angle F_2 \quad \Rightarrow^{(3)} \quad \triangle BFK \sim \triangle DFA$

(4) $\frac{BF}{DF} = \frac{BK}{DA} =^{(5)} \frac{0.5\ BC}{DA} =^{(6)}= \frac{0.5\ BC}{BC} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{BF}{DF} = \frac{1}{2}}$ (√)

ג.

(7) $\triangle BEA \sim \triangle DEM$, (4) $\frac{AE}{EM} = 2 \quad \Rightarrow^{(8)} \quad \frac{S_{AED}}{S_{DEM}} = 2$

$\Rightarrow^{(5)} \quad \frac{S_{AED}}{8} = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{AED} = 16_{cm^2}}$

---

(1) זוויות מתחלפות במקבילים הנחתכים ע״י ישר שלישי שוות זו לזו

(2) זוויות קדקודיות שוות זו לזו

(3) משפט דמיון זווית־זווית

(4) יחס הדמיון

(5) נתון

(6) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו

(7) מסעיף א(1)

(8) הגובה לבסיסים AE ו־ EM זהה לכן יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים

אוריגמי

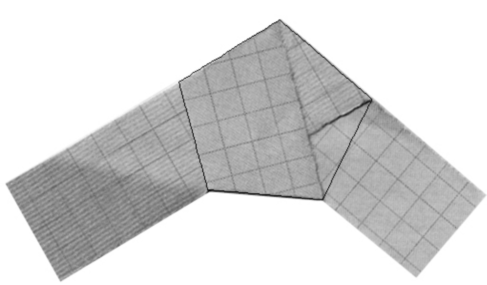
ניתן לבנות מחומש משוכלל בעזרת נייר.

קח נייר צר וארוך.

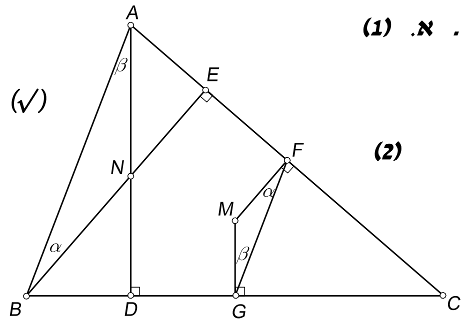
קשור אותו כאילו היה חוט.

שטח את הקשר בעדינות (ראה תמונה).

קיבלת מחומש משוכלל.



13. א. (1)



$(1)\ AF=FC\ ,\ BG=GC \ \Rightarrow^{(2)}\ FG \parallel AB$

$\Rightarrow^{(3)}\ \angle \mathbf{BAC} = \angle \mathbf{GFC}\ (\checkmark)$

(2)

$(4)\ \angle ABN=\alpha\ ,\ \underline{\triangle AEB:}\ (5)\ \angle BAE = 90^\circ-\alpha$

$\Rightarrow^{(6)}\ \angle GFC=\angle BAC=90^\circ-\alpha$

$(1)\ \angle MFC=90^\circ \ \Rightarrow^{(7)}\ \angle MFG=90^\circ-\angle GFC=90^\circ-(90^\circ-\alpha)=\alpha$

$\Rightarrow\ \angle \mathbf{ABN}=\angle \mathbf{MFG}\ (\checkmark)$

(3) באותה דרך נוכיח כי: $\angle BAN=\angle MGF$:

$(4)\ BAD=\beta \ \Rightarrow^{(5)}\ \angle ABD=90^\circ-\beta=^{(3)}\ \angle FGC$

$(1)\ \angle MGC=90^\circ \ \Rightarrow^{(7)}\ \angle MGF=90^\circ-(90^\circ-\beta)=\beta=\angle BAD \ \Rightarrow^{(8)}\ \triangle \mathbf{ANB}\sim\triangle \mathbf{GMF}\ (\checkmark)$

ב.

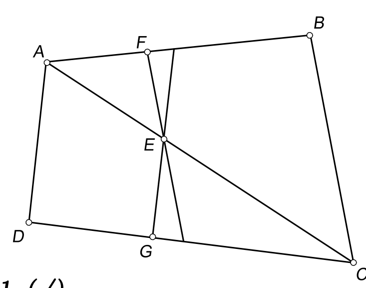
$(2)\ \frac{AB}{FG}=2\ ,\ (6)\ \triangle ANB\sim\triangle GMF \ \Rightarrow^{(9)}\ \frac{NB}{MF}=\frac{AB}{GF}=2 \ \Rightarrow\ \mathbf{\frac{NB}{MF}=2}$

---

(1) נתון (2) קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה (3) זוויות מתאימות במקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי שוות זו לזו (4) סימון (5) השלמה ל־ 180° במשולש (6) מסעיף קודם (7) השלמה ל־ 90° (8) משפט דמיון זווית־זווית (9) יחס הדמיון

---

14. א. (1)



$(1)\ FE\parallel BC \ \Rightarrow^{(2)}\ \mathbf{\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AC}}\ (\checkmark)$

(2)

$(1)\ EG\parallel AD \ \Rightarrow^{(2)}\ \frac{EG}{AD}=\frac{CE}{AC}$

$\frac{EF}{BC}+\frac{EG}{AD}=\frac{AE}{AC}+\frac{CE}{AC}=\frac{AE+CE}{AC}=\frac{AC}{AC}$

$\Rightarrow\ \mathbf{\frac{EF}{BC}+\frac{EG}{AD}=1}\ (\checkmark)$

ב. (1)

$(1)\ \frac{EF}{BC}=\frac{2}{5} \ \Rightarrow^{(3)}\ \frac{2}{5}+\frac{EG}{AD}=1 \ \Rightarrow\ \frac{EG}{AD}=\frac{3}{5} \ \Rightarrow^{(2)}\ \frac{GC}{DC}=\frac{3}{5} \ \Rightarrow\ GC=3x\ ,\ DC=5x$

$DC=DG+GC \ \Rightarrow\ 5x=DG+3x \ \Rightarrow\ DG=2x \ \Rightarrow\ \frac{GC}{DG}=\frac{3x}{2x} \ \Rightarrow\ \mathbf{\frac{GC}{DG}=\frac{3}{2}}$

(2)

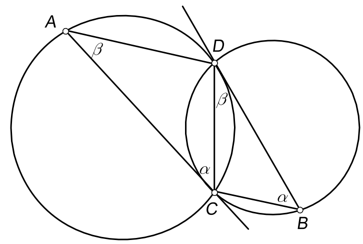
$(4)\ \frac{S_{\triangle AGC}}{S_{\triangle ADG}}=\frac{GC}{DG} \ \Rightarrow^{(5)}\ \mathbf{\frac{S_{\triangle AGC}}{S_{\triangle ADG}}=\frac{3}{2}}$

---

(1) נתון (2) תאלס מורחב (3) מסעיף א

(4) לשני המשולשים גובה משותף לבסיסים DG ו־ GC הנמצאים על ישר אחד (5) מסעיף ב

.13



$(1)\ \angle ACD = \angle CBD \overset{(2)}{=} \alpha \quad , \quad (1)\ \angle CDB = \angle CAD \overset{(2)}{=} \beta$

$\underline{\triangle BCD :}\ (3)\ \angle BCD = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$\underline{\triangle ADC :}\ (3)\ \angle ADC = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$\Rightarrow \quad \angle BCD = \angle ADC \quad \Rightarrow^{(4)} \ \mathbf{AD \parallel BC}$ (√)

ב.

$(5)\ \triangle ADC \sim \triangle DCB \quad \Rightarrow^{(6)} \ \frac{AD}{DC} = \frac{DC}{CB} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{DC} = \frac{DC}{4} \quad \Rightarrow \quad DC^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad CD = 6_{cm}$

$\frac{AD}{DC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow^{(7)} \ S_{\triangle ADC} : S_{\triangle DCB} = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{\triangle ADC} : S_{\triangle DCB} = 2\frac{1}{4}}$

---

(1) זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו האחר

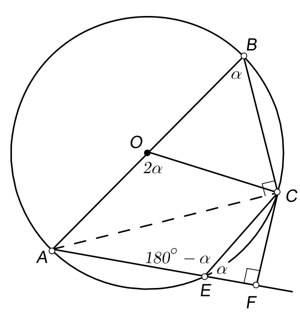
(2) סימון (3) השלמה ל- 180° במשולש

(4) שני ישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי, זוג זוויות מתאימות שוות זל״ז - שני הישרים מקבילים זל״ז

(5) משפט דמיון זווית־זווית (6) יחס הדמיון

(7) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון

.14 א.



$(1)\ \angle AEC = 180^\circ - \alpha \quad \Rightarrow^{(2)} \ \angle B = \alpha$

$\Rightarrow^{(3)} \ \mathbf{\angle AOC = 2\alpha}$ (√)

ב.

$(4)\ \angle ACB = 90^\circ \quad , \quad (5)\ \angle B = \angle CEF = \alpha$

$\Rightarrow^{(6)} \ \mathbf{\triangle EFC \sim \triangle BCA}$ (√)

ג.

$\underline{\triangle ABC :}\ (7)\ AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$

$\triangle EFC \sim \triangle BCA \quad \Rightarrow^{(8)} \ \frac{EF}{BC} = \frac{FC}{CA} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{R} = \frac{FC}{R\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{FC = 2\sqrt{3}}$ **(יחידות אורך)**

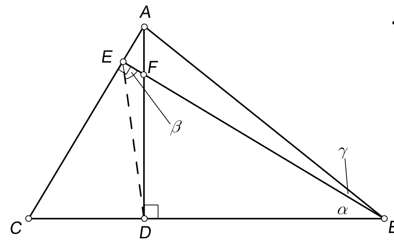
---

(1) השלמה ל- 180° של זווית שטוחה (2) השלמה ל- 180° של זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל

(3) זווית מרכזית כפולה מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת (4) זווית היקפית הנשענת על קוטר

(5) מסעיף א (6) משפט דמיון זווית־זווית (7) משפט פיתגורס (8) יחס הדמיון

15. א.



(1) $\angle BEA = \angle ADB = 90^{\circ}$, (2) $\angle AFE = \angle BFD$

(3) $\boldsymbol{\triangle AFE \sim \triangle BFD}$ (✓)

ב.

(4) $\triangle AFE \sim \triangle BFD \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{AF}{BF} = \frac{FE}{FD}$

(2) $\angle AFB = \angle EFD \overset{(6)}{\Rightarrow}$ $\boldsymbol{\triangle AFB \sim \triangle EFD}$ (✓)

ג. (1)

(4) $\triangle AFB \sim \triangle EFD \overset{(7)}{\Rightarrow} \angle BAF = \angle DEF = \beta$

$\Rightarrow$ $\underline{\triangle ADB:}$ (1) $\angle D = 90^{\circ} \overset{(8)}{\Rightarrow} \angle A + \angle B = 90^{\circ}$, $\angle A = \beta$, $\angle B = \alpha + \gamma$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 90^{\circ}}$ (✓)

(2)

(4) $\alpha + \beta + \gamma = 90^{\circ}$, $\angle ABD = \alpha + \gamma$, $\angle AED = 90^{\circ} + \beta$

$\overset{(9)}{\Rightarrow} \angle ABD + \angle AED = 180^{\circ}$ (✓)

---

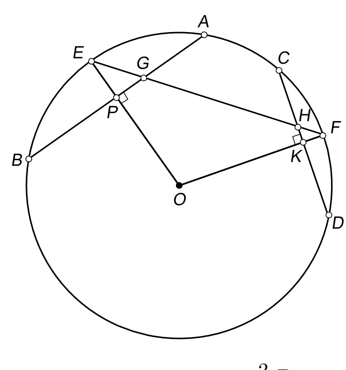
(1) נתון (2) זוויות קדקודיות (3) משפט דמיון זווית־זווית (4) סעיף קודם

(5) יחס הדמיון הנתון (6) משפט דמיון צלע־זווית־צלע (7) זוויות מתאימות במשולשים דומים

(8) השלמה ל־ 180° במשולש (9) תנאי הכרחי ומספיק לחסימת מרובע במעגל

---

16. א.



(1) $OA = OB = R$, $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EA}$

(2) $\angle BOE = \angle AOE \overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\boldsymbol{EO \perp AB}$ (✓)

ב.

(4) $OF \perp CD \Rightarrow \angle EPG = \angle FKH \ (= 90^{\circ})$

(1) $OE = OF \overset{(5)}{\Rightarrow} \angle OEF = \angle OFE$

$\overset{(6)}{\Rightarrow}$ $\boldsymbol{\triangle EPG \sim \triangle FKH}$

ג.

(7) $\frac{EP}{KF} = 2$, (1) $EP = 6 \Rightarrow KF = \frac{6}{2} = 3$, (1) $\frac{EG}{HF} = 2 \overset{(1)}{\Rightarrow} HF = \frac{\frac{2}{5}R}{2} = \frac{R}{5}$

$\underline{\triangle FKH:}$ (8) $HK = \sqrt{FH^2 - KF^2} = \sqrt{(\frac{R}{5})^2 - 9} \Rightarrow$ $\boldsymbol{HK = \sqrt{\frac{R^2}{25} - 9}}$ **cm**

---

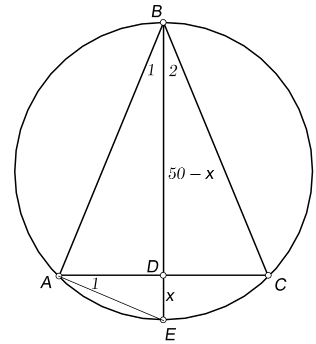
(1) נתון (2) לקשתות שוות - זוויות מרכזיות שוות

(3) חוצה־זווית הראש במשולש שווה־שוקיים הוא גם גובה (4) הוכחה זהה לסעיף א

(5) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו (6) זוויות קדקודיות

(7) יחס הדמיון הנתון (8) משפט פיתגורס

17. א.



$(1)\ \angle B_1 = \angle B_2\ ,\ (2)\ \angle A_1 = \angle B_2 \ \overset{(3)}{\Rightarrow}\ \angle A_1 = \angle B_1$

$(4)\ \angle AED = \angle BEA \ \overset{(5)}{\Rightarrow}\ \triangle ABE \sim \triangle DAE$

$(1)\ \angle B_1 = \angle B_2\ ,\ (2)\ \angle E = \angle C \ \overset{(5)}{\Rightarrow}\ \triangle ABE \sim \triangle DBC$

ב.

$(6)\ BD \perp AC\ ,\ (7)\ \triangle ABE \sim \triangle DBC$

$$\Rightarrow\ \angle BAE = \angle BDC = 90^\circ \ \overset{(8)}{\Rightarrow}\ BE = 2R\ (\checkmark)$$

ג.

$(9)\ DE = x \ \Rightarrow\ BD = 2\cdot 25 - x = 50 - x \ \Rightarrow\ \frac{BD}{DE} = \frac{50-x}{x} = \frac{16}{9} \ \Rightarrow\ 450 - 9x = 16x$

$$\Rightarrow\ 450 = 25x \ \Rightarrow\ x = 18 \ \Rightarrow\ DE = 18\ ,\ BD = 50 - 18 = 32$$

$(10)\ AD^2 = BD\cdot DE = 32\cdot 18 \ \Rightarrow\ AD = 24$

$(11)\ AC = 2\ AD = 2\cdot 24 = 48$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD = \frac{1}{2}\cdot 48\cdot 32 \ \Rightarrow\ S_{\triangle ABC} = 768_{cm^2}$

---

(1) נתון (2) זוויות היקפיות הנשענות על אותו מיתר - שוות זו לזו (3) כלל המעבר

(4) זווית משותפת (5) משפט דמיון זווית־זווית

(6) חוצה זווית הראש במשולש שווה־שוקיים הוא גם גובה (7) מסעיף א

(8) זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר (9) סימון

(10) הגובה ליתר במשולש ישר־זווית הוא הממוצע ההנדסי של היטלי הניצבים על היתר

(11) חוצה זווית הראש במשולש שווה־שוקיים הוא גם תיכון

חידת מקביליות

נתונות שתי מקביליות במישור.

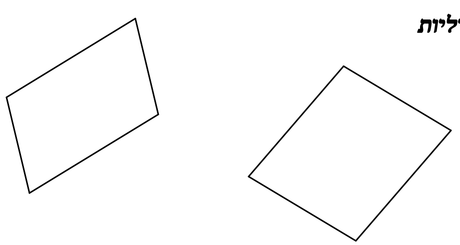
כיצד ניתן לחלק כל אחת מהן לשני חלקים,

כך שכל אחד מהחלקים שווה בשטחו לחלק האחר,

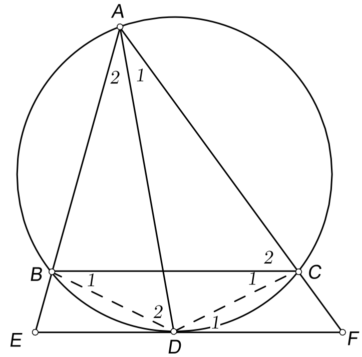
ע"י העברת ישר אחד דרך שתי המקביליות?

תשובה (בצופן א"ת ב"ש):

צזשג מבג קגל טדפקפא יורבמ תכלחפטמ צידשמכמפא (צפלס!)



18. א.



$(1)\ \angle C_1 = \angle A_2 \overset{(2)}{=} \angle A_1 \overset{(3)}{=} \angle D_1$

$(4)\ \angle C_1 = \angle D_1 \quad \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{BC \parallel EF}\ (\surd)$

ב.

$(6)\ \underline{\angle D_1 = \angle A_2}$

$(1)\ \angle D_2 = \angle C_2 \overset{(7)}{=} \angle F$

$(4)\ \underline{\angle D_2 = \angle F} \quad \overset{(8)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{\triangle ABD \sim \triangle DCF}\ (\surd)$

ג.

$(1)\ \angle B_1 = \angle A_1 \overset{(2)}{=} \angle A_2 \overset{(1)}{=} \angle C_1 \quad \overset{(4)}{\Rightarrow} \quad \angle B_1 = \angle C_1 \quad \overset{(9)}{\Rightarrow} \quad DB = \underline{DC}$

$\triangle ABD \sim \triangle DCF \quad \overset{(10)}{\Rightarrow} \quad \frac{AD}{DF} = \frac{AB}{DC} \quad \Rightarrow \quad AD \cdot \underline{DC} = AB \cdot DF \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AD \cdot BD = AB \cdot DF}\ (\surd)$

---

(1) זוויות היקפיות הנשענות אל אותה קשת שוות זו לזו (2) נתון

(3) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו האחר

(4) כלל המעבר

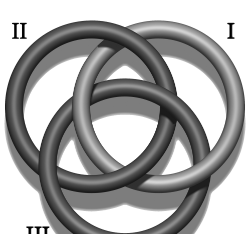
(5) אם זוויות מתחלפות בין שני ישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי שוות זו לזו - הישרים מקבילים

(6) מסעיף קודם (7) זוויות מתאימות בישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי - שוות זו לזו

(8) משפט דמיון זווית־זווית

(9) אם שתי זוויות במשולש שוות זו לזו - המשולש הוא שווה־שוקיים (10) יחס הדמיון

פלא טופולוגי



הטבעות המתוארות בציור נקראות **טבעות בורומין**, ע״ש שבט אצולה איטלקי שסמל זה היה חלק מעיטורי דלתות ביתו.

המיוחד בסידור זה של טבעות הוא שאף לא טבעת אחת קשורה ישירות לטבעת אחרת: I מתחת ל־II ומעל III . II מעל I ומתחת ל־III ,

III מתחת ל־ I ומעל II , ולמרות זאת: כולן קשורות זו לזו.

אם נתיר את אחת הטבעות ־ כל הקשרים יותרו.

ניתן לסדר בסידור אחר גם ארבע לולאות (לא טבעות) סגורות ששומרות על אותן תכונות: אף לא אחת מהן קשורה ישירות ללולאה אחרת - אבל כולן ביחד קשורות!

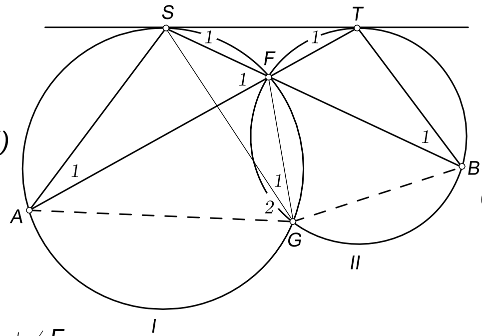
אם נתיר את אחת הלולאות - כל הקשרים יותרו!

יותר מזה: על פי העקרון של סידור ארבע הלולאות ניתן לסדר גם מספר <u>בלתי מוגבל</u> של לולאות השומרות על אותן תכונות טופולוגיות!

19. א.

(1) $\angle S_1 = \angle A_1 \; , \; \angle T_1 = \angle B_1$

(2) $\triangle SAT \sim \triangle TSB \quad \Rightarrow^{(3)} \; \frac{ST}{AS} = \frac{TB}{ST}$ $(\surd)$



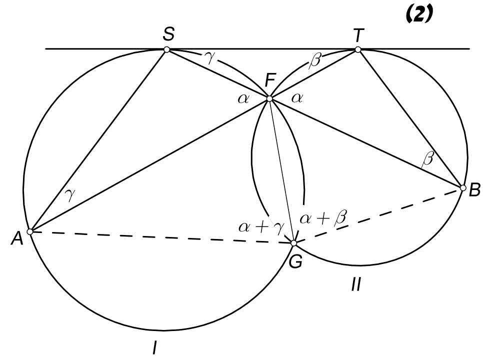
ב. (1)

(4) $\angle G_1 = \angle A_1 \; , \; \angle G_2 = \angle F_1$

$\Rightarrow^{(5)} \; \angle G_1 + \angle G_2 = \angle A_1 + \angle F_1$

$\Rightarrow \; \angle AGF = \angle SFA + \angle SAF$ $(\surd)$

(2)



(6) $\angle AGF = \alpha + \gamma \quad \Rightarrow^{(7)} \; \angle BGF = \alpha + \beta$

<u>$\triangle SFT$:</u> (8) $\alpha = \beta + \gamma$

$\angle AGB = 2\alpha + \beta + \gamma = 2\alpha + \alpha =^{(9)} 180^\circ$

$\Rightarrow \; \alpha = 60^\circ$ $(\surd)$

---

(1) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני

(2) משפט דמיון זווית־זווית (3) יחס הדמיון

(4) זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת, שוות זו לזו (5) חיבור גדלים שווים

(6) מסעיף ב(1) (7) הוכחה סימטרית ל־ב(1)

(8) זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי זוויות המשולש שאינן צמודות לה

(9) נתון

סימטריה מפתיעה

המספרים a , b ו־ c הנתונים במשוואה: $a = b + c$ אינם מקיימים ביניהם קשר סימטרי:
a הינו הסכום של b ו־c. b הינו ההפרש בין a ל־c, ו־c הינו ההפרש בין a ל־b.
בכל זאת קיים ביניהם הקשר הסימטרי הבאה:

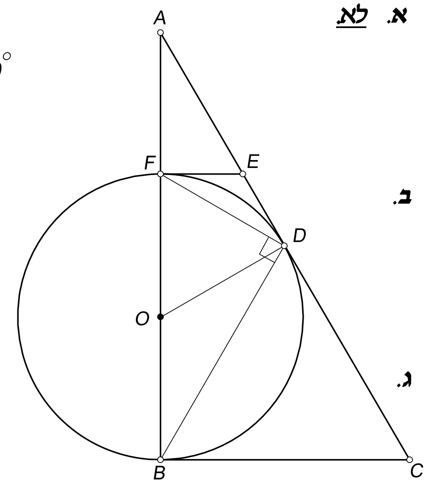
$$a^4 + b^4 + c^4 = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2$$

דוגמה: נבחר: $a = 3 \; , \; b = 5 \; , \; c = 2$ אזי:

$$3 = 5 - 2 \quad \Rightarrow \quad 3^4 + 5^4 + 2^4 = 81 + 625 + 16 = 722$$

$$2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot 25 = 200 + 72 + 450 = 722 \; (\surd)$$

.20 א. <u>לא.</u>



$(1)\ \angle BFE = 90^\circ\ ,\ \angle ODC = 90^\circ \quad \Rightarrow^{(2)}\ \angle BDE \neq 90^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle BFE + \angle BDE \neq 180^\circ \quad \Rightarrow^{(3)}$ **לא**

ב.

$(4)\ EF = ED\ ,\ CD = CB$

$\Rightarrow^{(5)}\ \mathbf{CB + EF = ED + CD}\ (\checkmark)$

ג.

$(7)\ FE = ED = x \quad \Rightarrow \quad BC = CD = 15 - x$

$(8)\ \frac{FE}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{15-x} = \frac{5}{5+15} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \quad 4x = 15 - x \quad \Rightarrow \quad 5x = 15 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{EF = 3_{cm}}$

ד.

$\underline{\triangle AFE:}\ \cos\angle E = \frac{FE}{AE} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \angle FEA = 53.13^\circ$

$\underline{\triangle EFD:}\ (9)\ \angle FEA = \angle F + \angle D = 53.13^\circ\ ,\ EF = ED(=3) \quad \Rightarrow^{(10)}\ \angle F = \frac{53.13^\circ}{2} = 26.57^\circ$

$(11)\ \angle DFB = 90^\circ - 26.57^\circ = 63.43^\circ,\ (12)\ \angle FDB = 90^\circ$

$\Rightarrow^{(13)}\ \angle DBF = 180^\circ - 90^\circ - 63.43^\circ = 26.57^\circ$

$\Rightarrow \quad \underline{\triangle FDB:}\ \angle F = 63.43^\circ\ ,\ \angle D = 90^\circ\ ,\ \angle B = 26.57^\circ$

---

(1) משיק למעגל מאונך לרדיוס במעגל בנקודת ההשקה

(2) הישרים שעליהם OD ו־ BD אינם מתלכדים: אין שני ישרים מאונכים לישר שלישי באותה נקודה

(3) השלמה של זוויות נגדיות במרובע ל־ 180° הוא תנאי הכרחי (ומספיק) לחסימה במעגל

(4) שני קטעים משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת שווים בין אותה נקודה לנקודות ההשקה

(5) סכום גדלים שווים (7) סימון (8) תאלס מורחב

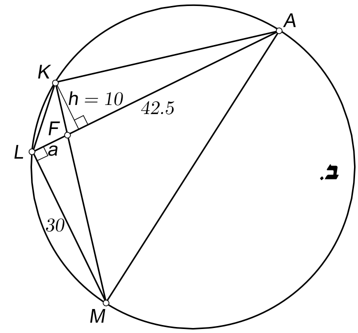
(9) זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי זוויות המשולש שאינן צמודות לה

(10) זוויות הבסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו (11) השלמה ל־ 90° $(\angle BFE)$

(12) זווית היקפית הנשענת על קוטר, היא זווית ישרה

(13) השלמה ל־ 180° במשולש

21. א.



$$(1)\ \angle ALM = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle ALM} = \frac{AL\cdot 30}{2} = 15\ AL$$

$$S_{\triangle ALK} = \frac{AL\cdot h}{2} \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad 15\ AL = 3\cdot\frac{AL\cdot h}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h = 10_{cm}}$$

ב.

$$\underline{\triangle MLF:}\ (3)\ FM^2 = a^2 + 30^2 \quad \Rightarrow \quad FM = \sqrt{a^2 + 900}$$

$$(4)\ h \parallel ML \quad \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad \frac{h}{ML} = \frac{KF}{FM} \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{30} = \frac{KF}{\sqrt{a^2+900}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{KF = \frac{\sqrt{a^2+900}}{3}_{cm}}$$

ג.

$$(6)\ \angle MAL = \angle MKL \ ,\ \angle ALK = \angle AMK \quad \overset{(7)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{\triangle AFM \sim \triangle KFL}$$

ד.

$$\triangle AFM \sim \triangle KFL \quad \overset{(8)}{\Rightarrow} \quad \frac{AF}{KF} = \frac{FM}{FL} \quad \Rightarrow \quad AF\cdot FL = FM\cdot KF$$

$$\Rightarrow \quad 42.5\ a = \sqrt{a^2 + 900}\cdot\frac{\sqrt{a^2+900}}{3} \quad /\cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 127.5\ a = a^2 + 900$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 127.5a + 900 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{127.5 \pm 112.5}{2}$$

$$a_1 = 120 \ ,\ a_2 = 7.5 \ ,\ a < ML = 30 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a = 7.5_{cm}}$$

---

(1) זווית היקפית הנשענת על קוטר (2) נתון (3) משפט פיתגורס

(4) ישרים המאונכים לאותו ישר, מקבילים זה לזה (5) תאלס מורחב (2)

(6) זוויות היקפיות הנשענות על אותו מיתר, שוות זו לזו (7) משפט דמיון זווית־זווית

(8) יחס הדמיון

הוכחה מ'הספר'

המתמטיקאי היהודי־הונגרי פאול ארדֶש (Paul Erdos , 1913–1996) טען שלבורא העולם יש ספר שבו הוא שומר את כל ההוכחות המתמטיות היפות ביותר, האלגנטיות ביותר וגם את כל התשובות לשאלות במתמטיקה שעדיין פתוחות, שטרם נמצא להן מענה. כשהוא היה רוצה להחמיא להוכחה שהיא יפה, הוא היה אומר שזו הוכחה מ'הספר'.

דוגמה:

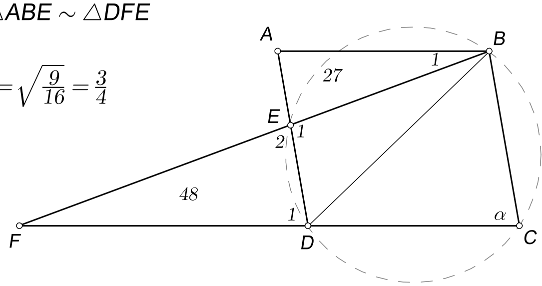
<u>משפט:</u> כל בחירה של $k+1$ מספרים מבין $2k$ מספרים טבעיים עוקבים, תכיל שני מספרים זרים זה לזה.

<u>הוכחה:</u> שני מספרים טבעיים עוקבים – זרים זה לזה (השלם את ההוכחה, זה מאוד פשוט).

כדי לבחור k מספרים זרים מתוך $2k$ המספרים העוקבים, יש לבחור את k המספרים במקומות הזוגיים, או את k המספרים במקומות הלא־זוגיים.

לכן: אם בוחרים $k+1$ מספרים, בהכרח ששניים מהם עוקבים, ולכן הם זרים. מה שהיה להוכיח.

22. א.



$(1)\ \angle A = \angle D_1 \ ,\ \angle B_1 = \angle F \quad \Rightarrow^{(2)}\ \triangle ABE \sim \triangle DFE$

$(3)\ \frac{BE}{EF} = \sqrt{S_{\triangle ABE} : S_{\triangle DFE}} =^{(4)} \sqrt{\frac{27}{48}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

$(5)\ S_{\triangle BED} = \frac{3}{4} \cdot S_{\triangle DFE} = \frac{3}{4} \cdot 48$

$\Rightarrow\ \mathbf{S_{\triangle BED} = 36_{cm^2}}$

ב.

$\angle C =^{(6)} \alpha \quad \Rightarrow^{(7)}\ \angle E_1 = 180^\circ - \alpha \quad \Rightarrow^{(8)}\ \angle E_2 = \alpha$

$(9)\ \angle D_1 = \angle C = \alpha \quad \Rightarrow^{(10)}\ \angle D_1 = \angle E_2 \quad \Rightarrow^{(11)}\ FD = FE$

$\frac{AB}{EF} =^{(12)} \frac{AB}{DF} =^{(13)} \frac{3}{4} \quad \Rightarrow^{(10)}\ \mathbf{\frac{AB}{EF} = \frac{3}{4}}$

---

(1) זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים הנחתכים ע״י ישר שלישי, שוות זו לזו

(2) משפט דמיון זווית־זווית (3) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון

(4) נתון

(5) הצלעות EB ו־ FE מונחות על ישר אחד. לכן הגובה לצלעות אלו מקדקוד D משותף לשני המשולשים ולכן יחס שטחיהם שווה ליחס הבסיסים לאותו גובה

(6) סימון (7) זוויות נגדיות במרובע בר־חסימה, משלימות ל־ 180°

(8) השלמה ל־ 180° של זווית שטוחה

(9) זוויות מתאימות בישרים מקבילים הנחתכים ע״י ישר שלישי, שוות זו לזו (10) כלל המעבר

(11) מול זוויות שוות במשולש, מונחות צלעות שוות (12) הצבה (13) יחס הדמיון

$3! - 2! + 1! = 5$

$4! - 3! + 2! - 1! = 19$

$5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 101$

$6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 619$

$7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 4421$

$8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 35899$

כל המספרים שהתקבלו: 35899 , 4421 , 619 , 101 , 19 , 5 **הם ראשוניים.**

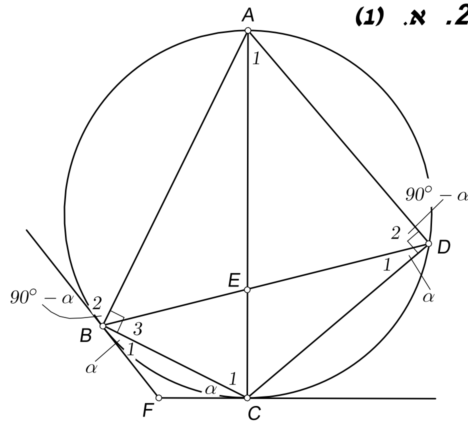
למרבה הצער, החוקיות אינה ממשיכה.

אפשר לקבל עוד מספרים ראשוניים בתבנית זו, אם נתחיל ב־ 105 , 61 , 59 , 41 , 19 , 15 10 **ו־** 160 ,

אבל לא ברצף כפי שמוצג כאן.

(Prime curios , Chris K. Caldwell and G. L. Honaker, Jr.)

23. א. (1)



$(1)\ \angle ABC = 90^\circ \ \overset{(2)}{\Rightarrow}\ \angle D_1 + \angle D_2 = 90^\circ$

$(3)\ \angle B_1 = \angle D_1 \ \overset{(4)}{\Rightarrow}\ \angle B_1 + \angle D_2 = 90^\circ$

$\angle D_2 + \angle B_1 = 90^\circ \ \equiv\ \boldsymbol{\angle ADB + \angle FBC = 90^\circ}$ $(\checkmark)$

(2)

$\angle D_1 = \angle B_1 \overset{(5)}{=} \alpha \ \Rightarrow\ \angle D_2 = 90^\circ - \alpha$

$(6)\ FB = FC \ \overset{(7)}{\Rightarrow}\ \angle FCB = \angle B_1 = \alpha$

$(8)\ \angle F = 180^\circ - 2\alpha$

$(9)\ \angle B_2 = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha = \frac{1}{2}\angle F$

$(3)\ \angle B_2 = \angle D_2 \ \overset{(4)}{\Rightarrow}\ \angle D_2 = \frac{1}{2}\angle F \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\angle BFC = 2\angle ADB}$ $(\checkmark)$

ב. (1)

$(10)\ \angle D_2 = \angle C_1\ ,\ \angle A_1 = \angle B_3 \ \overset{(11)}{\Rightarrow}\ \boldsymbol{\triangle BEC \sim \triangle AED}$ $(\checkmark)$

(2)

$(12)\ AC = 2R\ ,\ (1)\ AE = 7 \ \Rightarrow\ EC = 2R - 7$

$(13)\ \frac{BE}{AE} = \frac{EC}{DE} \ \Rightarrow\ BE\cdot DE = EC\cdot AE \ \overset{(1,4)}{\Rightarrow}\ 21 = (2R-7)\cdot 7 \ \ /:7$

$\Rightarrow\ 2R - 7 = 3 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{2R = 10}$ **(יחידות אורך)**

---

(1) נתון (2) זוויות נגדיות במרובע החסום במעגל - משלימות ל־ 180°

(3) זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על מיתר זה מצידו האחר

(4) הצבה (5) סימון (6) שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה - שווים זה לזה

(7) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים - שוות זו לזו

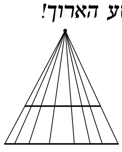
(8) השלמה ל־ 180° במשולש (9) השלמה ל־ 180° של זווית שטוחה

(10) זוויות היקפיות הנשענות על מיתרים שווים - שוות זו לזו

(11) משפט דמיון זווית־זווית (12) זווית היקפית ישרה - נשענת על קוטר (13) יחס הדמיון

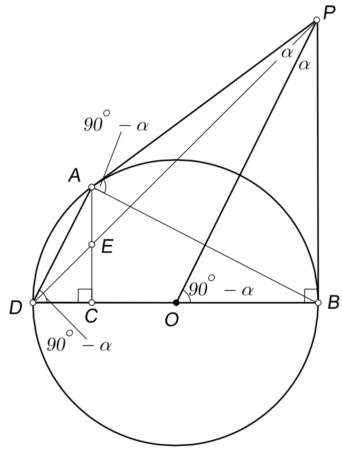
פרדוקס אינסופי

האם בקטע קצר יש פחות נקודות מאשר קטע ארוך? מכיון שבין כל שתי נקודות יש נקודה שלישית, הרי בין כל שתי נקודות יש אינסוף נקודות, אז לכאורה בקטע קצר יש מספר נקודות כמו שיש בקטע הארוך! ובכן, המונח 'מספר' לגבי כמות הנקודות אינו מדויק. בשני קטעים יש אותה 'עוצמה' של נקודות. עוצמה זו מסומנת במתמטיקה באות העברית 'אלף': א . זה מקביל לעוצמת המספרים הממשיים. להבדיל למשל מהמספרים השלמים, או הרציונאליים שהם בני מנָיָה, המסומנים: $\aleph_0$.



*הסימון באות העברית הוא לכבוד מייסד תורת הקבוצות, המתמטיקאי הרוסי־גרמני ממוצא יהודי (מצד האב) **גאורג קנטור** (1845–1918 , Georg Cantor). דרך יפה להמחיש את שוויון העוצמות הוא בתרשים משמאל: לכל נקודה בקטע התחתון שתחובר לנקודה העליונה, תתאים נקודה ייחודית בקטע העליון, ולהיפך!*

24. א.



$(1)\ \angle APO = \angle BPO \overset{(2)}{=} \alpha$

$(3)\ \angle PBD = 90^\circ \overset{(4)}{\Rightarrow} \angle POB = 90^\circ - \alpha$

$(5)\ PA = PB$

$(6)\ \angle PBA = \angle PAB \overset{(4)}{=} \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$

$(7)\ \angle ADB = \angle PAB = 90^\circ - \alpha$

$(8)\ \angle ADB = \angle POB \overset{(9)}{\Rightarrow}$ **$PO \parallel AD$** $(\checkmark)$

ב.

$(10)\ \angle ACD = 90^\circ \overset{(11)}{\Rightarrow} \angle ACD = \angle PBD\ (= 90^\circ)$

$(11)\ \angle ADC = \angle POB \overset{(12)}{\Rightarrow}$ **$\triangle ADC \sim \triangle POB$** $(\checkmark)$

ג.

$(11)\ \angle ECD = \angle PBD\ (= 90^\circ)$, $(13)\ \angle EDC = \angle PDB \overset{(12)}{\Rightarrow}$ **$\triangle DEC \sim \triangle DPB$** $(\checkmark)$

ד.

$$\triangle ADC \sim \triangle POB \overset{(14)}{\Rightarrow} \frac{AD}{PO} = \underline{\frac{DC}{OB} = \frac{AC}{PB}} \Rightarrow \frac{DC}{R} = \frac{AC}{PB}$$

$$\triangle DEC \sim \triangle DPB \overset{(14)}{\Rightarrow} \frac{DE}{DP} = \underline{\frac{EC}{PB} = \frac{DC}{DB}} \Rightarrow \frac{EC}{PB} = \frac{DC}{2R}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{PB} : \frac{EC}{PB} = \frac{DC}{R} : \frac{DC}{2R} \Rightarrow \frac{AC}{PB} \cdot \frac{PB}{EC} = \frac{DC}{R} \cdot \frac{2R}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{EC} = 2 \Rightarrow \mathbf{AC = 2\,EC}\ (\checkmark)$$

---

(1) קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין שני המשיקים

(2) סימון (3) משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה

(4) השלמה ל־ 180° במשולש

(5) שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה, שווים זה לזה

(6) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו

(7) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על מיתר זה מצידו האחר

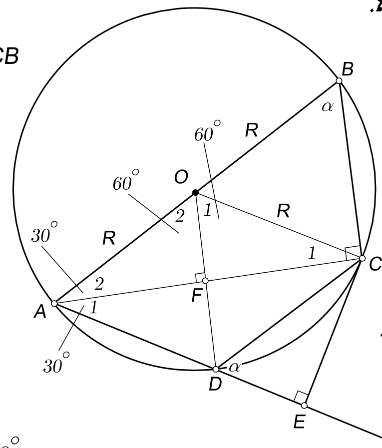
(8) כלל המעבר

(9) אם זוויות מתאימות שוות בשני ישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי - הישרים מקבילים זה לזה

(10) נתון (11) סעיף קודם (12) משפט דמיון זווית־זווית

(13) זווית משותפת (14) יחס הדמיון

25. א.



$(1)\ \angle E = 90^\circ\ ,\ (2)\ \angle ACB = 90^\circ \ \Rightarrow^{(3)}\ \angle E = \angle ACB$

$(4)\ \angle B = \alpha \ \Rightarrow^{(5)}\ \angle ADC = 180^\circ - \alpha$

$(6)\ \angle CDE = \alpha \ \Rightarrow^{(3)}\ \angle CDE = \angle B$

$\Rightarrow^{(7)}\ \triangle CDE \sim \triangle ABC$ (√)

(דניאל הילביץ, גבעת שמואל)

ב.

$(1)\ \dfrac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{1}{4} \ \Rightarrow^{(8)}\ \dfrac{CE}{AC} = \dfrac{1}{2}$

$(9)\ \angle A_1 = 30^\circ \ \Rightarrow^{(10)}\ \angle O_1 = 60^\circ \ \Rightarrow^{(11)}\ \angle O_2 = 60^\circ$

$(12)\ \angle A_2 = \angle C_1 =^{(13)} \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

$\angle OAD = \angle A_1 + \angle A_2 = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

$\angle OAD + \angle AOC = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \ \Rightarrow^{(14)}$ **$OC \parallel AD$** (√)

ג.

$(15)\ \angle E + \angle OCE = 180^\circ\ ,\ (1)\ \angle E = 90^\circ \ \Rightarrow\ \angle OCE = 90^\circ$

$EC \perp OC \ \Rightarrow^{(16)}$ **CE משיק למעגל** (√)

---

(1) נתון (2) זווית היקפית הנשענת על קוטר (3) כלל המעבר (4) סימון

(5) זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל־ 180°

(6) השלמה ל־ 180° של זווית שטוחה (7) משפט דמיון זווית־זווית

(8) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון

(9) מול ניצב ששווה למחצית היתר מונחת זווית בת 30° ($\triangle CEA$)

(10) זווית מרכזית כפולה מזווית היקפית הנשענת על אותו מיתר

(11) OF גובה לבסיס במשולש שווה־שוקיים ולכן הוא גם חוצה זווית הראש

(12) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים, שוות זו לזו (13) השלמה ל־ 180° במשולש

(14) בישרים הנחתכים על־ידי ישר שלישי:

אם זוג זוויות חד־צדדיות משלימות ל־ 180° , הישרים מקבילים זה לזה

(15) זוויות חד־צדדיות בישרים מקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי, משלימות ל־ 180°

(16) ישר המאונך לרדיוס בקצהו - משיק למעגל

.41 (581 - חורף תשע"ז - 2017) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^2+4x}{x^2+3x+b}$. a ו־ b הם פרמטרים.

נתון: $y=1$, $x=1$ הן אסימפטוטות של הפונקציה.

א. מצא את a ואת b .

ב. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים? הסבר.

(4) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה. **(443)**

ד. עבור אילו ערכי x מתקיים: $|f(x)|=-f(x)$? נמק.

ה. סעיף זה עסק בשטחים. לא בחומר של כיתה י.

.42 (841 - קיץ תשע"ז - 2017 - מועד א) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2+4}{x^2-a}$. $a>0$ פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית $x=1$.

ב. מצא את a . **(344)**

הצב את a שמצאת בסעיף ב וענה על הסעיפים ג-ה.

ג. **(1)** האם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית נוספת? אם כן - מהי? אם לא - נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.

(3) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. עבור אילו ערכים של k אין פתרון למשוואה $f(x)=k$? נמק

תשובות

.41 **א.** $a=1\ ,\ b=-4$ **ב.** **(1)** $x\neq 1\ ,\ x\neq -4$ **(2)** $(0,0)$ **(3)** לא

ב. **(4)** $\nearrow:\ \emptyset$, $\searrow:\ (x<-4)\cup(-4<x<1)\cup(x>1)$ **ד.** $0\leq x<1$

.42 **א.** **(1)** $x\neq\pm\sqrt{a}$ **(2)** $(0,-\frac{4}{a})$ **(3)** $y=2$ **ב.** $a=1$ **ג.** **(1)** כן: $x=-1$ **(2)** max $(0,-4)$

ג. **(3)** $\searrow:\ (0<x<1)\cup(x>1)$, $\nearrow:\ (x<-1)\cup(-1<x<0)$ **ה.** $-4<k\leq 2$

.43 (481 - קיץ תשע"ז - 2017 , מועד ב)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{5}{(2x-4)^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$. **(345)**

ה. **(1)** מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $-f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $-f(x)$.

.44 (581 - קיץ תשע"ז - 2017 , מועד ב)

נתונה הפונקציה $f(x)=a-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$. a הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר x .

ב. מצא את a . **(346)**

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=|\,f(x)+k\,|$.

ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

מצא את k (מצא את שתי האפשרויות). נמק.

> **מצא שלושה מספרים a , b ו־c כך ש:** $a+b+c+ab+ac+bc+abc=1000$
>
> **תשובה (בצופן א"ת ב"ש): בב באמי זבגצ זבג**

תשובות

.43 **א.** $x\neq 2$ **ב.** $x=2\ ,\ y=0$ **ג.** $\searrow:\ x>2\ ,\ \nearrow:\ x<2$ **ה.** **(1)** $x=2\ ,\ y=0$

.44 **א.** **(1)** $x\neq 2$ **(2)** $x=2\ ,\ y=a$ **(3)** $\min\,(3,a-1)$

(4) $\searrow:\ 2<x<3\ ,\ \nearrow:\ (x<2)\cup(x>3)$ **ב.** $a=1$ **ד.** $k=\pm 1$

45. (481 , חורף תשע"ח - 2018)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4x}{(x-1)^2}+a$. a הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a במידת הצורך.

א. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה f(x) ?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה f(x) המאונכות לצירים ?

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה f(x) , וקבע את סוגה.

(4) מה הם תחומי העליה והירידה של הפונקציה f(x) ?

נתון: לפונקציה יש אסימפטוטה שמשוואתה היא $y=-3$.

ב. מהו ערך הפרמטר a ? **(347)**

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. **(1)** מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה f(x) עם ציר y .

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה f(x) .

ד. עבור אילו ערכים של k הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה f(x) בנקודה אחת בדיוק ?

הפתעה: ***אם כל הפרמטרים a , b ו־ c במשוואה ריבועית $ax^2+bx+c=0$ אינם זוגיים,***
אזי אין למשוואה פתרון רציונאלי.
יש לטענה זו מספר הוכחות. נביא אחת מהן, פשוטה, קצרה ויפה.
נניח בשלילה שקיים פתרון רציונאלי למשוואה $\frac{p}{q}$ כשבר מצומצם (q ו־ q זרים זה לזה).

$$\Rightarrow \quad a\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\cdot\frac{p}{q}+c=0 \;\; /\cdot q^2 \quad \Rightarrow \quad ap^2+bpq+cq^2=0$$

אגף ימין (0) מתחלק ב־ p וב־ q - לכן גם אגף שמאל מתחלק ב־ p וב־ q .
שני המחוברים הראשונים מתחלקים ב־ p , לכן גם המחובר השלישי cq^2 מתחלק ב־ p .
שני המחוברים האחרונים מתחלקים ב־ q . לכן גם המחובר הראשון ap^2 מתחלק ב־ q .
מכיון שגם a וגם c אינם זוגיים, וכל אחד מהם מתחלק גם ב־ p וגם ב־ q - אז גם p וגם q אינם זוגיים.
מסקנה: שלושת המחוברים אינם זוגיים.
אבל: סכום של שלושה מחוברים אי־זוגיים אינו יכול להתאפס. סתירה. מה שהיה להוכיח.

תשובות

45. א. **(1)** $x\neq 1$ **(2)** $x=1\ ,\ y=a$ **(3)** $\min\ (-1, a-1)$ **(4)** $\nearrow:\ -1<x<1\ ,\ \searrow:\ (x<-1)\cup(x>1)$

ב. $a=-3$ **ג.** **(1)** $(0,-3)$ **ד.** $k_1=-3\ ,\ k_2=-4$

.46 (581 , חורף תשע"ח - 2018)

נתונה משפחת הפונקציות: $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-a}$. $a\neq 0$ הוא פרמטר , $a\neq 4$.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a>0$ ובין $a<0$ במידת הצורך.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר x .

(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר x (אם יש כאלה).

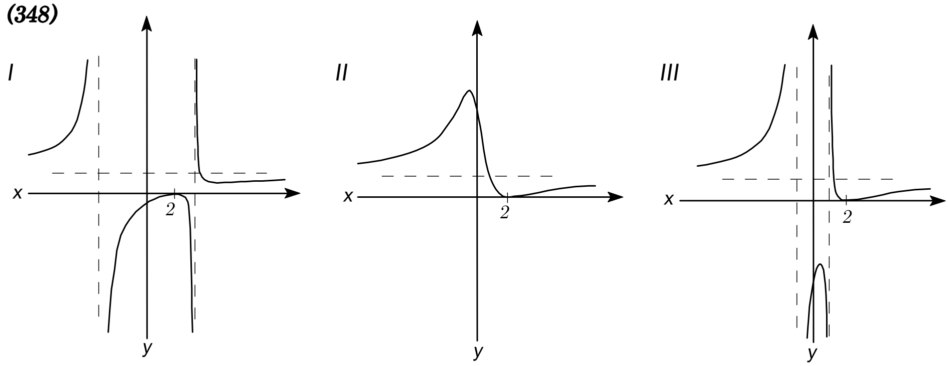
ענה על סעיף ב. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a>4$ ובין $a<4$ במידת הצורך.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. לפניך שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה $f(x)$, כל אחד עבור ערך אחר של a .

כתוב מהו תחום הערכים של a המתאים לכל אחד מן הגרפים I-III . נמק.

(348)



השורה התחתונה בכל עמודה היא סכום שני המספרים שמעליה.
שלושת המספרים התלת־ספרתיים שבכל שמונת הטורים מכיל את כל הספרות מ־ 1 עד 9 .
הפרשם הסכומים בשורה התחתונה קבוע, והוא שווה ל־ 9 .

243	341	154	317	216	215	318	235
675	586	782	628	738	748	654	746
918	927	936	945	954	963	972	981

תשובות

.46 א. **(1)** $\underline{a>0:}\ x\neq\pm\sqrt{a}$, $\underline{a<0:}\ \forall x$ **(2)** $(2,0)$, $(0,-\frac{4}{a})$ **(3)** $y=1$

(4) $\underline{a>0:}\ x=\pm\sqrt{a}$, $\underline{a<0:}\ \emptyset$

ב. $\underline{a<4:}$ min $(2,0)$, max $(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a})$, $\underline{a>4:}$ min $(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a})$, max $(2,0)$

ג. $\underline{\text{III}:}\ 0<a<4$, $\underline{\text{II}:}\ a<0$, $\underline{\text{I}:}\ a>4$

.47 (481 - קיץ תשע"ט - 2019 - מועד א)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+x-2}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(5) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$?

אם הוא חותך את האסימפטוטה, מצא את שיעורי נקודת החיתוך.

ד. נתון: לגרף הפונקציה $g(x)=f(x)+c$ (c הוא פרמטר) יש אסימפטוטה אופקית $y=5$.

מצא את c . נמק. **(349)**

.48 (481 , קיץ תשע"ט - 2019 - מועד ב)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{x^2+2x-3}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. **(1)** סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום $-3<x<1$.

(2) לא בחומר של כיתה י. **(350)**

כשהשלמות היא סטנדרט: *מפעל בארה"ב הזמין ברגים ממפעל ביפן. בטופס ההזמנה השגרתי של החברה המזמינה, צוין שהחברה תקבל עד 3% ברגים פגומים. כשהגיעה ההזמנה לארה"ב - הם קיבלו מכולה גדולה עם הברגים ועוד ארגז נפרד נוסף שעליו צוין: "3% ברגים פגומים" . . .*

תשובות

.47 **א.** **(1)** $x\neq 1$, $x\neq -2$ **(2)** $y=3$, $x=1$, $x=-2$ **(3)** $(0,0)$ **(4)** $\min\ (4,2\frac{2}{3})$, $\max\ (0,0)$

(5) $\searrow$: $(0<x<1)\cup(1<x<4)$, $\nearrow$: $(x<-2)\cup(-2<x<0)\cup(x>4)$

ג. כן: $(2,3)$ **ד.** $c=2$

.48 **א.** **(1)** $x\neq -3$, $x\neq 1$ **(2)** $y=1$, $x=-3$, $x=1$ **ב.** $\min\ (3,\frac{3}{4})$, $\max\ (0,0)$

.49 (581 , קיץ תשע"ט - 2019 - מועד ב)

נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$. b ו־ c הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ זוגית. **(351)**

ב. מצא את ערכו של הפרמטר b .

נתון: לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר x

בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצא את תחום הערכים של c .

ד. **(1)** מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

הבע באמצעות c, אם צריך.

(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$,

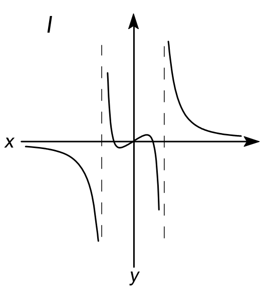
וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

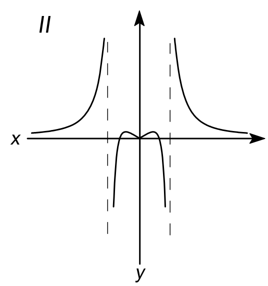
ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$

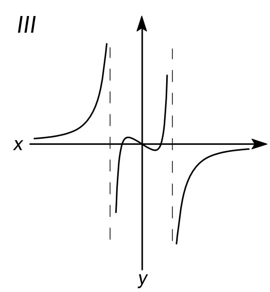
המוגדרות באותו תחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$.

(1) איזה מהגרפים שלפניך הוא גרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) לא בחומר של כיתה י.







איש אחד שאל גנן אנגלי שטיפל בדשא מטופח במיוחד, מהו הסוד של האנגלים שהם מצליחים לגדל דשא כל־כך יפה, כל־כך ירוק וכל כך מסודר. ענה לו אותו גנן: כל יום אנחנו משקים אותו, מזבלים אותו, גוזמים אותו היכן שצריך, מעדרים את האדמה שלו, מנכשים ממנו עשבים שוטים, מרחיקים ממנו חרקים ומזיקים, וככה תוך משהו כמו מאתים שנה - אתה מקבל את הדשא היפה הזה . . .

תשובות

.49 **א.** $x \neq \pm 2$ **ב.** $b = 0$ **ג.** $0 < c < 4$ **ד.** **(1)** $\max\left(0, \frac{c}{4}\right)$ **(2)** $y = 1$

ה. **(1)** III **(2)** $S = \frac{c^2}{16}$ (יחידות ריבועיות)

חשבון דיפרנציאלי - פונקציות רציונאליות - פתרונות

1. א.

$y=\frac{x-2}{4}+\frac{a}{x}=\frac{1}{4}x-\frac{2}{4}+\frac{a}{x}$

$y'=\frac{1}{4}-0-\frac{a}{x^2}=\frac{1}{4}-\frac{a}{x^2} \Rightarrow$ שיפוע המשיק בנקודה הנתונה $y'(-2)=\frac{1}{4}-\frac{a}{(-2)^2}=\frac{1}{4}-\frac{a}{4}$

שיפוע זה שווה ל- $m=-\frac{3}{4}$ שהוא שיפוע הישר המקביל לו:

$\frac{1}{4}-\frac{a}{4}=-\frac{3}{4}\ /-\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{a}{4}=-1\ /\cdot(-4) \Rightarrow \mathbf{a=4}$

ב.

$y=\frac{x-2}{4}+\frac{4}{x} \rightarrow \mathbf{x\neq 0}$

ג.

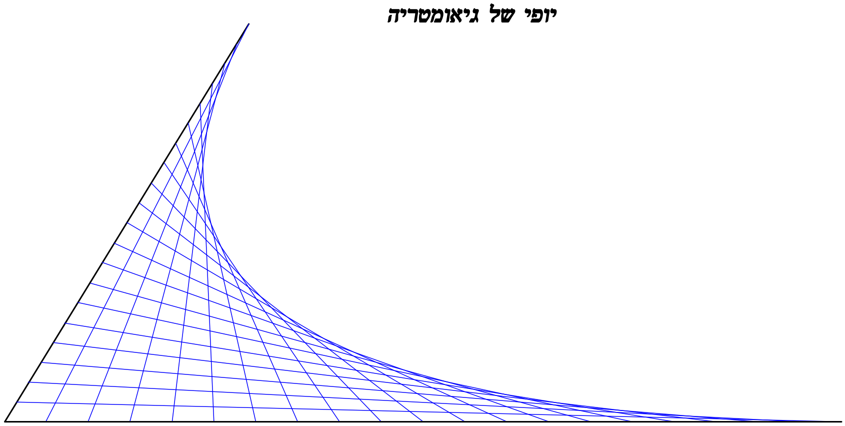
$y'=\frac{1}{4}-\frac{4}{x^2}\overset{?}{=}0 \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{4}{x^2} \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$

$\boxed{y'=\frac{x^2-16}{4x^2}}$

x		-4		0		4	
y'	$\frac{+}{+}=+$	0	$\frac{-}{+}=-$	$\emptyset$	$\frac{-}{+}=-$	0	$\frac{+}{+}=+$
y	↗	max	↘	$\emptyset$	↘	min	↗

$\nearrow$: $(x<-4)\cup(x>4)$, $\searrow$: $(-4<x<0)\cup(0<x<4)$

יופי של גיאומטריה



הצורה הגאומטרית המוצגת כאן התקבלה בדרך הבאה:
של שוקי זווית (כלשהי) סִימַנּוּ קטעים שווים.
חיברנו את השֶנֶת הרחוקה מהקודקוד על שוק אחת עם השֶנֶת הקרובה לקודקוד שבשוק האחרת,
אח"כ חיברנו את השֶנֶת השניה מהסוף על שוק אחת עם השֶנֶת השניה מהקודקוד שעל השוק האחרת,
וכך עד שכל השנתות חוברו זו לזו כמתואר. הצורה הפנימית שהתקבלה היא **פרבולה**.

2. א.

$f(x)=3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x \neq 0}$

ב.

$y=0 \quad \Rightarrow \quad 3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \;\; /\cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2-4x+1=0$

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6}=\frac{2\pm 1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{3}{3}=1\;,\; x_2=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(\frac{1}{3},0)\;\;,\;\;(1,0)}$

ג. - ד.

$f'(x)=-4\cdot(-\frac{1}{x^2})-\frac{1}{(x^2)^2}\cdot 2x=\frac{4}{x^2}-\frac{2x}{x^4}=\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}\overset{?}{=}0 \;\; /\cdot x^3$

$\Rightarrow \quad 4x-2=0 \quad \Rightarrow \quad 4x=2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2})=3-\frac{4}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{4}}=3-4\cdot 2+4=-1$

$f'(x)=\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}=\frac{4x-2}{x^3}=\boxed{\frac{2(2x-1)}{x^3}}$

x		0		$\frac{1}{2}$	
f'	$\frac{-}{-}=+$	$\emptyset$	$\frac{-}{+}=-$	0	$\frac{+}{+}=+$
f	$\nearrow$	$\emptyset$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$\Rightarrow \quad$ **min :** $\mathbf{(\frac{1}{2},-1)}$ **,** $\underline{\underline{\mathbf{x>0:}}}$ $\underline{\nearrow}$**:** $\mathbf{x>\frac{1}{2}}$ **,** $\underline{\searrow}$**:** $\mathbf{0<x<\frac{1}{2}}$

$\underline{x<0:}$ $\mathbf{f'(x)>0 \;\Rightarrow\; f\nearrow}$ $(\checkmark)$:ישירות מהטבלה

---

3. א.

$y=\frac{2}{x}-x^2 \;\;,\;\; \mathbf{x\neq 0}$

ב.

$y'=-\frac{2}{x^2}-2x\overset{?}{=}0 \;\; /\cdot(-x^2) \quad \Rightarrow \quad 2+2x^3=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3=-2 \quad \Rightarrow \quad x^3=-1 \quad \Rightarrow \quad x=-1$

$y''=-2(-\frac{2x}{x^4})-2=\frac{4}{x^3}-2 \quad \Rightarrow \quad y''(-1)=\frac{4}{(-1)^3}-2=-4-2<0 \quad \Rightarrow \quad max$

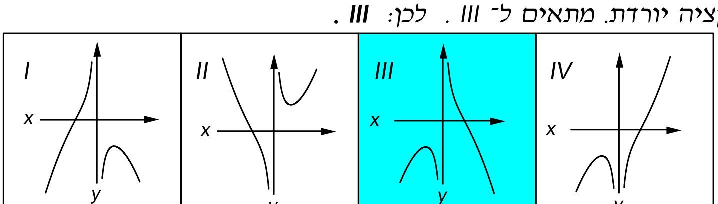
$y(-1)=\frac{2}{-1}-(-1)^2=-2-1=-3 \quad \Rightarrow \quad$ **max :** $\mathbf{(-1,-3)}$

ג.

$y'=-\frac{2}{x^2}-2x \;\;,\;\; x>0: \;\; -\frac{2}{x^2}<0\;,\; -2x<0 \quad \Rightarrow \quad y'<0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}\searrow$

ד. נקודת הקיצון היא מקסימלית ברביע השלישי. מתאים ל- III ול- IV .

עבור $x>0$ הפונקציה יורדת. מתאים ל- III . לכן: **III** .



ה. $max:\;(-1,-3) \quad \Rightarrow \quad \underline{\nearrow}$**:** $\mathbf{x<-1}$ **,** $\underline{\searrow}$**:** $\mathbf{-1<x<0}$

4. א. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2-4x+m}$

אסימפטוטה אנכית $x=1 \;\Rightarrow\; 1^2-4\cdot 1+m=0 \;\Rightarrow\; \mathbf{m=3}$

ב.

$$y=-\frac{1}{x^2-4x+3} \quad , \quad x^2-4x+3=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1$$

$$\Rightarrow\; x_1=3\,,\; x_2=1 \;\Rightarrow\; \mathbf{x=3}$$

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^2-4x+3}=\lim -\frac{1}{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}=-\frac{1}{\infty(1-0+0)}=-\frac{1}{\infty}=0 \;\Rightarrow\; \mathbf{y=0}$$

ג.

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2-4x+3}\right)'=-\left(-\frac{2x-4}{(x^2-4x+3)^2}\right)=\frac{2x-4}{(x^2-4x+3)^2}\overset{?}{=}0 \;\Rightarrow\; x=2$$

$$(2x-4)'=2 \;\Rightarrow\; f''(2)>0 \;\Rightarrow\; x_{min}=2$$

$$\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^2-4\cdot 2+3}=-\frac{1}{-1}=1 \;\Rightarrow\; \mathbf{min\ (2,1)}$$

---

5. א. $g(x)=\dfrac{x^2-k}{x+5} \;,\; g'(-2)=-\dfrac{7}{9} \;;\; k=?$

$$g'(x)=\frac{2x(x+5)-1\cdot(x^2-k)}{(x+5)^2}=\frac{x^2+10x+k}{(x+5)^2}$$

$$g'(-2)=\frac{4-20+k}{3^2}=\frac{k-16}{9}=-\frac{7}{9} \;\Rightarrow\; k=-7+16 \;\Rightarrow\; \mathbf{k=9}$$

ב. (1)

$$\mathbf{g(x)=\frac{x^2-9}{x+5} \;\Rightarrow\; x\neq -5}$$

(2)

$$x=0 \;\Rightarrow\; y=-\frac{9}{5} \;\Rightarrow\; \mathbf{(0,-1\tfrac{4}{5})} \quad ; \quad y=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 3 \;\Rightarrow\; \mathbf{(\pm 3,0)}$$

(3)

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-9}{x+5}=\frac{16}{0}=\infty \;\Rightarrow$$ **אסימפטוטה אנכית** $\mathbf{x=-5}$

(4)

$$g'(x)=\frac{x^2+10x+k}{(x+5)^2}=\frac{x^2+10x+9}{(x+5)^2}\overset{?}{=}0 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\frac{-10\pm 8}{2}=-5\pm 4$$

$$\Rightarrow\; x_1=-1\,,\; x_2=-9$$

מכנה הנגזרת הראשונה חיובי. לכן מספיק לגזור את מונה הנגזרת הראשונה:

$$(x^2+10x+9)'=2x+10$$

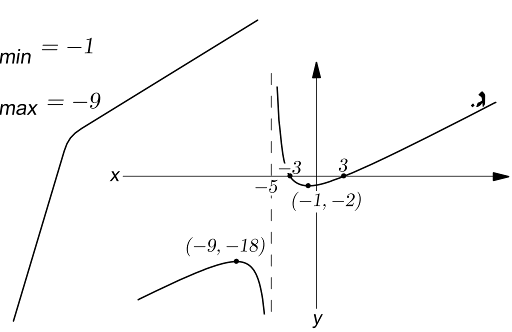
$$2\cdot(-1)+10>0 \;\Rightarrow\; g''(-1)>0 \;\Rightarrow\; x_{min}=-1$$

$$2\cdot(-9)+10<0 \;\Rightarrow\; g''(-9)<0 \;\Rightarrow\; x_{max}=-9$$

$$g(-1)=\frac{1-9}{4}=\frac{-8}{4}=-2 \;\Rightarrow\; \mathbf{min:(-1,-2)}$$

$$g(-9)=\frac{81-9}{-4}=\frac{72}{-4}=18 \;\Rightarrow\; \mathbf{max:(-9,-18)}$$

ג.



6. א. $A = ?$; $y = \frac{1}{x^2 - Ax}$, $y'(1) = \frac{2}{9}$

$$y' = -\frac{1}{(x^2-Ax)^2}\cdot(2x-A) \;\Rightarrow\; y'(1) = -\frac{2-A}{(1-A)^2} = \frac{2}{9} \;\Rightarrow\; 9A - 18 = 2 - 4A + 2A^2$$

$$2A^2 - 13A + 20 = 0 \;\Rightarrow\; A_{1,2} = \frac{13 \pm 3}{4} \;\Rightarrow\; \mathbf{A_1 = 4 \quad , \quad A_2 = 2\tfrac{1}{2}}$$

ב.

$$y = \frac{1}{x^2-4x} \;\Rightarrow\; x^2 - 4x \neq 0 \;\Rightarrow\; x(x-4) \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x \neq 0 \;,\; x \neq 4}$$

ג.

$$y' = -\frac{1}{(x^2-4x)^2}\cdot(2x-4) = \boxed{\frac{4-2x}{(x^2-4x)^2}} \overset{?}{=} 0 \;\Rightarrow\; 4-2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$$

המכנה של הנגזרת הראשונה חיובי בנקודה החשודה,

לכן מספיק לגזור את מונה הנגזרת הראשונה:

$$(4-2x)' = -2 \;\Rightarrow\; y''(2) < 0 \;\Rightarrow\; x_{max} = 2$$

$$y(2) = \frac{1}{2^2 - 4\cdot 2} = -\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \mathbf{max\ (2, -\tfrac{1}{4})}$$

ד.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2-4x} = \frac{1}{0} = \infty \;\Rightarrow\; \mathbf{x = 0}$$ **אס. אנכית**

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{x^2-4x} = \frac{1}{0} = \infty \;\Rightarrow\; \mathbf{x = 4}$$ **אס. אנכית**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2(1-\frac{4}{x})} = \frac{1}{\infty(1-0)} = \frac{1}{\infty} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{y = 0}$$ **אס. אופקית**

ה.

x		0		2		4	
y'	$+$	$\emptyset$	$+$	0	$-$	$\emptyset$	$-$
y	↗	asym.	↗	max	↘	asym.	↘

$\Rightarrow$ ↗: $\mathbf{(x < 0) \cup (0 < x < 2)}$

↘: $\mathbf{(2 < x < 4) \cup (4 < x)}$

ר' אברהם הַבֶּדֶרְשִׁי היה פיטן שחי בצרפת במאה ה־ 13. הוא חיבר תפילה ארוכה שנקראת 'בַּקָּשַׁת אֶלֶף אַלְפִין'. תפילה זו מכילה אלף מילים שכולן מתחילות באות 'א' !

יצירה אחרת שלו, 'בַּקָּשַׁת ה־לָמֶדִין' או 'בֵּית אֵל', הינה שיר, עם חרוז ועם משקל. בכל מילה שלו מופיעה האות 'ל' וכל השיר בנוי רק על מחצית אותיות הא"ב: מ־ 'א' ועד 'ל' בלבד !

לכן הוא גם נקרא 'בית אל': 'בית' = 412 מילים , 'אל' – האותיות מ־ 'א' ועד 'ל' בלבד.

בנו, הפיטן **ר' יְדַעְיָה הַפְּנִינִי** חיבר את 'בַּקָּשַׁת הַמֵּמִין'. בתפילה זו למעלה מאלף מילים, שכולן מתחילות באות 'מ' !

7. א. (1)

$$y=\frac{-8x+4}{x^2+2x+1}=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x\neq -1}$$

(2)

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{4}{1}=4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(0,4)}$$

$$y=0 \quad \Rightarrow \quad 1-2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(\tfrac{1}{2},0)}$$

(3)

$$x=-1 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{12}{0}=\infty \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x=-1}$$ **אסימפטוטה אנכית**

$$x=\infty \quad \Rightarrow \quad y=\frac{\cancel{x}(-8+\frac{4}{\infty})}{\cancel{x}(x+2+\frac{1}{x})}=\frac{-8+0}{\infty+2+0}=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y=0}$$ **אסימפטוטה אופקית**

(4)

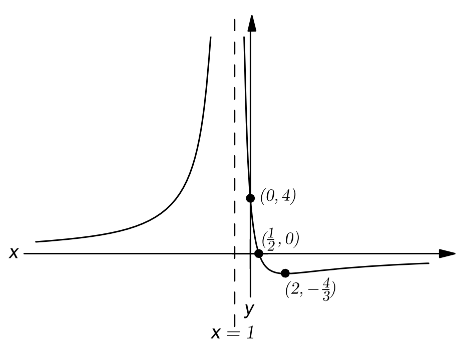
$$y'=\frac{4\cdot(-2)\cdot(x+1)^2-2(x+1)\cdot 4(1-2x)}{(x+1)^4}=\frac{-8(x+1)-8(1-2x)}{(x+1)^3}=\frac{-8(x+1+1-2x)}{(x+1)^3}$$

$$\boxed{y'=\frac{-8(2-x)}{(x+1)^3}} \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

x		-1		2	
y'	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
y	↗	asym.	↘	min	↗

$$y(2)=\frac{-16+4}{4+4+1}=\frac{-12}{9}=-\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{min\ (2,-\tfrac{4}{3})}$$

ב.

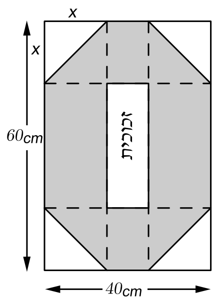


ג. הערך הנמוך ביותר של הפונקציה (הערך של y) הוא $-\frac{4}{3}$.

לכן קו אופקי שמתחת לערך זה ($y<-\frac{4}{3}$) אינו יכול לחתוך את הפונקציה.

קו אופקי בערך זה ($y=-\frac{4}{3}$) משיק לפונקציה בנקודת המינימום, ולכן: $\mathbf{k<-\frac{4}{3}}$

חמשת הימים הראשונים שאחרי שבת - הם הקשים ביותר

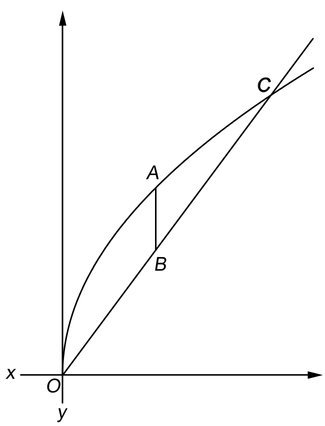


.28 (003 , סתיו תשע"ב - 2011 , לוחמים) אדם הזמין לביתו מרצפות.
כל מרצפת היא בצורת מלבן, אורכה 60_{cm} ורוחבה 40_{cm} .
המרצפת שהוזמנה מורכבת מחרסינה אפורה,
זכוכית לבנה בצורת מלבן במרכז וחרסינה לבנה בפינות
בצורת משולשים זהים שווי־שוקיים שאורך השוק שלהם
הוא x_{cm} $(x > 0)$.

א. **(1)** בטא את סך כל השטח הלבן שבמרצפת באמצעות x .

(2) מה צריך להיות הגודל של x כדי ששטח החרסינה האפורה במרצפת יהיה מקסימלי? **(425)**

ב. מהו השטח המקסימלי שיכול להיות לחרסינה האפורה במרצפת?



.29 (803 , קיץ תשע"א - 2011 , חצב־ברק)
בציור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x}$
והישר $y = 2x$.
גרף הפונקציה והישר נחתכים בנקודות
O ו־ C (O - ראשית הצירים).
ישר המקביל לציר y , חותך את גרף הפונקציה
ואת הישר (בין הנקודות O ו־ C), כך ש־A היא
נקודת החיתוך עם $f(x)$,
ו־B היא נקודת החיתוך עם הישר.

א. סמן ב־ x את שיעור x של הנקודה B ובטא באמצעותו את אורך הקטע AB .

ב. **(1)** מצא את שיעור x של הנקודה B שעבורה אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

(2) מהו האורך המקסימלי של הקטע AB ? **(426)**

$$3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$$

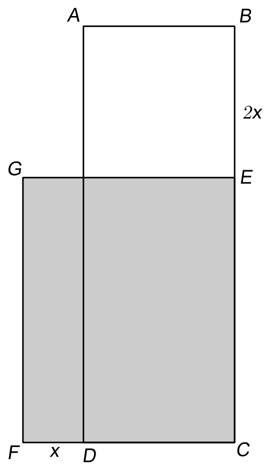
המספר היחיד הידוע בעל תכונה זו, פרט ל: $1 = 1^1$

(ספר המספרים / דייוויד וולס - הוצאת מי-אן)

תשובות

.28 א. **(1)** $S = 6x^2 - 200x + 2400$ (סמ"ר) **(2)** $x = 16\frac{2}{3}$ cm **ב.** $S = 1666\frac{2}{3}$ (סמ"ר)

.29 א. $AB = 2\sqrt{x} - 2x$ (יחידות אורך) **ב.** **(1)** $x_B = \frac{1}{4}$ **(2)** $\max AB = \frac{1}{2}$ (יחידת אורך)



.30 (003, חורף תשע״ב - 2012, לוחמים)

נתון מלבן $ABCD$ שבו $BC = 50_{cm}$, $DC = 20_{cm}$.

מאריכים את הצלע DC ב־ x ס״מ,

ומקצרים את הצלע BC ב־ $2x$ ס״מ,

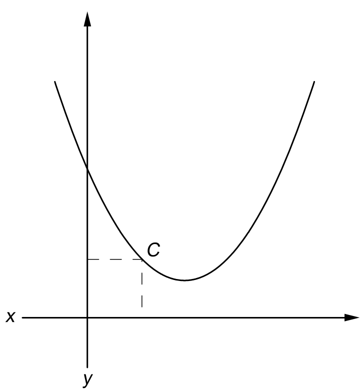
כך שנוצר מלבן $FCEG$.

א. בטא באמצעות x את אורכי הצלעות EC ו־ FC של המלבן $FCEG$.

ב. בטא באמצעות x את שטח המלבן $FCEG$.

ג. **(1)** מצא את הערך של x שעבורו שטח המלבן $FCEG$ הוא מקסימלי.

(2) מצא את שטח המלבן $FCEG$ ששטחו מקסימלי. **(426)**



.31 (003, חורף תשע״ב - 2012)

בציור נתונה הפונקציה $y = x^2 - 3x + 3$.

א. C היא נקודה על גרף הפונקציה.

מצא את שיעור x של הנקודה C

שעבורו סכום השיעורים של C הוא מינימלי.

ב. דרך הנקודה C שמצאת בסעיף א

העבירו אנך לציר x ואנך לציר y .

האנכים יוצרים מרובע עם הצירים.

מצא את שטח המרובע. **(427)**

הריבוע המוצג כאן הוא ריבוע קסם שסכומו 242 :

96	64	37	45
39	43	98	62
84	76	25	57
23	59	82	78

אם נהפוך את סדר הספרות שבכל ריבוע

- נקבל ריבוע שגם הוא ריבוע קסם עם אותו סכום קבוע - 242:

69	46	73	54
93	34	89	26
48	67	52	75
32	95	28	87

תשובות

.30 **א.** $FC = (20 + x)_{cm}$, $EC = (50 - 2x)_{cm}$ **ב.** $S = -2x^2 + 10x + 1000$

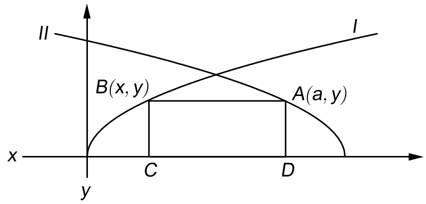
ג. **(1)** $x = 2.5_{cm}$ **(2)** $S = 1012.5$ (סמ״ר)

.31 **א.** $x_C = 1$ **ב.** $S = 1$ (יחידה ריבועית)

.32 (004 , חורף תשע"ב - 2012)

בציור מוצגים הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = \sqrt{x}$ (I) ו־ $g(x) = \sqrt{-x+2}$ (II) .



א. מצא את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגם הפונקציה $g(x)$ מוגדרת.

ב. נקודה $B(x,y)$ $(0 < x < 1)$ נמצאת על גרף I ,

ונקודה $A(a,y)$ נמצאת על גרף II כך ש־ AB מקביל לציר x .

דרך הנקודות A ו־ B העבירו אנכים לציר x , ונוצר המלבן ABCD .

(1) הראה כי $a = 2 - x$. **(427)**

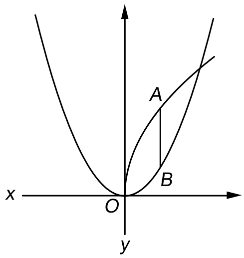
(2) מצא את שיעור x של הנקודה B , שעבורו שטח המלבן ABCD מקסימלי.

(3) מצא את השטח המקסימלי של המלבן ABCD .

.33 (804 , קיץ תשס"ט - 2009 , מועד א) נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{1}{8}x^2$ ו־ $g(x) = \sqrt{2x}$.

הנקודות A ו־ B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך ש־ AB מקביל לציר y ,

והנקודות נמצאות בין שתי נקודות החיתוך של הגרפים של הפונקציות.

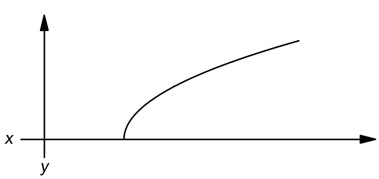


א. מצא את שיעורי הנקודות A ו־ B שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

ב. עבור האורך המקסימלי של הקטע AB , **(428)**

חשב את שטח המשולש ABO (O - ראשית הצירים).

.34 (804 , קיץ תשס"ט - 2009 , מועד ב) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-5}$.



נקודה B היא הקדקוד של פרבולה שמשוואתה $y = x^2 - 16x + 64$.

מצא נקודה על גרף הפונקציה $f(x)$, שמרחקה מהנקודה B הוא מינימלי. **(428)**

43,201 הוא הראשוני הקטן ביותר מבין הראשוניים בעלי חמש ספרות שמכילים את כל הספרות מ־0 עד 4

תשובות

.32 א. $0 \le x \le 2$ **ב. (2)** $x_B = \frac{1}{3}$ **(3)** $S = \frac{4\sqrt{3}}{9} = 0.7698$ (יחידה ריבועית)

.33 א. $B(2,\frac{1}{2})$, $A(2,2)$ **ב.** $S_\triangle = 1\frac{1}{2}$ (יחידות ריבועיות)

.34 $(7,3)$

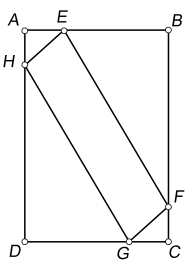
.35 (804 , חורף תש"ע - 2010) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא על גרף הפונקציה $f(x)$ נקודה שהמכפלה של שיעור x שלה בשיעור y שלה היא מינימלית. **(429)**

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$. היעזר בתשובותיך לסעיפים א ו־ ב.

.36 (804 , קיץ תשע"א - 2011 , מועד א)



במלבן $ABCD$ אורך הצלע AD הוא 10_{cm} ,

ואורך הצלע AB הוא a_{cm} .

הנקודות H , G , F , E נמצאות על צלעות המלבן,

כך ש־ $AE=AH=CF=CG=x$.

א. **(1)** הבע באמצעות a ו־ x

את סכום השטחים של המשולש BEF והמשולש AEH . **(429)**

(2) הבע באמצעות a את הערך של x שעבורו שטח המרובע $EFGH$ הוא מקסימלי.

ב. כאשר שטח המרובע $EFGH$ מקסימלי, אורך הקטע DH הוא 6_{cm} . מצא את הערך של a .

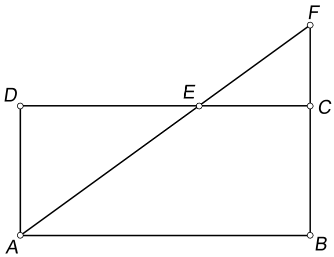
.37 (804 , חורף תשע"ב - 2012) במשולש ישר־זווית סכום הניצבים הוא 20_{cm} .

א. מבין כל המשולשים המקיימים תנאי זה,

מצא את אורכי הניצבים במשולש שבו אורך התיכון ליתר הוא מינימלי. **(430)**

ב. מצא את אורכי התיכונים לניצבים במשולש, שאת הניצבים שלו מצאת בסעיף א.

.38 (804 , קיץ תשע"ג - 2013 , מועד ב)



נתון מלבן $ABCD$ שאורכי צלעותיו הם: $AD=4$, $AB=9$.

הנקודה E נמצאת על הצלע CD (בין C ל־ D).

המשך AE חותך את המשך הצלע BC בנקודה F .

א. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle FCE$.

ב. סמן $DE=x$, ומצא מה צריך להיות האורך של DE **(430)**

כדי שסכום השטחים של המשולשים ADE ו־ FCE יהיה מינימלי?

תשובות

.35 **א.** $x>1$ **ב.** $(2,1)$

.36 **א.** **(1)** $S_{\triangle BEF}+S_{\triangle AEH}=\frac{2x^2-(10+a)x+10a}{2}cm^2$ **(2)** $x_{max}=\frac{10+a}{4}$ **ב.** $a=6$

.37 **א.** 10_{cm} , 10_{cm} **ב.** $5\sqrt{5}=11.18_{cm}$ (כל אחד מהתיכונים) **.38** **ב.** $DE=\frac{9}{\sqrt{2}}$ (יחידות אורך)

.39 (806 , קיץ תשע"ג - 2013 , מועד ב)

דני יצא מנקודה A, הנמצאת בשדה במרחק 1_{km} מהכביש BC .

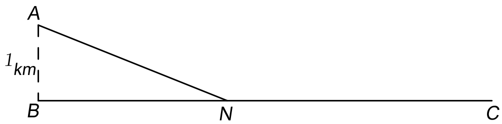
הוא הלך בקו אלכסוני במהירות קבועה v , **(431)**

והגיע לכביש BC בנקודה כלשהי N .

דני הלך בכביש במהירות הגדולה פי $\frac{13}{12}$

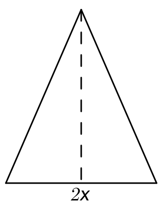
מהמהירות שבה הלך בשדה,

והגיע לנקודה C בכביש. $BC = 6_{km}$.



מהו אורך המסלול ANC אם ידוע שדני עבר אותו בזמן המינימלי?

.40 (804 , קיץ תשע"ד - 2014 , מועד ג)



נתון משולש שווה־שוקיים שהיקפו 30_{cm} .

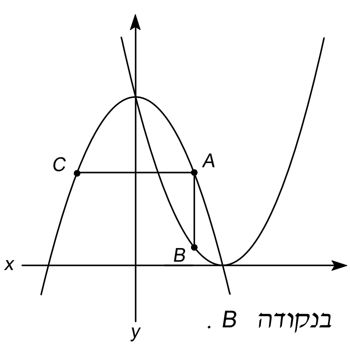
א. סמן ב־ $2x$ את בסיס המשולש,

והבע באמצעות x את גובה המשולש לבסיס.

ב. מה צריך להיות x , כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?

ג. הראה כי המשולש שיש לו שטח מקסימלי הוא משולש שווה־צלעות. **(431)**

.41 (804 , קיץ תשע"ד - 2014 , מועד ב)



בציור שלפניך מוצגים הגרפים של הפונקציות

$f(x) = -x^2 + 9$ ו־ $g(x) = (x-3)^2$.

נקודה A נמצאת ברביע הראשון

על גרף הפונקציה $f(x)$.

מנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר אחד, המקביל לציר y וחותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B .

וישר אחר, המקביל לציר x וחותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה C .

נסמן את שיעור x של הנקודה A ב־ t .

א. הבע באמצעות t את השיעורים של הנקודות A , B ו־ C . **(432)**

ב. מצא את הערך של t שעבורו שטח המשולש ABC הוא מקסימלי.

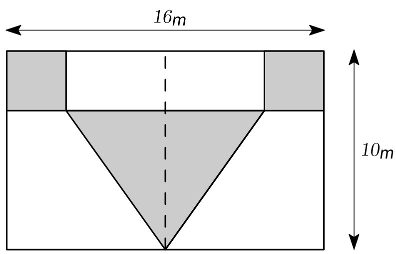
תשובות

.39 $ANC = \frac{31}{5} = 6\frac{1}{5}_{km}$

.40 **א.** $h = \sqrt{225 - 30x}\ _{cm}$ **ב.** $x_{max} = 5_{cm}$

.41 **א.** $C(-t\,,\ -t^2+9)$, $B(t\,,\ (t-3)^2)$, $A\ (t\,,\ -t^2+9)$ **ב.** $t = 2$

42. (804, קיץ תשע״ד - 2014, מועד א)



האורך של קיר בצורת מלבן הוא 16_m,

והגובה שלו הוא 10_m.

רוצים לצפות בקרמיקה חלק מהקיר.

החלק שרוצים לצפות כולל:

- שני ריבועים זהים בפינות המלבן.
- משולש שווה־שוקיים שבסיסו מקביל לצלע המלבן. **(432)**

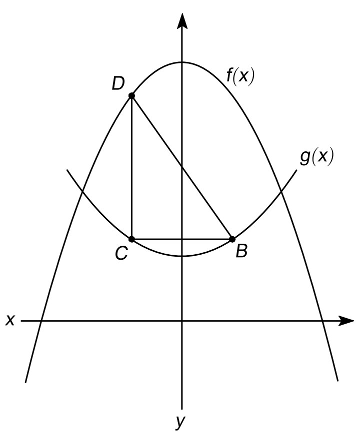
סמן ב־ x את האורך של צלע הריבוע, וענה להלן:

א. הבע באמצות x את הגובה לבסיס במשולש שווה־השוקיים.

ב. מה צריך להיות x, כדי שסכום השטחים שרוצים לצפות בקרמיקה יהיה מינימלי?

ג. עבור ה־ x שמצאת בסעיף ב, חשב כמה אחוזים משטח הקיר מהווה החלק שרוצים לצפות.

43. (804, סתיו תשע״ה - 2014, מועד ד)



נתונות שתי פונקציות:

$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 8$ ו־ $g(x) = \frac{1}{6}x^2 + 2$.

בתחום הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות

חוסמים משולש BCD.

הצלעות DC ו־ CB מקבילות לצירים.

הקדקוד D נמצא על גרף הפונקציה $f(x)$,

והקדקודים B ו־ C נמצאים על גרף הפונקציה $g(x)$.

נסמן את שיעור x של הנקודה B ב־ t.

א. הבע באמצעות t את שיעורי הנקודות C, B ו־ D.

ב. הבע באמצעות t את שטח המשולש BCD.

ג. מצא את t שעבורו שטח המשולש BCD הוא מקסימלי. **(433)**

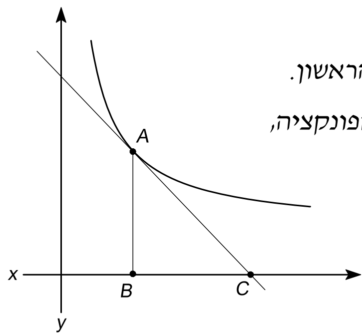
אם נגדיל את האטום פי 5,000 מיליארד (!), יהיה הגרעין בגודל של תפוז, ובמרחק של כ־500 מטר ממנו יסתובבו אלקטרונים בגודל של ראש סיכה.

תשובות

42. **א.** $h = (10 - x)\ m$ **ב.** $x_{min} = 3$ **ג.** 33.125%

43. **א.** $D(-t\ ,\ -\frac{1}{3}t^2 + 8)$, $C(-t\ ,\ \frac{1}{6}t^2 + 2)$, $B(t\ ,\ \frac{1}{6}t^2 + 2)$

ב. $S_{\triangle BCD} = 6t - \frac{1}{2}t^3$ (יחידות ריבועיות) **ג.** $t = 2$



.44 (804 , חורף תשע"ה - 2015)

בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{4}{x}$ ברביע הראשון.

דרך הנקודה A שעל גרף הפונקציה העבירו משיק לגרף הפונקציה,

והעבירו אנך לציר x .

המשיק חותך את ציר x בנקודה C ,

והאנך חותך את ציר x בנקודה B .

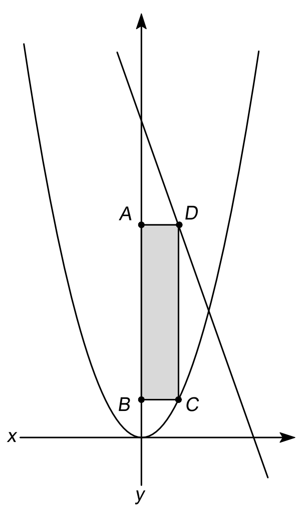
נסמן את שיעור x של הנקודה A ב־ t .

א. **(1)** הבע באמצעות t את שיפוע המשיק.

(2) הבע באמצעות t את משוואת המשיק. **(433)**

(3) הבע באמצעות t את האורך של הקטע BC .

ב. מצא את הערך של t שעבורו סכום הקטעים $AB + BC$ הוא מינימלי.



.45 (804 , חורף תשע"ה - 2015 , לוחמים)

נתונה הפרבולה $f(x) = x^2$ ונתון הישר $g(x) = -3x + 9$.

בין הפרבולה, הישר והצירים חסום מלבן ABCD ,

כך שהצלע AB מונחת על ציר y ,

קדקוד D על הישר הנתון ברביע הראשון

וקדקוד C על הפרבולה.

א. סמן ב־ x את שיעור x של הנקודה D ,

ובטא בעזרתו את אורכי הצלעות AD ו־ DC .

ב. **(1)** מצא עבור איזה ערך של x

שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי.

(2) מצא את השטח המקסימלי של המלבן. **(434)**

מספרי יחידה ראשוניים

המספר המורכב מפעמיים הספרה '1' או מ־19 או מ־317 או מ־1031 פעמים '1' - הוא מספר ראשוני.

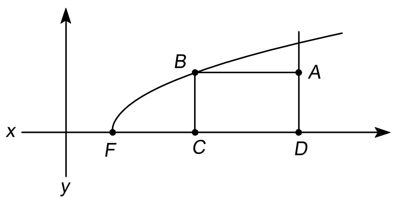
תשובות

.44 **א.** **(1)** $m = -\frac{4}{t^2}$ **(2)** $y = -\frac{4}{t^2}x + \frac{8}{t}$ **(3)** $BC = t$ (יחידות אורך) **ב.** $t = 2$

.45 **א.** $AD = x$ (יחידות אורך) , $DC = -x^2 - 3x + 9$ (יחידות אורך)

ב. **(1)** $x_{max} = 1$ **(2)** $S_{max} = 5$ (יחידות ריבועיות)

46. (804 , קיץ תשע"ה - 2015 , מועד ב)



הקדקוד B של המלבן ABCD

נמצא על גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-4}$.

הצלע AD מונחת על הישר $x = 10$

והצלע DC מונחת על ציר x .

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה B

כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

ב. גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר x בנקודה F .

מצא את שטח המשולש BFC כאשר שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי. **(434)**

47. (804 , חורף תשע"ו - 2016)

נתון משולש שווה־צלעות שאורך צלעו x ס"מ, ונתון ריבוע.

סכום ההיקפים של הריבוע ושל המשולש שווה־הצלעות הוא 9 ס"מ.

א. הבע באמצעות x את האורך של צלע הריבוע.

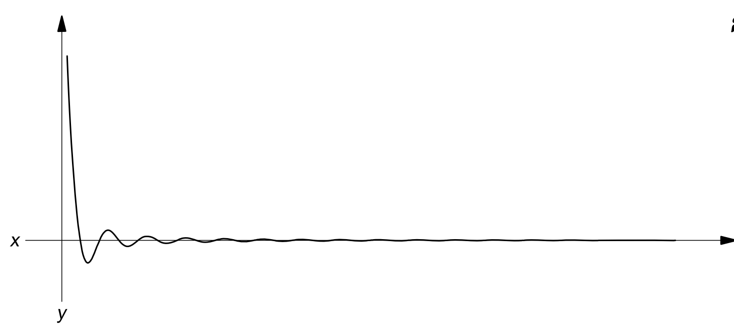
ב. **(1)** הבע באמצעות x את שטח המשולש ואת שטח הריבוע. **(435)**

(2) מצא מה צריך להיות הערך של x,

כדי שסכום השטחים של הריבוע ושל המשולש יהיה מינימלי.

ג. כאשר סכום השטחים הוא מינימלי, לאיזו צורה היקף גדול יותר: לריבוע או למשולש? נמק.

פונקציה מתה



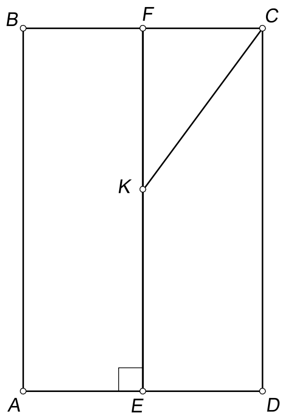
תשובות

46. **א.** $B(4\frac{2}{3}, 2.31)$ **ב.** $S_{\triangle BFC} = 3.08$ (יחידות ריבועיות)

47. **א.** $a = 2\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x$ cm

ב. **(1)** $S_{square} = (2\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x)^2$, $S_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ (סמ"ר) **(2)** $x_{min} = 1.6951cm$

ג. $P_{\triangle} > P_{square}$



.48 (481 - חורף תשע"ז - 2017) נתון מלבן $ABCD$.

הנקודה F היא אמצע הצלע BC .

E היא נקודה על הצלע AD , כך ש־ EF מאונך ל־ AD .

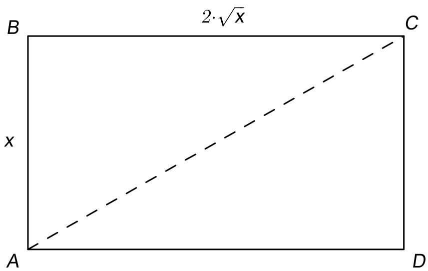
הנקודה K נמצאת על EF כך ש־ $EK = KC = 10_{cm}$.

$FC = x$.

א. הבע את FK באמצעות x . **(435)**

ב. חשב את אורך צלע המלבן BC

שעבורו היקף המלבן $ABCD$ יהיה מקסימלי.



.49 (382 - קיץ התשע"ז - 2017 - מועד א)

לפניך מלבן $ABCD$.

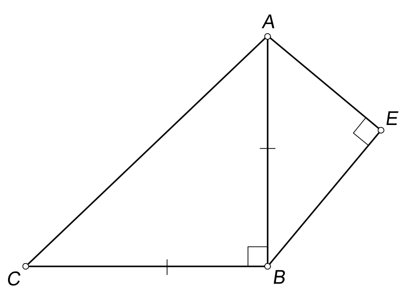
אורך הצלע AB הוא x ,

ואורך הצלע BC הוא $2\sqrt{x}$.

א. מצא את x שעבורו ההפרש בין BC ל־ AB

$(BC - AB)$ הוא מקסימלי.

ב. עבור ערך ה־ x שמצאת בסעיף א, חשב את אורך האלכסון AC . **(436)**



.50 (841 - קיץ תשע"ז - 2017 - מועד א)

ABC הוא משולש ישר־זווית

ושווה־שוקיים ($\angle ABC = 90^{\circ}$).

על הצלע AB בנו משולש ישר־זווית AEB

כך ש־ AB הוא היתר של המשולש AEB.

סכום אורכי הניצבים של המשולש AEB הוא 6_{cm}.

נסמן את אורך הצלע AE ב־ x .

א. הבע באמצעות x את שטח המשולש ABC . **(436)**

ב. עבור איזה ערך של x שטח המרובע $AEBC$ הוא מינימלי?

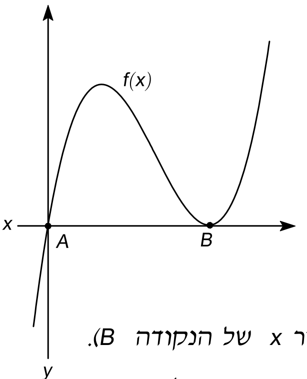
תשובות

.48 **א.** $FK = \sqrt{100 - x^2}_{cm}$ **ב.** $BC = 8\sqrt{5} = 17.89_{cm}$

.49 **א.** $x = 1$ **ב.** $AC = \sqrt{5}$ (יחידות אורך)

.50 **א.** $S_{\triangle ABC} = x^2 - 6x + 18$ (סמ"ר) **ב.** $x = 3_{cm}$

.51 (481 - קיץ תשע"ז - 2017 , מועד ב)



לפניך סרטוט של גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו־ B ,

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר x.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

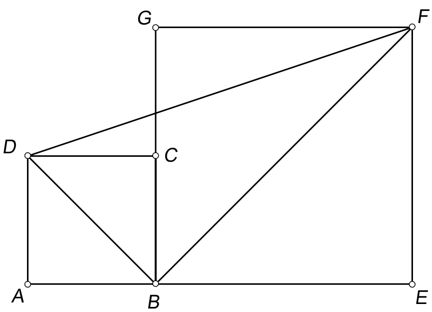
נתון: $x_A < x_C < x_B$.

(שיעור x של הנקודה C נמצא בין שיעור x של הנקודה A לשיעור x של הנקודה B).

ב. מצא את שיעורי הנקודה C שעבורה שטח המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. האם הנקודה C היא נקודת קיצון של הפונקציה $f(x)$? הסבר. **(437)**

.52 (481 , חורף תשע"ח - 2018)



ABCD ו־ BEFG הם שני ריבועים.

הצלע BC מונחת על הצלע BG .

$DB + BF = a$. $a > 0$ פרמטר.

א. מצא את אורך האלכסון DB שעבורו

אורך הקטע DF הוא מינימלי.

הבע באמצעות a .

ב. עבור אורך DB שמצאת בסעיף א, מהו היחס $\frac{AB}{BE}$? **(438)**

.53 (581 , חורף תשע"ח - 2018)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$. **(438)**

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = t$. $1 \le t \le 5$.

המשיק חותך את ציר x בנקודה A ואת ציר y בנקודה B . O היא ראשית הצירים.

א. מצא את שיעור x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

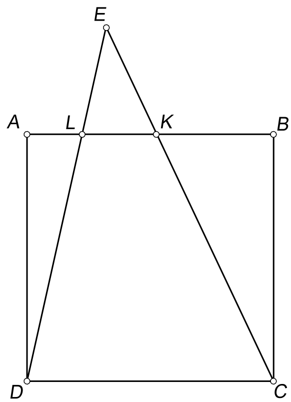
ב. מצא את שיעור x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.

תשובות

.51 **א.** $A(0,0)$, $B(3,0)$ **ב.** $C(1,4)$ **ג.** כן

.52 **א.** $DB = \frac{a}{2}$ (יחידות אורך) **ב.** $\frac{AB}{BE} = 1$

.53 **א.-ב.** $x_{min} = \sqrt{3}$, $x_{max} = 5$



54. (581 , קיץ תשע"ח - 2018 , מועד א)

ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו 6_{cm} .

K ו־ L הן נקודות על הצלע AB .

הישרים CK ו־ DL חותכים זה את זה בנקודה E ,

הנמצאת מחוץ לריבוע ABCD .

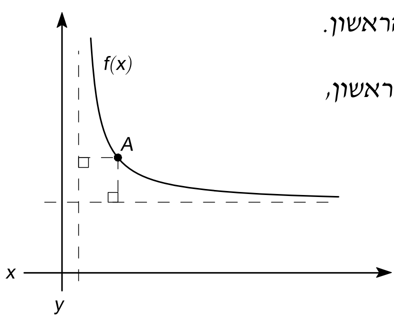
נסמן: $LK = x$.

א. הבע באמצעות x את גובה המשולש KLE .

ב. עבור איזה ערך של x סכום שטחי המשולשים

ADL , BCK ו־ KLE הוא מינימלי? נמק. **(439)**

55. (481 , קיץ תשע"ח - 2018 , מועד ב)



לפניך ציור של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{4}{x-1} + 3$ ברביע הראשון.

מנקודה A , הנמצאת על גרף הפונקציה f(x) ברביע הראשון,

העבירו אנכים לאסימפטוטות של הפונקציה f(x) ,

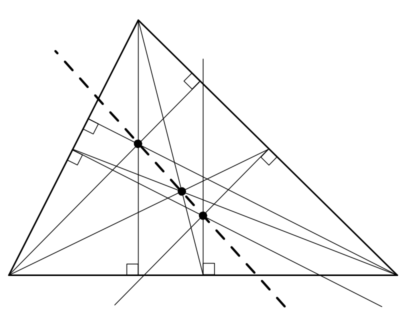
כך שנוצר מלבן.

א. מצא את משוואות האסימפטוטות

של הפונקציה f(x) המאונכות לצירים.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן מינימלי.

ג. חשב את שטח המלבן שהיקפו מינימלי. **(440)**



קו אוילר

נקודת החיתוך של התיכונים במשולש,
נקודת החיתוך של הגבהים במשולש,
ונקודת החיתוך של האנכים האמצעיים במשולש
- נמצאים על קו אחד.
תכונה זו התגלתה על־ידי אחד המתמטיקאים הדגולים,
ליאונרד אוילר (1707-1783 , Leonhard Euler).

תשובות

54. **א.** $h = \frac{6x}{6-x}\ cm$ **ב.** $x_{min} = 6 - 3\sqrt{2}\ cm$

55. **א.** $y_{\rightarrow} = 3$, $x_{\leftarrow} = 1$ **ב.** $A\ (3,5)$ **ג.** $S = 4$ (יחידות ריבועיות)

סיווג שאלות המבחנים

סוגריים מרובעים – מספר עמוד. כל שאר המספרים – מספרי שאלות.

גאומטריה אנליטית - נקודות וישרים [26]

משולשים
- חישובים במשולש: 1, 5, 6, 10, 11, 22, 44, 46, 48
- משולש ישר-זווית: 47
- משולש שווה-שוקיים: 13, 15, 29, 47
- משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים: 21, 26, 30, 34
- אמצע קטע: 1, 6, 10, 11, 34
- תיכון: 1, 44, 46
- אנך אמצעי: 34
- נקודת מפגש הגבהים במשולש: 15, 19

מרובעים
- דלתון: 45
- מקבילית: 4, 8, 9, 20, 23, 33
- מלבן: 2, 12, 14, 18, 24, 32
- מעוין: 3, 7, 16, 17, 25, 28
- ריבוע: 21, 26, 27, 31

מצולעים
- מחומש: 45

טריגונומטריה במישור - ללא מעגל [229]

משולשים
- חישובים במשולש: 2, 10, 42, 46
- משולש ישר-זווית: 7, 45
- משולש שווה-שוקיים: 1, 6, 12, 15, 17, 22, 27, 30, 33, 35, 36, 38, 39, 43
- משולש שווה-צלעות: 20, 24

נקודות וקווים מיוחדים במשולש
- אמצע קטע: 16
- תיכון: 7,
- נקודת מפגש התיכונים במשולש: 40
- נקודת מפגש חוצי-הזוויות במשולש: 12

מרובעים
- מקבילית: 8, 14, 21, 26, 37, 44
- מלבן: 3, 4, 11, 13, 41
- מעוין: 16, 18, 28, 32, 34
- ריבוע: 5, 19, 23, 24, 25, 29, 35, 39, 43
- טרפז: 4, 9, 13, 18, 31, 47
- טרפז שווה-שוקיים: 30

חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי נושאים

בעיות ערך קיצון [393]

מספרים
- פונקציה פולינומיאלית: 13, 14, 19, 23
- פונקציה רציונאלית: 24, 27

תנועה
- פונקציית שורש: 39

גאומטריה
- פונקציה פולינומיאלית: 1, 2, 4, 6, 12, 17, 20, 21, 25, 26, 28, 30, 36, 42, 47, 50
- פונקציה רציונאלית: 10, 18, 38, 54
- פונקציית שורש: 5, 37, 40, 48, 49, 52, 59

גרפים
- על סמך גרף הפונקציה: 56
- פונקציה פולינומיאלית: 3, 8, 9, 31, 41, 43, 45, 51, 57
- פונקציית רציונאלית: 7, 22, 44, 53, 55
- פונקציית שורש: 11, 15, 16, 29, 32, 33, 34, 35, 46, 58

חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי סוג הפונקציה

בעיות ערך קיצון [393]

פונקציה פולינומיאלית
- מספרים: 13, 14, 19, 23
- גאומטריה: 1, 2, 4, 6, 12, 17, 20, 21, 25, 26, 28, 30, 36, 42, 47, 50
- גרפים: 3, 8, 9, 31, 41, 43, 45, 51, 57

פונקציה רציונאלית
- מספרים: 24, 27
- גאומטריה: 10, 18, 38, 54
- גרפים: 7, 22, 44, 53, 55

פונקציית שורש
- תנועה: 39
- גאומטריה: 5, 37, 40, 48, 49, 52, 59
- גרפים: 11, 15, 16, 29, 32, 33, 34, 35, 46, 58

חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי צורה גאומטרית

בעיות ערך קיצון [393]
- משולש ישר-זווית: 2, 5, 21, 37, 50
- משולש שווה-שוקיים: 40, 42
- משולש שווה-צלעות: 18, 25, 40, 47
- מלבן: 1, 10, 12, 17, 20, 26, 28, 30, 36, 38, 42, 48, 49, 59
- ריבוע: 4, 6, 18, 25, 26, 42, 47, 52, 54

מה המשותף לשמות הבאים: אַיָּה , דִּקְלָה , הוֹדִיָּה , זְמִירָה , לְבָנָה , נֹגַהּ , עֲנָת , עָפְרָה , תִּקְוָה ?

תשובה (בצופן א"ת ב"ש): לפכי ביפא בכ רשגמי שאטל.

גאומטריה אוקלידית, חלק א'
ללא פרופורציה וללא מעגל [69]

משולשים

- חפיפת משולשים
2, 3, 5, 9, 11, 12, 13, 15
- משפט חפיפה רביעי
5
- משולש ישר-זווית
9
- משולש $90^0 - 60^0 - 30^0$
1, 8, 14
- משפט פיתגורס
1
- משולש שווה-שוקיים
5, 6, 14, 17
- משולש שווה-צלעות
1, 2, 14, 16

נקודות וקטעים מיוחדים במשולש

- תיכון
13, 14
- תיכון ליתר במשולש ישר-זווית
6, 7, 8, 14
- קטע אמצעים במשולש
4, 5, 6, 7, 10, 11, 13
- נקודת מפגש התיכונים במשולש
7

מרובעים

- מקבילית
7, 11, 14, 17
- מלבן
5, 10
- מעוין
1, 10, 15
- ריבוע
1, 3, 9, 12
- טרפז
4, 8
- טרפז ישר-זווית
16
- טרפז שווה-שוקיים
17
- קטע אמצעים בטרפז
4, 8, 16, 17

גאומטריה אוקלידית, חלק ב'
פרופורציה ודמיון ללא מעגל [88]

משולשים

- חפיפת משולשים
7, 8, 17, 21, 29, 39, 31, 35
- משולש ישר-זווית
28, 30, 35, 37, 39
- משולש $90^0 - 60^0 - 30^0$
21
- משפט פיתגורס
2, 4, 7, 17, 22, 28, 35, 37
- משולש שווה-שוקיים
10, 11, 22, 34
- משולש שווה-צלעות
34

נקודות וקטעים מיוחדים במשולש

- תיכון
6, 11, 24, 34
- תיכון ליתר במשולש ישר-זווית
26, 34, 38
- אנך אמצעי
13
- קטע אמצעים במשולש
6, 13, 16, 24, 34
- נקודת מפגש התיכונים במשולש
4, 5, 22

מרובעים

- דלתון
21
- מקבילית
6, 12, 18, 26, 29
- מלבן
9, 22, 30, 37
- ריבוע
2, 7, 8
- טרפז
1, 3, 15, 25, 26, 32, 38
- טרפז ישר-זווית
9, 25, 39
- טרפז שווה-שוקיים
4, 19, 21, 31

שטחים

1, 6, 12, 14, 18, 25

פרופורציה

- משפט תאלס
1, 3, 6, 8, 10, 14, 15, 16, 21, 24, 25, 27, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38
- משפט חוצה-זווית במשולש
4, 9, 10, 19, 23, 24, 28, 36

דמיון

- דמיון משולשים
1, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 35, 36, 37, 38, 39
- משפט דמיון צלע-זווית-צלע
2, 3, 5, 17, 37
- יחס בין שטחי משולשים דומים
5, 6, 9, 20, 26, 36, 38
- יחס היקפים במשולשים דומים
11, 34

רשום על צג המחשבון מספר תלת־ספרתי. זכור אותו. רשום אותו שוב.
קיבלת מספר שש־ספרתי ששלוש ספרותיו הראשונות זהות לשלוש ספרותיו האחרונות. ברור.
חלק את המספר הזה ב־ 7 . קיבלת מנה שלמה, ללא שארית? יופי.
חלק את התוצאה ב־ 11 . קיבלת מנה שלמה ללא שארית? יופי.
חלק את התוצאה ב־ 13 . מה קיבלת? עכשו תחשוב מדוע זה עובד.

המשפטים בגאומטריה

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- 180°.
2. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

---

3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
4. במשולש שווה־שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה־שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה־שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה־צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה־זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא 180°.
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה צלע־זווית־צלע.
18. משפט חפיפה זווית־צלע־זווית.
19. משפט חפיפה צלע־צלע־צלע.
20. משפט חפיפה רביעי: שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות.

---

21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

---

22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180° אז שני הישרים מקבילים.
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז: א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
ג. סכום כל זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180°.

---

26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

---

33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

---

37. אלכסוני מלבן שווים זה לזה.
38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

39. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
40. טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא שווה שוקיים.
41. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
42. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.
43. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
44. בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השניה.

45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ (החלק הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהחלק האחר).

47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.
48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.
49. שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.
50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל.

51. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.
52. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.
53. כל משולש ניתן לחסום במעגל.
54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.

55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

56. ניתן לחסום מרובע במעגל, אם ורק אם, סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180°.
57. מרובע קמור חוסם מעגל, אם ורק אם, סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.
58. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.
59. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.
60. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.

61. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.
62. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.
63. במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.
64. מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
65. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.
66. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.
67. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר, וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.
68. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.
69. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.
70. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.
71. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.
72. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר, שוות זו לזו.
73. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).
74. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.
75. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.

79. זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.

80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.

81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצא על קטע המרכזים או על המשכו.

---

84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.

86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

87. משולש, בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר זווית.

88. אם במשולש ישר־זווית, זווית חדה של 30°, אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.

89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה 30°.

---

90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

91. משפט תאלס המורחב:
ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש, חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.

92. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים.

93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.

95. משפט דמיון צלע־זווית־צלע.

96. משפט דמיון זווית־זווית.

97. משפט דמיון צלע־צלע־צלע.

98. במשולשים דומים: א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.
ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.
ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.
ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.
ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.
ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.
ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

---

99. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. (99–101 לחמש יחידות בלבד)

100. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

101. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

---

102. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.

103. הגובה ליתר במשולש ישר זווית, הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

104. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $(n-2)\,180^\circ$.

נוסחאון הבגרות לארבע יחידות

אלגברה

- נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \ , \ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \ , \ a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0 \ , \ a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה	$a_1 = a \ , \ a_{n+1} = a_n + d$	$a_1 = a \ , \ a_{n+1} = a_n \cdot q$
האיבר ה־n־י	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \frac{n \cdot [2a_1 + (n-1)d]}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

- חזקות: $(a \neq 0 \ , \ b \neq 0)$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \ , \ (\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x} \ , \ (a^x)^y = a^{x \cdot y} \ , \ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \ , \ a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

- לוגריתמים $(a, b, c > 0 \ ; \ a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b \ , \ a^{\log_a b} = b \ , \ \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \ , \ \log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c \ , \ \log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

גאומטריה אנליטית

שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו־(x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר $y = mx + b$ העובר בנקודה (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי נקודת האמצע $M(x_M, y_M)$ של קטע שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$ הם:

$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \ , \ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו־m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

משוואת מעגל שמרכזו (a, b) , ורדיוסו R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

אם תכניס את הספרה '9' פעם אחת, לכל מקום שתבחר במספר הראשוני $593, 103, 437$ - תקבל מספר ראשוני

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל-k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית, כאשר ההסתברות להצלחה היא p: $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ כאשר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
- הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, - נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

טריגונומטריה

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

- משפט הסינוסים: (R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
- משפט הקוסינוסים: (γ היא הזווית הכלואה בין a ל-b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$
- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גִזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$
- שטח משולש: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל-c)
- גופים במרחב: מנסרה ישרה וגליל: נפח: $V = B \cdot h$ (B - שטח הבסיס , h - גובה הגוף)

  שטח מעטפת: $M = P \cdot h$ (P - היקף הבסיס , h - גובה הגוף)

  פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס , h - גובה הגוף)

  שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול , l - הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות:

$(x^t)' = tx^{t-1}$ (t ממשי) , $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

נגזרת של <u>מכפלת</u> פונקציות: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

נגזרת של <u>מנת</u> פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקציה <u>מורכבת</u>: $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית) ו-$f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c$ ($t \neq -1$ ממשי) , $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז: $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + c$