בע"ה מנחם־אב התשע"ט *אוגוסט 2019 למנינם*

מספר מילים לפנֵי

ספר זה מכיל שאלות ממבחני בגרות מהשנים 2004-2013, המתאימות לשאלון 582 (807) בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. לכל השאלות תשובות סופיות בעמוד השאלה ופתרון מלא בהמשך עם הפניה לעמוד המתאים (המספר המעובה בסוגריים משמאל לכל שאלה). בחלקו השני של ספר זה מובאים 35 מבחני הבגרות לשאלון זה שנערכו עד כה במתכונת הנוכחית עם פתרון מלא.

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעִתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ־2012 עד 2017 (מועד א), כפי שהם בספר, נמצאים באתר ההוצאה במִרְשֶׁתֶת (internet), בעלות שנתית מגוחכת של 20 (עשרים) שקלים בלבד. ראו בגב הכריכה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל.
כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

*שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורה **שריף אמארה** מכפר זָלָפָה.*

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התש"פ - 2020), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים.
המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

*את החללים שבין השאלות והפתרונות לְחִלַּחְתִּי בהבזקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקודות **לאומית או יהודיות**.*

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על־ידי חברת 'קל־ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה

אלי מיטב

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יָצאו גם לשאלונים 581-482-481-382

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יָצאו לשאלונים 582-581-482-481

גידול ודעיכה

שאלות

1. (5 יח׳ , קיץ תש״ן - 90)

׳זמן מחצית החיים׳ של חומר רדיואקטיבי הוא פרק הזמן שבסופו נשארת מחצית מכמותו ההתחלתית. נגדיר ׳זמן רבע חיים׳ של חומר רדיואקטיבי כפרק הזמן שבסופו נשארת רבע מכמותו ההתחלתית.

זמן רבע החיים של חומר א שווה לזמן מחצית החיים של חומר ב. אם מ־ 100_{gr} של חומר א נשארו 80_{gr} כעבור 4 שנים, מאיזו כמות של חומר ב יישארו 80_{gr} כעבור 4 שנים? **(5)**

2. (5 יח׳ , קיץ תשנ״ג - 93)

כמות הדגים בברֵכת דגים גדלה ב־$p\%$ בכל שבוע.

הכמות ההתחלתית של הדגים היא k טון.

כעבור x שבועות מכרו k טון דגים, והמשיכו לגדל את הדגים הנותרים באותם התנאים.

כעבור x שבועות נוספים היו בברֵכה $2k$ טון דגים. בטא את x באמצעות p . **(5)**

3. (004 , קיץ ס״ו - 2006 , מועד ב)

אדם הפקיד בשני בנקים A ו־ B, באותו יום את <u>אותו סכום כסף</u>.

בכל אחד מהבנקים הסכום גדֵל באחוז קבוע בכל שנה.

כעבור 7 שנים מיום ההפקדה היה הסכום בבנק A - 6580 ש׳, ובבנק B - 6150 ש׳.

כעבור 3 שנים נוספות היה הסכום בבנק A - 7402.5 ש׳.

מצא בכמה אחוזים גדֵל כל שנה סכום הכסף: **א.** בבנק A **ב.** בבנק B **(5)**

4. (004 , סתיו ס״ז - 2006 , מועד לוחמים)

א. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 3 שנים.

(1) כעבור כמה זמן תקטן כמות החומר עד ל־ 20% מן הכמות ההתחלתית?

(2) אם כיום נותרה במעבדה כמות של 350_{gr} מחומר רדיואקטיבי זה,

איזו כמות תִוותר ממנו בעוד שנתיים? **(6)**

המתמטיקה - מלכת המדעים ושפחתם

תשובות

1. 89.44_{gr}

2. $x = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$

3. **א.** 4% **ב.** 3%

4. **א.** **(1)** $t = 6.97_{years}$ **(2)** $m_2 = 220.49_{gr}$

5. (004 , קיץ ס"ז - 2007 , מועד ב)

בתאריך $1/12/06$ היו בבריכה אחת $160,000$ דגים, שכמותם גְדֵלָה כל שבוע ב־ 2.5%.

בבריכה שניה היו בתאריך זה $148,000$ דגים, שכמותם גְדֵלָה כל שבוע ב־ 3.5%.

א. אחרי כמה שבועות מהתאריך $1/12/06$ יהיו כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?

ב. אחרי כמה שבועות מהיום שבו היו כמויות הדגים שוות,

תהיה כמות הדגים בבריכה השניה גדולה פי 2 מכמות הדגים בבריכה הראשונה? **(6)**

6. (004 , חורף ס"ח - 2008) בתרבית אחת היו בשעה 08^{00} בבוקר $32,000$ חיידקים,

ובשעה 10^{00} היו בתרבית $38,720$ חיידקים.

בתרבית שניה היו בשעה 08^{00} בבוקר $8,000$ חיידקים, ובשעה 10^{00} - $11,520$ חיידקים.

בכל אחת מהתרביות הגידול הוא מעריכי.

א. באיזו שעה בקירוב יהיה מספר החיידקים בתרבית הראשונה

גדול פי 2 ממספר החיידקים בתרבית השניה?

ב. בכמה אחוזים מספר החיידקים שהיו בשתי התרביות יחד בשעה 09^{00}

גדול ממספר החיידקים שהיו בשתי התרביות יחד בשעה 08^{00}? **(6)**

7. (004 , קיץ ס"ח - 2008 , מועד לוחמים) ביום הקמת המדינה היו בשמורת טבע א 300 ציפורים,

ובשמורה ב היו 400 ציפורים. לאחר 10 שנים היו בשמורה א 500 ציפורים.

קצב הגידול השנתי של מספר הציפורים בשמורה א גדול פי 1.02 מקצב הגידול השנתי של מספר

הציפורים בשמורה ב. בשתי השמורות הגידול הוא מעריכי.

מצא כעבור כמה שנים מיום הקמת המדינה יהיה מספר הציפורים בשמורה א

גדול פי 2 ממספר הציפורים בשמורה ב. **(6)**

8. (004 , חורף ס"ט - 2009) כמויות של שני חומרים רדיואקטיביים, א' ו־ ב', קטנות בצורה מעריכית.

מ־ 250_{gr} של חומר ב' נשארו 100_{gr} כעבור 5 שנים.

א. מצא בכמה אחוזים קטֵנה הכמות של חומר ב' בכל שנה.

ב. פרק הזמן שבסופו נשארת מחצית מהכמות ההתחלתית של חומר א'

שווה לפרק הזמן שבסופו נשארת רבע מהכמות ההתחלתית של חומר ב'.

מצא בכמה אחוזים קטֵנה הכמות של חומר א' בכל שנה. **(7)**

תשובות

5. **א.** 8.03_{weeks} **ב.** 71.39_{weeks}

6. **א.** 16^{00} **ב.** 12%

7. 49.53_{years}

8. **א.** 16.74% **ב.** 8.75%

9. (004 , אביב ס"ח - 2008 , לוחמים)

כמות חיידקים בשתי תרביות, א ו־ ב, קטֵנה בצורה מעריכית.

בשעה 09^{00} בבוקר היה בתרבית א מספר מסוים של חיידקים.

בשעה 11^{00} בבוקר נותרו בה $\frac{1}{4}$ ממספר החיידקים.

בשעה 09^{00} בבוקר היו בתרבית ב $10,000$ חידקים.

בשעה 11^{00} נותרו בה 6400 חיידקים.

א. מצא איזה חלק ממספר החיידקים המקורי נותר בתרבית א בשעה 13^{00} בצהריים.

ב. בשעה 13^{00} בצהריים היה מספר החיידקים בשתי התרביות שווה.

מצא את מספר החיידקים שהיה בתרבית א בשעה 09^{00} בבוקר. **(7)**

10. (004 , קיץ תש"ע - 2010 , מועד ב)

נתונות כמויות שוות של שני חומרים רדיואקטיביים, חומר I וחומר II .

החומרים מתפרקים בצורה מעריכית.

כמות חומר I פחתה ב־ 17% במשך 12 שנים.

כמות חומר II פחתה ב־ 29% במשך 10 שנים.

מצא כעבור כמה שנים כמות חומר II תהיה קטנה פי 3 מכמות חומר I

(מהרגע שבו היו הכמויות שוות). **(7)**

11. (004 , קיץ תש"ע - 2010 , מועד א - המבחן הגנוז)

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי א' הוא $\frac{1}{2}$ שעה.

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי ב' הוא שעה אחת.

חומר א' דועך כל שעה פי q_1 , וחומר ב' דועך כל שעה פי q_2 .

א. מצא את q_1 ואת q_2 .

ב. נתונה תערובת המכילה 5_{kg} חומר א' ו־ 7_{kg} חומר ב'.

(בתערובת מתרחשת רק התפרקות רדיואקטיבית.)

כעבור כמה זמן סכום הכמויות של שני החומרים בתערובת יהיה 6_{kg} ? **(8)**

תשובות

9. **א.** $\frac{1}{16}$ **ב.** $65,536$ (חיידקים)

10. $t = 58.56$ (שנים)

11. **א.** $q_1 = 0.25$, $q_2 = 0.5$ **ב.** $t = 0.74_{hours} = 44.22_{minutes}$

.12 (004 , חורף תשע"ב - 2012 , לוחמים)

סכומי כסף הופקדו בשני חשבונות בנק. הסכומים גדֵלים בכל שנה באחוז קבוע.

בחשבון I הופקדו a שקלים שגדלים ב־ $p\%$ בשנה.

כעבור שנתיים היו בחשבון $11,664$ שקלים, כעבור 5 שנים נוספות היו בחשבון $17,138$ שקלים.

א. **(1)** מצא את p , אחוז הגדילה לשנה בחשבון I .

(2) מצא את הערך של a .

ב. בחשבון II הופקדו a שקלים, והם גדֵלים ב־ $m\%$ בשנה. **(8)**

כעבור שנתיים היו בחשבון II $11,881$ שקלים.

כעבור כמה שנים מיום ההפקדה, יהיה בחשבון II סכום הגדול ב־ 20% מהסכום שיהיה באותו זמן בחשבון I ?

.13 (004 , קיץ תשע"ב - 2012 , מועד א)

ב. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי מסוים הוא 14 דקות.

כמות החומר דועכת בצורה מעריכית. ברגע מסוים היו לחוקר 1000 גרם של החומר.

(1) כמה גרם של החומר יהיו לחוקר כעבור 28 דקות? **(8)**

(2) כעבור כמה דקות (מהרגע שהיו לו 1000 גרם) יהיו לחוקר פחות מ־20 גרם חומר.

.14 (004 , קיץ תשע"ב - 2012 , לוחמים)

בבְרֵכה גדלים דגים בשני צבעים: דגים אדומים ודגים צהובים. הדגים מתרבים בצורה מעריכית.

בתחילת השנה היה בברכה מספר זהה של דגים צהובים ודגים אדומים.

כעבור 6 חודשים היו בברכה 1820 דגים צהובים ו־1720 דגים אדומים.

כעבור 4 חודשים נוספים היו בברכה 2130 דגים צהובים.

א. **(1)** מצא כמה דגים צהובים היו בברכה בתחילת השנה. **(9)**

(2) מצא כמה דגים צהובים היו בברכה כעבור 7 חודשים מתחילת השנה.

ב. מה היה אחוז הדגים האדומים מכלל הדגים בברכה כעבור 10 חודשים מתחילת השנה ?

מאורעות נדירים שומרים לעצמם את הזכות להתרחש   (מרטין גרדנר)

תשובות

.12 **א.** **(1)** $p=8$ **(2)** $10,000$ (שקלים) **ב.** 19.78 (שנים)

.13 **ב.** **(1)** 250_{gr} **(2)** 79.01 (דקות)

.14 **א.** **(1)** 1438 (דגים) **(2)** 1893 (דגים) **ב.** 47.64 (אחוזים)

גידול ודעיכה - פתרונות

הנוסחה: $m_t = m_0 \cdot q^t$, $q = 1 \pm \frac{p}{100}$

1. q_1 - קצב הדעיכה של חומר א , q_2 - קצב הדעיכה של חומר ב

t - משך "זמן רבע חיים" של חומר א , x - כמות חומר א שממנו ישארו 80_{gr} עבור 4 שנים

$m_{0(א)} = 100 \quad \Rightarrow \quad 80 = 100 \cdot q_1^4 \quad \Rightarrow \quad q_1^4 = 0.8 \quad \Rightarrow \quad q_1 = \sqrt[4]{0.8} \quad \Rightarrow \quad q_1 = 0.9457$

כעבור t יחידות זמן ישאר מ- 1_{gr} של חומר א 0.25_{gr} :

$1 \cdot 0.9457^t = 0.25 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 0.25}{\ln 0.9457} = 24.8307$

כעבור t יחידות זמן ישאר מ- 1_{gr} של חומר ב 0.5_{gr} :

$1 \cdot q_2^t = 0.5 \quad \Rightarrow \quad q_2^{24.8307} = 0.5 \ \ /(\ \ )^{\frac{1}{24.8307}} \quad \Rightarrow \quad q_2 = e^{-0.0279} = 0.9725$

$80 = x \cdot q_2^4 \quad \Rightarrow \quad x \cdot 0.9725^4 = 80 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{80}{0.9725^4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 89.44_{gr}}$

---

2. כמות הדגים כעבור x שבועות לפני המכירה: $k \cdot (1 + \frac{p}{100})^x$

כמות הדגים מיד לאחר המכירה: $k(1 + \frac{p}{100})^x - k$

כמות הדגים כעבור x שבועות נוספים לאחר המכירה: $[k(1 + \frac{p}{100})^x - k] \cdot (1 + \frac{p}{100})^x \underset{\text{נתון}}{=} 2k$

$\underset{\text{סימון}}{(1 + \frac{p}{100})^x = t} \quad \Rightarrow \quad (kt - k) \cdot t = 2k \quad \Rightarrow \quad k\,t^2 - k\,t - 2k = 0 \ \ / : k \quad \Rightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0$

$t = \frac{1 \pm 3}{2} \ \ , \ \ t > 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad (1 + \frac{p}{100})^x = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = \frac{\ln 2}{\ln (1 + \frac{p}{100})} = \log_{(1 + \frac{p}{100})} 2}$

---

3. א. נסמן: x - סכום הכסף שהופקד , q_1 - שיעור הגידול בבנק A , q_2 - שיעור הגידול בבנק B

$(I) \ \ x \cdot q_1^7 = 6580$

$(II) \ \ x \cdot q_1^{10} = 7402.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{(II)}{(I)} = q_1^3 = \frac{7402.5}{6580} = 1.125 \ \ / \sqrt[3]{\ } \quad \Rightarrow \quad q_1 = 1.04 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = 4\%}$

ב.

$(I) \ \ x \cdot 1.04^7 = 6580 \ \ / : 1.04^7 \quad \Rightarrow \quad x = 5{,}000_{sh}$

$5000 \cdot q_2^7 = 6150 \quad \Rightarrow \quad q_2^7 = \frac{6150}{5000} = 1.23 \ \ /(\ \ )^{\frac{1}{7}} \quad \Rightarrow \quad = 1.03 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B = 3\%}$

4. א. (1)

$$m_t = m_0 \cdot q^t \quad , \quad m_0 = 1 \quad , \quad m_3 = 0.5 \quad \Rightarrow \quad 0.5 = 1 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q = 0.7937$$

$$m_0 = 1 \quad , \quad q = 0.7937 \quad , \quad m_t = 0.2 = 1 \cdot 0.7937^t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 0.2}{\ln 0.7937} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t = 6.97_{years}}$$

(2)

$$m_0 = 350_{gr} \; , \; q = 0.7937 \quad , \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 350 \cdot 0.7937^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m_2 = 220.49_{gr}}$$

---

5. א.

הבריכה הראשונה: $m_0 = 160,000 \quad , \quad q = 1.025 \quad \Rightarrow \quad m_t = 160,000 \cdot 1.025^t$

הבריכה השניה: $m_0 = 148,000 \quad , \quad q = 1.035 \quad \Rightarrow \quad m_t = 148,000 \cdot 1.035^t$

$$160,000 \cdot 1.025^t = 148,000 \cdot 1.035^t \quad \Rightarrow \quad \frac{1.025^t}{1.035^t} = \frac{148,000}{160,000} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1.025}{1.035}\right)^t = \frac{37}{40}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\ln \frac{37}{40}}{\ln \frac{1.025}{1.035}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t = 8.03_{weeks}}$$

ב.

נקבע, ללא הגבלת הכלליות: $m_0 = 1$

$$1 \cdot 1.035^t = 2 \cdot 1 \cdot 1.035^t \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1.035}{1.025}\right)^t = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{\ln \frac{1.035}{1.025}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t = 71.39_{weeks}}$$

---

6. א. נסמן: q_1 ו־ q_2 - שיעור הגידול של תרבית ראשונה ושניה בהתאמה.

$$38,720 = 32,000 \cdot q_1^2 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 1.1 \quad , \quad 11,520 = 8,000 \cdot q_2^2 \quad \Rightarrow \quad q_2 = 1.2$$

$$32,000 \cdot 1.1^t = 2 \cdot 8,000 \cdot 1.2^t \quad \Rightarrow \quad \frac{1.1^t}{1.2^t} = \frac{16,000}{32,000} \quad \Rightarrow \quad 0.9167^t = 0.5$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\log 0.5}{\log 0.9167} = 7.97 \approx 8 \quad , \quad 08^{00} + 8 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{16^{00}}$$ **בשעה**

ב.

$$\underline{08^{00}:} \quad 32,000 + 8,000 = 40,000 \quad , \quad \underline{09^{00}:} \quad 32000 \cdot 1.1 + 8000 \cdot 1.2 = 44,800$$

$44,800 - 40,000 = 4,800 \quad ; \quad \frac{4,800}{40,000} \cdot 100 = \mathbf{12\%}$ **ב־**

---

7. סימון: ma - מתיחס לשמורה א , mb - מתיחס לשמורה ב , q - קצב הגידול בשמורה ב

$$ma_{10} = 300 \cdot (1.02q)^{10} = 500 \quad \Rightarrow \quad (1.02q)^{10} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad 1.02q = 1.0524 \quad \Rightarrow \quad q = 1.0318$$

$$\frac{ma_t}{mb_t} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{300 \cdot 1.0524^t}{400 \cdot 1.0318^t} = 2 \quad \Rightarrow \quad 1.02^t = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\log \frac{8}{3}}{\log 1.02} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t = 49.53_{years}}$$

8. א.

$m_t = m_0 \cdot q^t \quad , \quad m_0 = 250_{gr} \quad , \quad m_5 = 100_{gr}$

$100 = 250 \cdot a^5 \quad \Rightarrow \quad q^5 = 0.4 \ / \sqrt[5]{\ } \quad \Rightarrow \quad q = 0.8326 \quad \Rightarrow \quad 1 - q = 0.1674 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{16.74\%}$

ב. נקבע, ללא הגבלת הכלליות: הכמות ההתחלתית של כל אחד מהחומרים היא 4_{gr} .

לאחר t (נעלם קבוע) יחידות זמן נשאר מחומר א' (A) 2_{gr}, ומחומר ב' (B) - 1_{gr} .

$\underline{B:} \ m_t = 4 \cdot 0.8326^t = 1 \quad \Rightarrow \quad 0.8326^t = 0.25 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 0.25}{\ln 0.8326} = 7.567$

$\underline{A:} \ m_{7.567} = 4 \cdot q^{7.567} = 2 \quad \Rightarrow \quad q^{7.567} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad q = 0.9125$

$\Rightarrow \quad 1 - q = 0.0875 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{8.75\%}$

---

9. א. נסמן: a - תרבית א , b - תרבית ב

$m_{a_0} = x \quad , \quad m_{a_2} = 0.25x \quad , \quad m_{a_4} = ?$

$0.25 \cancel{x} = \cancel{x} \cdot q^2 \quad \Rightarrow \quad q_a = 0.5 \quad \Rightarrow \quad m_{a_4} = x \cdot 0.5^4 = \frac{1}{16}x \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{1}{16} = 0.0625}$

ב.

$m_{b_0} = 10,000 \quad , \quad m_{b_2} = 6400 \quad \Rightarrow \quad 6400 = 10,000 \cdot q_b^2 \quad \Rightarrow \quad q_b^2 = 0.64 \quad \Rightarrow \quad q_b = 0.8$

$m_{b_4} = 10,000 \cdot 0.8^4 = 4096 \underset{\text{נתון}}{=} m_{a_0} = \frac{1}{16}x \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 65,536}$ **(חיידקים)**

.10

$\underline{\ I:} \ m_0 \overset{*}{=} 1 \quad , \quad -17\% \quad \Rightarrow \quad m_{12} = 0.83 \quad \Rightarrow \quad 0.83 = q^{12} \quad \Rightarrow \quad q_I = 0.9846$

$\underline{\ II:} \ m_0 \overset{*}{=} 1 \quad , \quad -29\% \quad \Rightarrow \quad m_{10} = 0.71 \quad \Rightarrow \quad 0.71 = q^{10} \quad \Rightarrow \quad q_{II} = 0.9663$

$m_{0(I)} = m_{0(II)} \overset{*}{=} 1 \quad , \quad q_I = 0.9846 \quad , \quad q_{II} = 0.9663 \quad , \quad m_{t(I)} = 3\, m_{t(II)} \quad , \quad t = ?$

$1 \cdot 0.9846^t = 3 \cdot 1 \cdot 0.9663^t \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{0.9846}{0.9663}\right)^t = 3 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\log 3}{\log \frac{0.9846}{0.9663}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t = 58.56}$ **(שנים)**

למה לעשות את החיים קלים?

את הזהות הפשוטה והמשעממת $1 + 1 = 2$ **ניתן להמיר בזהות שקולה,**

אבל הרבה יותר מעניינת:

$\ln\left[\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] + \sin^2 x + \cos^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\cos x| \cdot \sqrt{1 + tg^2 x}}{2^n}$

11. א. $m_t = m_0 \cdot q^t$

ערכו של q_2 הינו מיידי מנתוני השאלה: $\mathbf{q_2 = 0.5} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot q_2^1 = 0.5$.

לגבי חומר א':

$m_0 = 1\ ,\ t = 0.5\ ,\ m_{0.5} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad 0.5 = 1 \cdot q^{0.5} \quad /(\ )^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q_1 = 0.25}$

ב.

$5 \cdot 0.25^t + 7 \cdot 0.5^t = 6$

$\underset{\text{סימון}}{0.5^t = k} \quad \Rightarrow \quad k^2 = (0.5^t)^2 = (0.5^2)^t = 0.25^t$

$\Rightarrow \quad 5k^2 + 7k - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{-7 \pm 13}{10} \quad , \quad k > 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{6}{10} = 0.6$

$k = 0.5^t = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \ln 0.5^t = \ln 0.6$

$\Rightarrow \quad t \ln 0.5 = \ln 0.6 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 0.6}{\ln 0.5} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t = 0.74}$ **(שעות)**

$hours \rightarrow minutes: \quad 0.74 \cdot 60 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t = 44.22}$ **(דקות)**

---

12. א. (1)

$(1) \quad a \cdot (1 + \frac{p}{100})^2 = 11664 \quad , \quad (2) \quad a \cdot (1 + \frac{p}{100})^7 = 17,138$

$\frac{(2)}{(1)} \quad \Rightarrow \quad (1 + \frac{p}{100})^5 = 1.4693 \quad / \sqrt[5]{\ } \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{p}{100} = 1.08 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p = 8}$

(2)

$(1) \quad a \cdot 1.08^2 = 11664 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a = 10,000}$ **(שקלים)**

ב.

$(3) \quad 10000 \cdot (1 + \frac{m}{100})^2 = 11881 \quad \Rightarrow \quad (1 + \frac{m}{100})^2 = 1.1881 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{m}{100} = 1.09$

$(4) \quad 10000 \cdot 1.09^t = 1.2 \cdot 10000 \cdot 1.08^t \quad \Rightarrow \quad (\frac{1.09}{1.08})^t = 1.2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 1.2}{\ln \frac{1.09}{1.08}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t = 19.78}$ **(שנים)**

---

13. ב. (1) 28 דקות הן שתי יחידות של זמן מחצית חיים, לכן: $\mathbf{250_{gr}} = 1000_{gr} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.

(2) נמצא את שיעור הדעיכה לדקה (q), בנוסחה: $(m_t = m_0 \cdot q^t$: $\quad q = 0.9517 \quad \Leftarrow \quad 0.5 = 1 \cdot q^{14}$

$1000 \cdot 0.9517^t < 20 \quad \Rightarrow \quad 0.9517^t < 0.02 \quad \Rightarrow \quad t \ln 0.9517 < \ln 0.02$

$\Rightarrow \quad t > \frac{\ln 0.02}{\ln 0.9517} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t > 79.01_{minutes}}$

אפשר גם לעבוד על $q = 0.5$ ביחידות של 14 דקות:

$1000 \cdot 0.5^t < 20 \quad \Rightarrow \quad 0.5^t < 0.02 \quad \Rightarrow \quad t > \frac{\ln 0.02}{\ln 0.5} = 5.6439$

$5.6439 \cdot 14_{minutes} = \mathbf{79.01_{minutes}}$

14. א. (1) נתייחס לגידול במשך 4 חודשים של הצהובים מ־ 1820 ל־ 2130 :

$$2130 = 1820 \cdot q^4 \quad \Rightarrow \quad q^4 = 1.1703 \ \ /(\ )^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad q = 1.0401$$

נתייחס לגידול במשך 6 החודשים הראשונים:

$$1820 = m_0 \cdot 1.0401^6 \quad \Rightarrow \quad m_0 = \frac{1820}{1.0401^6} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m_0 = 1438}$$ **דגים**

(2)

$$m_7 = 1438 \cdot 1.0401^7 = \mathbf{1893}$$ **דגים**

ב. נמצא את קצב הגידול של האדומים:

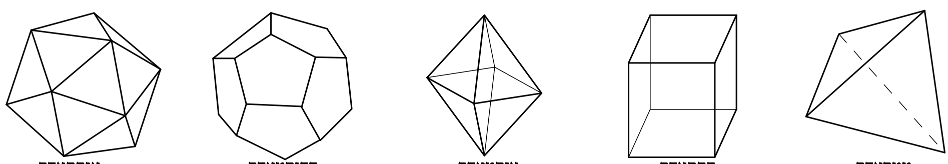
$$1720 = 1438 \cdot q^6 \quad \Rightarrow \quad q^6 = 1.1961 \ \ /(\ )^{\frac{1}{6}} \quad \Rightarrow \quad q = 1.0303$$

מכיון שהכמות ההתחלתית היתה שווה, היא אינה רלוונטית לגבי האחוז המבוקש.

אפשר לקבוע אותה, ללא הגבלת הכלליות לדג אחד.

$$\frac{1.0303^{10}}{1.0303^{10} + 1.0401^{10}} \cdot 100 = \frac{1.3478}{2.8295} \cdot 100 = \mathbf{47.64\%}$$

קיימים רק חמישה גופים מרחביים משוכללים. הגופים קרויים בלועזית על שם מספר הפאות שלהם. חלקו הראשון של השם הוא מספר הפאות ביוונית, וחלקו השני של השם הוא 'אדר' - פאה.



איקסאדר · דודקאדר · אוקטאדר · הקסאדר · טטראדר

שם	פאות	קודקודים	מקצועות	תאור
טטראדר (ארבעון)	4	4	6	פירמידה ישרה, משולשת ומשוכללת
הקסאדר	6	8	12	קוביה
אוקטאדר (תמנון)	8	6	12	שתי פירמידות ישרות מרובעות ומשוכללות המחוברות בבסין
דודקטאדר (תריסריון)	12	20	30	פאות מחומשות משוכללות. כל שלוש פאות נפגשות בקודקוד אחד
איקסאדר (עשירמון)	20	12	30	פאות משולשות משוכללות. כל חמש פאות נפגשות בקודקוד אחד

משפט הפאונים של אוילר: סכום מספר הקודקודים ומספר הפאות גדול ב־2 ממספר המקצועות, בכל פאון קמור.

בנוסחה: V - מספר הקודקודים ; F - מספר הפאות ; E - מספר המקצועות $\Leftarrow$ $V + F - E = 2$

תשמעו סיפור: שאלה שנשאלה במבחן הפסיכומטרי האמריקאי (S.A.T.): נתונים טטראדר ואוקטאדר בעלי פאות חופפות. הדביקו פאה לפאה והתקבל גוף חדש. כמה פאות לגוף החדש? התשובה המיידית שכמעט כל הנבחנים ענו היא 10 פאות: לטטראדר 4 פאות ; לאוקטאדר 8 פאות ; שתי פאות 'התבזבזו' על ההדבקה $\Leftarrow$ נשארו 10 פאות. אחד התלמידים חשב שאם שאלה זו הופיעה בין השאלות האחרונות - לא יתכן שהתשובה עליה כה פשוטה. הוא התעמק בבעיה וענה: 7 פאות! התלמיד קיבל במבחן ציון 99. כשבירר היכן טעה, נענה כי היה זה בשאלה זו. התלמיד התעקש שתשובתו נכונה, והבוחנים דחו את עירעורו. גם אביו של התלמיד, שהיה מדען בעצמו, טען לצדקת הבוחנים. התלמיד בנה מודל של הגופים והוכיח את צדקתו. העניין הגיע עד לבית המשפט שפסק כי התלמיד צודק. הבוחנים נאלצו להוסיף לו את הנקודה החסרה, אך הורידו נקודה אחת לכל שאר הנבחנים . . .

טוב, אז איך זה בכל זאת יכול להיות? התשובה היא כי שתי פאות באמת נגרעו מההדבקה. כל אחת משלושת הפאות האחרות של הטטראדר <u>התלכדה</u> עם אחת מפאות האוקטאדר, כך שיש להפחית שלוש פאות מתוך ה־10 שנשארו.

גאומטריה אנליטית

הקו הישר - שאלות (כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 007.)

1. (קיץ ס"ד - 2004 , מועד א) נתון משולש שווה־צלעות ABC.
שנים מקודקודי המשולש הם: $B(-a,0)$ ו־$C(a,0)$ ‏($a>0$). **(19)**
הראה כי סכום המרחקים משלוש צלעות המשולש, של נקודה כלשהי במשולש תלוי ב־a בלבד.

2. (קיץ ס"ח - 2008 , מועד ב)
שני קדקודי הבסיס AB בטרפז ABCD הם $A(6,10)$ ו־ $B(10,8)$.
הבסיס CD נמצא על ישר העובר דרך הנקודה $(-2,9)$.
נקודת המפגש M של אלכסוני הטרפז מחלקת את האלכסון DB כך ש־ $MB{:}MD=1{:}4$.
שיעור x של הנקודה M הוא 8.
ב. נתונה הנקודה E כך שהמרובע DMCE הוא מקבילית. מצא את שטח המחומש DABCE .
הדרכה: היעזר בסרטוט מדויק ככל האפשר. **(20)**

מעגל - שאלות (כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 007.)

3. (קיץ ס"ו - 2006 , מועד א)
א. מהי משוואת המעגל העובר דרך $A(2,-9)$, ומשיק לשני הצירים?
ב. הצלע AB של ריבוע ABCD משיקה בנקודה $A(2,-9)$ למעגל, שרדיוסו הוא הקטן מבין שני המעגלים שאת משוואתם מצאת בסעיף א'. הריבוע נמצא מחוץ למעגל, והקודקוד B נמצא ברביע הרביעי. אורך צלע הריבוע שווה לרדיוס המעגל.
מצא את משוואת הישר שעליו מונחת הצלע BC של הריבוע. **(21)**

4. (חורף ס"ז - 2007)
מעגל שמרכזו נמצא על הישר $y=mx-8$, עובר בנקודות $A(16,6)$ ו־ $B(-2,0)$.
א. הבע את שיעורי מרכז המעגל באמצעות m. **(22)**

לבריאות
שמתם לב שהברכה 'לבריאות' (למתעטש) מורכבת מ'לֵב' ו'רֵיאוֹת' ?

תשובות

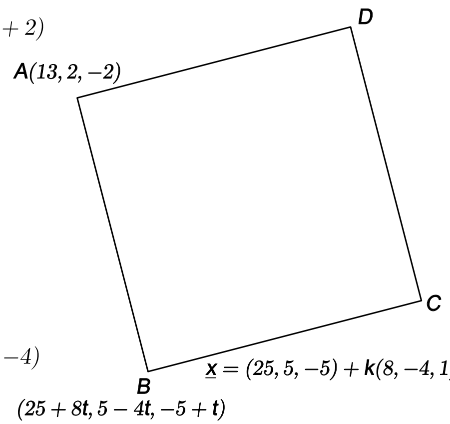
1. סכום המרחקים $=a\sqrt{3}$ (יחידות אורך) $(\surd)$

2. **ב.** $S=82$ (יחידות ריבועיות)

3. **א.** $(1)\ (x-5)^2+(y+5)^2=25$, $(2)\ (x-17)^2+(y+17)^2=289$ **ב.** $y=\frac{4}{3}x-20$

4. **א.** $O(\frac{32}{m+3},\frac{24(m-1)}{m+3})$

16. א.



$\underline{|\vec{AB}|:}\quad \vec{AB} = B - A = (25+8t-13,\ 5-4t-2,\ -5+t+2)$

$\vec{AB} = (12+8t,\ 3-4t,\ -3+t)$

$\vec{AB}\cdot(8,-4,1) = 0$

$(12+8t,\ 3-4t,\ -3+t)\cdot(8,-4,1) = 0$

$(96+64t)+(-12+16t)+(-3+t) = 0$

$81+81t = 0 \quad\Rightarrow\quad t=-1 \quad\Rightarrow\quad \vec{AB} = (4,7,-4)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{16+49+16} = 9$

$B(25+8\cdot(-1),\ 5-4\cdot(-1),\ -5-1)$

$\Rightarrow \quad B(17,9,-6)$

C מונחת על BC לכן: $C(25+8k,\ 5-4k,\ -5+k)$

מתקיים: $BC = 9$ לכן: $|\vec{BC}| = 9$

$\vec{BC} = C - B = (25+8k,\ 5-4k,\ -5+k)-(17,9,-6) = (8+8k,\ -4-4k,\ 1+k)$

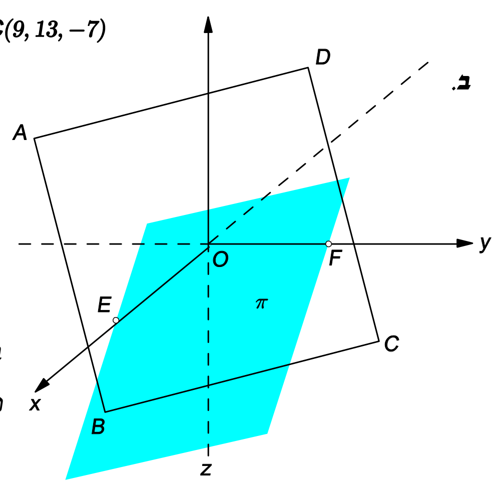
$|\vec{BC}| = \sqrt{(8+8k)^2+(-4-4k)^2+(1+k)^2} = \sqrt{64(1+k)^2+16(1+k)^2+(1+k)^2}$

$= \sqrt{81(1+k)^2} = 9\sqrt{(1+k)^2} = 9 \quad\Rightarrow\quad (1+k)^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad 1+k = \pm 1$

$(1)\quad k=0\ ,\quad C(25+8k,\ 5-4k,\ -5+k) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{C(25,5,-5)}$

$(2)\quad k=-2\ ,\quad C(25+8k,\ 5-4k,\ -5+k) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{C(9,13,-7)}$

ב.



$OE = OF \quad\Rightarrow\quad E(r,0,0)\ ,\quad F(0,r,0)$

$\vec{EF} = F - E = (0,r,0)-(r,0,0) = (-r,r,0)$

$(-r,r,0) = r(-1,1,0) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{\vec{EF} = (-1,1,0)}$

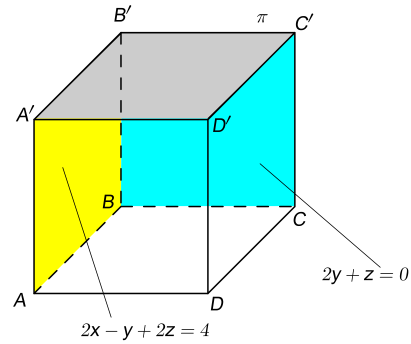
במישור π נתונה לנו משוואת ישר המוכל בו (BC)

וכן וקטור כיוון של ישר אחר המוכל בו (EF).

מכאן:

$\pi:\ \ \underline{x} = (25,5,-5)+p(8,-4,1)+q(-1,1,0)$

17. א.



$\underline{A'}:\ A(2,-2,z) \in A'B'BA \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 2-(-2)+2z=4$

$4+2+2z=4 \quad \Rightarrow \quad z=-1 \quad \Rightarrow \quad A'(2,-2,-1)$

$\vec{A'B'}$ תלוי ליניארית $\Leftarrow$ $\vec{A'B'} \perp B'C'CB$

בוקטור המקדמים של המישור (הנורמל): $(0,2,1)$

$\vec{B'C'}$ תלוי ליניארית $\Leftarrow$ $\vec{B'C'} \perp A'B'BA$

בוקטור המקדמים של המישור (הנורמל): $(2,-1,2)$

הוקטורים הנ״ל $\vec{A'B'}$ ו־ $\vec{B'C'}$ מוכלים במישור $A'B'C'D'$ (נסמן אותו: π).

ולכן פורשים את כל המישורים המקבילים למישור זה ובכללם את π.

נקודה ב־ π קובעת את הפרישה עבור π. נקודה זו נתונה לנו ע״י $A'(2,-2,-1)$.

$\pi:\quad \underline{x}=(2,-2,-1)+t(0,2,1)+s(2,-1,2)$

יהי $h(a,b,c)$ וקטור המאונך ל־ π

$(a,b,c)\cdot(0,2,1)=0 \quad \Rightarrow \quad 2b+c=0 \quad \Rightarrow \quad c=-2b$

$(a,b,c)\cdot(2,-1,2)=0 \quad \Rightarrow \quad 2a-b+2c=0 \quad \Rightarrow \quad 2a-b-4b=0 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{5b}{2}$

$b=2 \quad \Rightarrow \quad a=5\ ,\ c=-4 \quad \Rightarrow \quad \pi:\ 5x+2y-4z+d=0$

$A(2,-2,-1) \quad \Rightarrow \quad 10-4+4+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=-10 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi:\ 5x+2y-4z-10=0}$

ב. (1)

קדקוד $B'(2,0,0)$ הוא מפגש של שלוש פאות שיש לנו את משוואותיהן.

נבדוק האם נקודה זו נמצאת בשלוש המישורים הנתונים על ידי הצבה:

$B'(2,0,0)\ ,\quad 2x-y+2z=4 \quad \rightarrow \quad 2\cdot 2-0+2\cdot 0=4 \quad (\surd)$

$2y+z=0 \quad \rightarrow \quad 2\cdot 0+0=0 \quad (\surd)$

$5x+2y-4z-10=0 \quad \Rightarrow \quad 5\cdot 2+2\cdot 0-4\cdot 0-10=10 \quad (\surd)$

(2)

$A'B'$ הוא רדיוס במעגל, $A'B' \perp B'C'$ ולכן $B'C'$ משיק למעגל במקודה B'.

אנו מחפשים, אם־כן, את המשוואה הפרמטרית של הישר $B'C'$.

נקודה יש לנו: $B'(2,0,0)$.

$B'C' \perp A'B'BA$ ולכן הוא תלוי ליניארית בנורמל של מישור זה: $(2,-1,2)$.

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\underline{x}=(2,0,0)+t(2,-1,2)}$

18. א. המישור π מקביל לציר y . מכאן שוקטור כיוון אחד שלו הוא: $\underline{x} = (0,1,0)$.

המישור π חותך את ציר z בנקודה שבה $z = 1$, לכן $(0,0,1)$ מוכלת במישור π .

הישר $l_1: \ \underline{x} = (4,2,-1) + t(2m,0,m+2)$ מוכל במישור π ,

ולכן (עבור $t = 0$) הנקודה $(4,2,-1)$ מוכלת אף היא במישור π .

משתי נקודות אלו ניתן למצוא וקטור כיוון שני במישור π :

$$\underline{x} = (4,2,-1) - (0,0,1) = (4,2,-2) = 2\cdot(2,1,-1) \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = (2,1,-1)$$

הצגה פרמטרית של מישור π היא: $\pi: \ \underline{x} = (0,0,1) + r(0,1,0) + s(2,1,-1)$

משוואת המישור: $ax + by + cz + d = 0$

$$r = 0\ ,\ s = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0,1) \in \pi \quad \Rightarrow \quad (1)\ \ c + d = 0$$

$$r = 1\ ,\ s = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,1,1) \in \pi \quad \Rightarrow \quad (2)\ \ b + c + d = 0$$

$$r = 0\ ,\ s = 1 \quad \Rightarrow \quad (2,1,0) \in \pi \quad \Rightarrow \quad (3)\ \ 2a + b + d = 0$$

$$(1)\ \ c = -d \quad \Rightarrow \quad (2)\ \ b - d + d = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$(3)\ \ 2a + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -2a \ ,\ \underset{\text{בחירה}}{a = 1} \quad \Rightarrow \quad d = -2 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi: \ x + 2z - 2 = 0}$$

ב.

ממשוואת המישור שבסעיף א': נורמל המישור π הוא $(1,0,2)$. l_1 מוכל במישור π .

וקטור הכיוון של l_1 הוא $\underline{x} = (2m,0,m+2)$ והוא מאונך לנורמל של המישור:

$$(1,0,2)\cdot(2m,0,m+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2m + 0 + 2(m+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4m + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m = -1}$$

ג.

$$m = -1 \quad \Rightarrow \quad l_1: \ \ (4,2,-1) + t\,(-2,0,1)$$

l_2 מאונך לציר z ועובר דרך ראשית הצירים.

לכן הוא מוכל במישור (x,y) . משוואת מישור (x,y) היא $z = 0$.

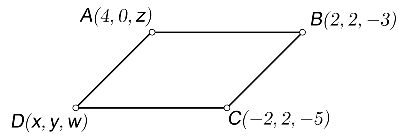
לכן נקודת חיתוך הישר l_1 עם הישר l_2 היא נקודת החיתוך של l_1 עם המישור $z = 0$.

נקודת החיתוך $z = 0 \ \Rightarrow \ -1 + t = 0 \ \Rightarrow \ t = 1 \ \Rightarrow \ (4,2,-1) + 1\cdot(-2,0,1) = (2,2,0)$

יש לנו שתי נקודות ידועות על l_2 - $(0,0,0)$ ו־ $(2,2,0)$ לכן וקטור הכיוון שלו הוא:

$$\underline{x} = (2,2,0) - (0,0,0) = (2,2,0) = 2\cdot(1,1,0) \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = (1,1,0) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{l_2: \ \underline{x} = t\,(1,1,0)}$$

19. א. מציאת משוואת מישור π ע"פ 3 נקודות שעליו:



$B(2,2,-3) \quad \Rightarrow \quad (I)\ \ 2a+2b-3c+d=0$

$C(-2,2,-5) \quad \Rightarrow \quad (II)\ \ -2a+2b-5c+d=0$

$(6,-2,-5) \quad \Rightarrow \quad (III)\ \ 6a-2b-5c+d=0$

$$\left.\begin{array}{l} (I)+(II) \quad \Rightarrow \quad 4b-8c+2d=0 \quad (*) \\ 3(II)+(III) \quad \Rightarrow \quad 4b-20c+4d=0 \end{array}\right\} - \quad \Rightarrow \quad 12c-2d=0 \quad \Rightarrow \quad d=6c$$

$\underline{c=1}$ בחירה $\Rightarrow \quad \underline{d=6} \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} \quad 4b-8+2\cdot 6=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{b=-1}$

$\Rightarrow \quad (I)\ \ 2a-2-3+6=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{a=-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \quad \pi: \quad -\frac{1}{2}x-y+z+6=0 \ \ /\cdot(-2) \quad \Rightarrow \quad \underline{\pi: \quad x+2y-2z-12=0}$

$A(4,0,z) \in \pi \quad \Rightarrow \quad 4-2z-12=0 \quad \Rightarrow \quad z=-4 \quad \Rightarrow \quad \underline{A(4,0,-4)}$

$\underline{D:}\ D(x,y,w)\ ,\ AD \parallel BC\ ,\ AD=BC \quad \Rightarrow \quad \vec{AD}=\vec{BC} \quad \Rightarrow \quad (x-4\ ,\ y\ ,\ w+4)=(-4\ ,\ 0\ ,\ -2)$

$\Rightarrow \quad x=0\ ,\ y=0\ ,\ w=-6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D(0\ ,\ 0\ ,\ -6)}$

ב.

עבור ED ידועה נקודה D שעליו ווקטור הכיוון שלו - הנורמל של π: $(1,2,-2)$

$ED: \quad \underline{x}=(0,0,-6)+s(1,2,-2) \quad \Rightarrow \quad E(s\ ,\ 2s\ ,\ -6-2s)$ $:ED$ נקודה אופיינית על

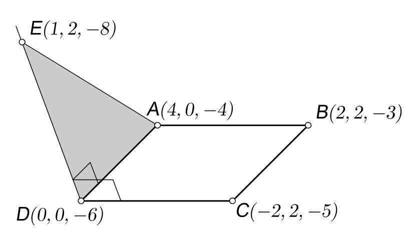
$AE: \quad \underline{x}=(4,0,-4)+r(3,-2,4) \quad \Rightarrow \quad E(4+3r\ ,\ -2r\ ,\ -4+4r)$ $:AE$ נקודה אופיינית על

$\underline{E:}\ (I)\ \ s=4+3r \ ,\ (II)\ \ 2s=-2r$

$(II)\ \ s=-r \quad \Rightarrow \quad (I)\ \ -r=4+3r \quad \Rightarrow \quad -4r=4 \quad \Rightarrow \quad \underline{r=-1} \quad \Rightarrow \quad \underline{s=1}$

(הפתרון מקיים גם את המשוואה השלישית: $-6-2s=-4+4r$. בדוק!)

$\Rightarrow \quad E(1\ ,\ 2\ ,\ -6-2) \quad \Rightarrow \quad E(1\ ,\ 2\ ,\ -8)$

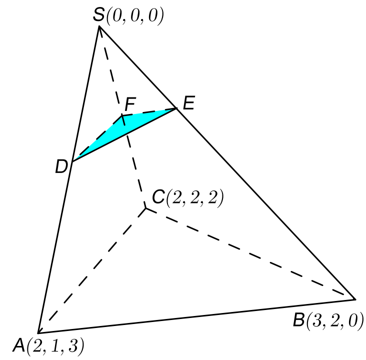


$|\vec{ED}| = \sqrt{(0-1)^2+(0-2)^2+(-6+8)^2} = 3$

$|\vec{AD}| = \sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2+(-4+6)^2} = \sqrt{20}$

$\mathbf{S_{\triangle ADE} = \frac{3\sqrt{20}}{2} = 6.71}$ **(יחידות ריבועיות)**

20. א. נסמן את המישור המבוקש ב־ π.



$\vec{SC} = C - S = (2,2,2) = (1,1,1)$

$\vec{SC} \perp DEF \quad \Rightarrow \quad \underline{h}_\pi = (1,1,1) \quad \Rightarrow \quad \pi: \ x+y+z+d=0$

$SF = FC \quad \Rightarrow \quad F(\frac{0+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+2}{2}) \quad \Rightarrow \quad F(1,1,1)$

$F \in \pi \quad \Rightarrow \quad 1+1+1+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=-3$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi: \ x+y+z-3=0}$

ב.

$SC \perp \pi \quad \Rightarrow \quad SF \perp \pi \quad \Rightarrow \quad h_{SDEF} = |\vec{SF}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

$\underline{D:} \ \underline{x} = (0,0,0) + t(2-0, 1-0, 3-0) \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = t(2,1,3)$
נקודה אופיינית על הקו AS

$D \in \pi \quad \Rightarrow \quad 2t+t+3t-3=0 \quad \Rightarrow \quad 6t-3=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad D(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

$\underline{E:} \ \underline{x} = (0,0,0) + s(3-0, 2-0, 0-0) \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = s(3,2,0)$
נקודה אופיינית על הקו BS

$E \in \pi \quad \Rightarrow \quad 3s+2s-3=0 \quad \Rightarrow \quad 5s=3 \quad \Rightarrow \quad s=\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad E(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}, 0)$

$F(1,1,1) \ , \ D(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \ , \ E(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}, 0)$

$DF = \sqrt{(1-1)^2 + (1-\frac{1}{2})^2 + (1-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$EF = \sqrt{(1-\frac{9}{5})^2 + (1-\frac{6}{5})^2 + (1-0)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}+\frac{1}{25}+1} = \sqrt{\frac{42}{25}} = \frac{\sqrt{42}}{5}$

$\cos\angle F = \frac{\vec{DF}\cdot\vec{EF}}{|\vec{DF}|\cdot|\vec{EF}|} = \frac{(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\cdot(-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, 1)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{42}}{5}} = \frac{0-\frac{1}{10}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{5}}\cdot\frac{10}{10}$

$= \frac{-1-5}{2\sqrt{21}} = \frac{-3}{\sqrt{21}} \quad \Rightarrow \quad \angle F = 130.8934^\circ$

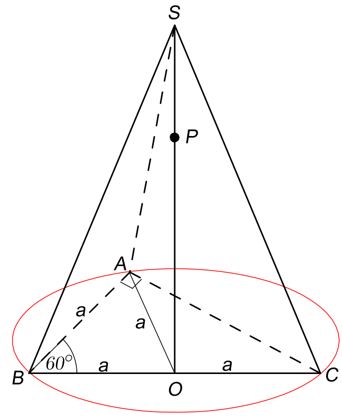
$S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}\cdot DF\cdot EF\cdot \sin\angle F = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{42}}{5}\cdot\sin 130.89^\circ = 0.3464$

$V = \frac{S_\triangle \cdot h}{3} = \frac{0.3464\cdot\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V = 0.2}$ **(יחידות קוב)**

אם גוררים את הדיוקים שבמחשבון לכל השלבים - מקבלים בדיוק 0.2 .

The only time the word 'incorrectly' isn't spelled incorrectly
is when it's spelled incorrectly . . .
(הפעם היחידה שבה המילה 'שגוי' מאויתת באופן שגוי היא כאשר האיות שלה שגוי . . .)

.21 א.



$t\,\vec{SO} = (1+t)\,\vec{PO} \quad \Rightarrow \quad t\,(\vec{SP}+\vec{PO}) = (1+t)\cdot\vec{PO}$

$t\,\vec{SP} + t\,\vec{PO} = \vec{PO} + t\,\vec{PO} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{PO} = t\,\vec{SP}}$

ב. מרכז המעגל החוסם משולש ישר־זווית הוא אמצע היתר: $\underline{\triangle ABC:}\ \angle A = 90^\circ$

לפי הנתון ולפי שתיכון ליתר שווה למחצית היתר: $AB = BO = OC = AO = a$.

$\Rightarrow \quad \underline{\triangle ABC:}\ \angle B = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle ABC} = \frac{a\cdot 2a\cdot \sin 60^\circ}{2} = a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$SO = SP + PO = a + t\,SP = a + t\,a = a(1+t)$

$V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot S_\triangle\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\cdot a(1+t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^3 \quad /\cdot\frac{3}{\sqrt{3}\,a^3}$

$\frac{1}{2}(1+t) = 2 \quad \Rightarrow \quad 1+t = 4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t=3}$

ג.

$t=3\,,\ a=8\,,\ SP=a \quad \Rightarrow \quad PO = t\,SP = t\,a = 3\cdot 8 = 24 \quad \Rightarrow \quad P(0,0,24)$

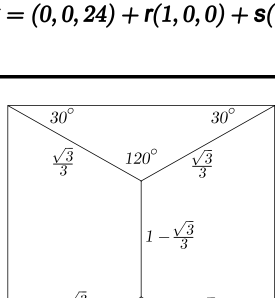
מישור ABC הוא מישור (x,y) . שני וקטורי כיוון שלו הם $(1,0,0)$ ו־ $(0,1,0)$.

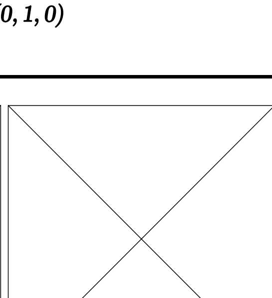
המישור המבוקש מקביל למישור ABC .

שני וקטורי כיוון ונקודה P שעליו מגדירים אותו:

$\boldsymbol{\underline{x} = (0,0,24) + r(1,0,0) + s(0,1,0)}$

נתון ריבוע שאורך צלעו – יחידת אורך אחת.
מהי הרשת (קטעים וצמתים) הקצרה ביותר,
המחברת את כל קודקודי הריבוע?
לא להאמין, אבל אלו אינם שני אלכסוני הריבוע!
אלא דווקא הרשת המתוארת בציור השמאלי.
סכום אורכי אלכסוני הריבוע הוא $2\sqrt{2}$ י"א,
ואורכי הקטעים בציור משמאל הוא $\sqrt{3}+1$ י"א.
החישוב אינו קשה:





$\sqrt{3}+1 \ < \ 2\sqrt{2} \quad /(\ )^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3+2\sqrt{3}+1 \ < \ 4\cdot 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{3} \ < \ 4$

$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{3} \ < \ 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{3}+1 < 2\sqrt{2} \quad (\surd)$

22. א.

$l_1: \ (0,0,2)+t(1,1,0) \quad , \quad l_2: \ (0,0,-2)+s(1,-1,0)$

אין תלות ליניארית בין וקטורי הכיוון של הישרים: $(1,1,0) \neq \alpha(1,-1,0)$ לכל α .

לכן: הוקטורים אינם מקבילים ואינם מתלכדים.

אם הם נחתכים אז יש פתרון למערכת: $(t,t,2)=(s,-s,-2)$,

אבל: $(t,t,2)=(s,-s,-2) \ \Leftarrow \ 2=-2 \ \Leftarrow$ אין פתרון .

לכן: הוקטורים אינם נחתכים. מכאן שהם **מ צ ט ל ב י ם .**

לא נדרש: $(1,1,0)\cdot(1,-1,0)=0$ (מכפלת וקטורי הכיוון של שני הישרים).

לכן: שני הישרים הם גם מאונכים (בנוסף להיותם מצטלבים).

ב. יהי (p,q,r) וקטור הכיוון של d . π - המישור המבוקש.

$d \perp l_1 \quad \Rightarrow \quad (p,q,r)\cdot(1,1,0)=0 \quad \Rightarrow \quad p+q=0$

$d \perp l_2 \quad \Rightarrow \quad (p,q,r)\cdot(1,-1,0)=0 \quad \Rightarrow \quad p-q=0 \quad \Rightarrow \quad p=q=0 \ , \ \underset{\text{בחירה}}{r=1} \quad \Rightarrow \quad (p,q,r)=(0,0,1)$

$\pi: \ \underline{x}=l_1+k(0,0,1)=(0,0,2)+t(1,1,0)+k(0,0,1) \quad \Rightarrow \quad (x,y,z)=(t,t,2+k) \quad \Rightarrow \quad x=y$

$2+k$ יכול להיות כל מספר ממשי, בפרט $z=0$ $(k=-2)$, ומכאן:

$x=y \quad \Rightarrow \quad x-y=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi: \ x-y=0}$

ג.

$l_1: \ (t,t,2)=(x,1,z) \quad \Rightarrow \quad t=1 \quad \Rightarrow \quad A(1,1,2)$

נקודה אופיינית על הישר

$l_2: \ (s,-s,-2)=(x,1,z) \quad \Rightarrow \quad s=-1 \quad \Rightarrow \quad B(-1,1,-2)$

$\vec{AB}=B-A=(-1-1,1-1,-2-2)=(-2,0,-4) \ \equiv \ (1,0,2)$

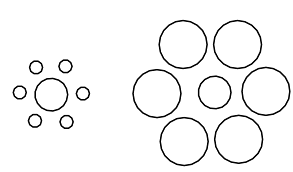
$\cos\alpha=\frac{|(1,0,2)\cdot(1,1,0)|}{|(1,0,2)|\cdot|(1,1,0)|}=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha=71.57^\circ}$

תעתועי ראיה

בציור נראה כאילו העיגול המרכזי בקבוצה השמאלית גדול יותר מהעיגול המרכזי בקבוצה הימנית, נכון?

אז זהו, שלא:

שני העיגולים המרכזיים בשתי הקבוצות שווים זה לזה!



23. א. $\pi: \ ax+by+cz=d \quad \Rightarrow \quad \underline{h}=(a,b,c)$ וקטור הכיוון של ישר־מאונך־למישור

$l_1: \ \underline{x}=(4,2,-5)+t(1,1,-1)$

$l_1 \in \pi \quad \Rightarrow \quad \underline{h} \perp (1,1,-1) \quad \Rightarrow \quad (a,b,c)\cdot(1,1,-1)=0$

$\Rightarrow \quad a+b-c=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a+b=c} \ (\checkmark)$

ב.

$l_2: \ \underline{x}=(1,-2,3)+s(0,1,1)$

$\sin\alpha=\frac{|\underline{u}\cdot\underline{v}|}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|(a,b,c)\cdot(0,1,1)|}{|(a,b,c)|\cdot|(0,1,1)|}=\frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{1+1}}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$2\,|b+c|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{2} \ \ /(\ \ )^2 \quad \Rightarrow \quad 4(b+c)^2=2(a^2+b^2+c^2) \ \ /:2$

$2(b+(a+b))^2=a^2+b^2+(a+b)^2 \quad \Rightarrow \quad 2(a+2b)^2=a^2+b^2+a^2+2ab+b^2$

$2a^2+8ab+8b^2=2a^2+2b^2+2ab \quad \Rightarrow \quad 6b^2+6ab=0 \ \ /:6 \quad \Rightarrow \quad b(b+a)=0$

$(1)\ \ b=0 \quad \Rightarrow \quad a=c \quad \Rightarrow \quad \pi_1: \ \ ax+az=d$

$(4,2,-5) \in \pi_1 \quad \Rightarrow \quad 4a-5a=d \ , \ \ a=1 \quad \Rightarrow \quad d=-1$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi_1: \ \ x+z+1=0}$

$(2)\ \ b+a=0 \quad \Rightarrow \quad b=-a \quad \Rightarrow \quad c=0 \quad \Rightarrow \quad \pi_2: \ \ ax-ay=d$

$(4,2,-5) \in \pi_2 \quad \Rightarrow \quad 4a-2a=d \ , \ \ a=1 \quad \Rightarrow \quad d=2$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi_2: \ \ x-y-2=0}$

ג. שיעורי y ו־ z של כל הנקודות על ציר x הם אפס $(y=z=0)$.

נבדוק חיתוך המישור עם ציר x:

$(1)\ \ x+z+1=0 \ , \ \ y=z=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \quad \Rightarrow \quad (-1,0,0) \quad \Rightarrow \quad \times$

$(2)\ \ x-y-2=0 \ , \ \ y=z=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad \Rightarrow \quad (2,0,0) \quad \Rightarrow \quad \checkmark$

המישור המבוקש, אם־כן, הוא $\pi_2: \ x-y-2=0$. המישור $[xy]$ הוא המישור $z=0$.

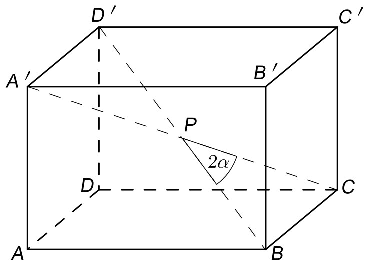
נמצא שתי נקודות המקיימות את שתי המשוואות

(ולכן הן על ישר החיתוך של שני המישורים), למשל: $A(2,0,0)$ ו־ $B(3,1,0)$

$\vec{AB}=(3,1,0)-(2,0,0)=(1,1,0) \quad \Rightarrow \quad$ **ישר החיתוך:** $\boldsymbol{\underline{x}=(2,0,0)+k(1,1,0)}$

טריגונומטריה במרחב

מנסרה - שאלות



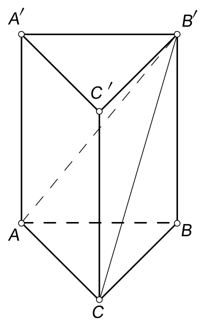
1. (4 יח׳ , קיץ תשנ״ח - 98)

נתונה תיבה ריבועית $ABCDA'B'C'D'$.

אורך צלע הבסיס הוא 10 ס״מ, וזווית

בין אלכסוני התיבה, BD' ו־CA', היא 2α.

הבע את נפח התיבה באמצעות α. **(112)**



2. (004 , חורף ס״ט - 2009)

נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסיה הם משולשים שווי־צלעות.

אורך צלע הבסיסים הוא a (י״א),

ואורך האלכסון של פאה הוא $\frac{\sqrt{10}}{2}a$ (י״א).

א. הבע באמצעות a את הגובה לצלע AC במשולש $AB'C$.

ב. מצא את גודל הזווית בין המישור $AB'C$ למישור הבסיס ABC.

ג. מצא את גודל הזווית בין אלכסון הפאה לבסיס ABC. **(112)**

3. (5 יח׳ , קיץ תשנ״ג - 93)

במנסרה ישרה $ABCA'B'C'$, שבסיסה משולש שווה־צלעות, אורך האלכסון AB' של הפאה הצדדית $ABB'A'$ הוא k. AD, הגובה לצלע BC בבסיס ABC, יוצר זווית α עם האלכסון AB'.

א. הסבר מדוע AD מאונך לפאה $BCC'B'$.

ב. הבע את נפח המנסרה באמצעות k ו־α.

ג. מצא עבור אילו ערכים של α יש פתרון לבעיה. **(113)**

כפול את מספר התלמידים בכיתה ב־20. הוסף למספר שהתקבל 7. כפול את התוצאה ב־5. הוסף לתוצאה 79. הוסף לתוצאה את גילך. החסר מהתוצאה 114. חלקו השמאלי של המספר שהתקבל הוא מספר התלמידים בכיתה. חלקו הימני של המספר שהתקבל הוא גילך.

תשובות

1. $V = \frac{1000}{\sin\alpha}\sqrt{\cos 2\alpha}\ cm^3$

2. **א.** $h = \frac{3}{2}a$ (יחידות אורך) **ב.** $\alpha = 54.74^\circ$ **ג.** $\beta = 50.77^\circ$

3. **ב.** $V = \frac{k^3}{3}\cos^2\alpha\sqrt{3-4\cos^2\alpha}$ (יחידות קוב) **ג.** $30^\circ < \alpha < 90^\circ$

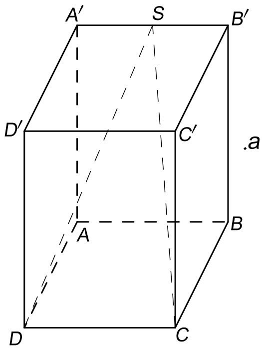
4. (5 יח' , חורף תשנ"ז - 97) בסיס של מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ הוא משולש שווה־שוקיים,

שאורך השוק שלו הוא b ($AB = AC = b$), וזווית הראש שלו היא 2α ($\angle CAB = 2\alpha$).

הזווית בין האלכסונים $A'B$ ו־$A'C$ של הפאות השוות היא 2β ($\angle CA'B = 2\beta$).

א. הבע את נפח המנסרה בעזרת b, β, α.

ב. הסבר מדוע במנסרה כזאת חייב להתקיים: $\alpha > \beta$. **(114)**



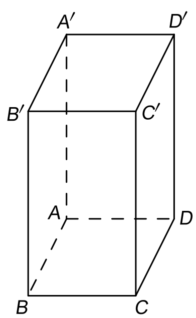
5. (5 יח' , חורף תשנ"ט - 99) בסיס תיבה $ABCDA'B'C'D'$ הוא ריבוע.

נקודה S היא אמצע הצלע $A'B'$. $\angle CSD = \alpha$. אורך צלע הבסיס הוא a.

א. הבע באמצעות α את הקוסינוס (או סינוס או טנגנס)

של הזווית שבין הקטע SC לבסיס התיבה.

ב. הבע את נפח התיבה באמצעות a, כאשר $\alpha = 30^\circ$. **(114)**



6. (5 יח' , קיץ תשס"א - 2001, מועד ב')

נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע.

אורך אלכסון הבסיס הוא 10_{cm} .

המישור, העובר דרך אלכסון הבסיס BD ודרך הקדקוד A' ,

יוצר זווית α עם הבסיס $ABCD$.

א. הבע באמצעות α את שטח המשולש $BA'D$.

ב. חשב את שטח המשולש $BA'D$, אם נתון שהתיבה היא קובייה. **(115)**

7. (5 יח' , חורף תשס"ב - 2002)

נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה $ABCD$ ריבוע. גובה התיבה הוא h, והזווית שבין

האלכסונים של שתי פאות צדדיות סמוכות היוצאות מאותו קדקוד היא α.

א. הבע באמצעות h ו־α את אורך הצלע של בסיס התיבה.

ב. באיזה תחום צריכה להימצא α כדי שלבעיה יהיה פתרון? **(115)**

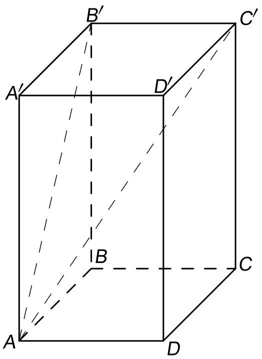
תשובות

4. א. $V = \frac{b^3 \sin 2\alpha}{2 \sin \beta} \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}$ (יחידות קוב)

5. א. $\cos \angle = \sqrt{5} \sin \frac{\alpha}{2}$ **ב.** $V = 1.575a^3$ (יחידות קוב)

6. א. $S_{\triangle BA'D} = \frac{25}{\cos \alpha} cm^2$ **ב.** $S_{\triangle BA'D} = 43.30 cm^2$

7. א. $h\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{\cos \alpha}}$ (יחידות אורך) **ב.** $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



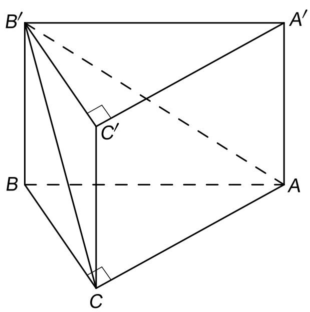
8. (5 יח׳ , קיץ תשס״ב - 2002)

נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע.

נתון: $AA' = h$,

הזווית שבין אלכסון התיבה, AC', ובין האלכסון AB' היא α.

הבע באמצעות h ו־α את נפח התיבה. **(116)**



9. (5 יח׳ , קיץ תשס״ב - 2002 - מועד ב׳)

נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$,

שבסיסה משולש ישר־זווית ($\angle BCA = 90^\circ$).

הזווית בין האלכסון $B'A$ לאלכסון $B'C$ היא β,

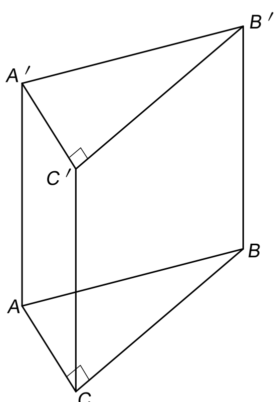
$CA = a$, $\angle BAC = \alpha$.

א. הראה כי המקצוע AC מאונך למישור הפאה $BCC'B'$.

ב. הבע באמצעות α , β ו־a את גובה המנסרה.

ג. הזווית שבין מישור המשולש $AB'C$ לבין מישור הבסיס היא γ.

הראה כי $\cos\gamma = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta$. **(116)**



10. (5 יח׳ , חורף תשס״ג - 2003)

נתונה מנסרה ישרה משולשת $ABCA'B'C'$,

שבסיסיה הם משולשים ישרי־זווית ($\angle C = \angle C' = 90^\circ$).

הזווית בין מישור הפאה $AA'B'B$ למישור הפאה $AA'C'C$ היא α.

א. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $A'B'A$

לשטח המשולש $A'C'A$.

ב. נתון גם: $CC' = 3m$, $AB = 2m$, $\alpha = 60^\circ$.

חשב את הזווית בין האלכסון AB' למישור הפאה $AA'C'C$. **(117)**

$$\lim_{x\to 8}\frac{1}{x-8} = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3} = \omega$$

(ω - האות היוונית omega)

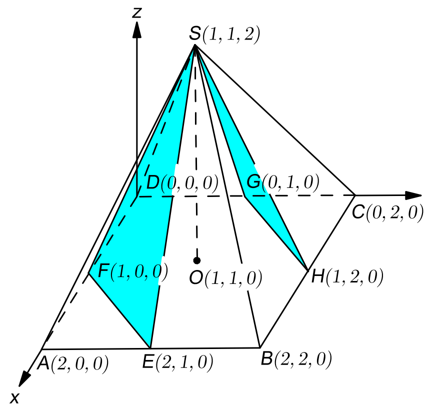
תשובות

8. $V = \dfrac{h^3\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ (יחידות קוב)

9. **ב.** $h = \dfrac{a}{tg\,\beta}\sqrt{1 - tg^2\alpha\, tg^2\beta}$ (יחידות אורך)

10. **א.** $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ **ב.** 28.71°

א. (פתרון: **עפר ילין** , פתח תקוה)



נמקם את ריבוע הבסיס של הפירמידה

במישור (x, y) כאשר $D(0,0,0)$.

נקבע את אורך צלע הבסיס ל- 2 יחידות אורך.

בהתאם לכך נקבל:

$A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,0)$

E , F , G , H הן נקודות האמצע של צלעות הבסיס,

ולכן:

$E(2,1,0)$, $F(1,0,0)$, $G(0,1,0)$, $H(1,2,0)$

O - מפגש אלכסוני הריבוע. SO - גובה הפירמידה הישרה.

$SO = AB \quad \Rightarrow \quad O(1,1,0)$, $S(1,1,2)$

הזווית המבוקשת היא הזווית שבין שני הנורמלים של המישורים SFE ו- SHG .

מציאת הנורמל של מישור SFE :

$$\vec{FE} = E - F = \underline{x} = (1,1,0) \quad , \quad \vec{FS} = S - F = \underline{u} = (0,1,2)$$

$$\pi 1_{SFE} = (1,0,0) + t(1,1,0) + s(0,1,2)$$

$$(a,b,c)\cdot(1,1,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0$$

$$(a,b,c)\cdot(0,1,2) = 0 \quad \Rightarrow \quad b + 2c = 0$$

$$\underset{\text{בחירה}}{c = 1} \quad \Rightarrow \quad b = -2 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{h_{\pi 1}} = (2,-2,1)$$

מציאת הנורמל של מישור SHG :

$$\vec{GH} = H - G = \underline{x} = (1,1,0) \quad , \quad \vec{GS} = S - G = \underline{v} = (1,0,2)$$

$$\pi 2_{SHG} = (0,1,0) + r(1,1,0) + q(1,0,2)$$

$$(a,b,c)\cdot(1,1,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0$$

$$(a,b,c)\cdot(1,0,2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + 2c = 0$$

$$\underset{\text{בחירה}}{c = 1} \quad \Rightarrow \quad a = -2 \quad \Rightarrow \quad b = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{h_{\pi 2}} = (-2,2,1)$$

$$\cos\alpha = \frac{|(2,-2,1)\cdot(-2,2,1)|}{|(2,-2,1)|\cdot|(-2,2,1)|} = \frac{|-4-4+1|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}} = \frac{7}{9} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 38.94^{\circ}}$$

4. א. ללא הגבלת הכלליות, נתיחס לכמות ההתחלתית בכל סוג כ־ 1 (דג אחד מכל סוג A ו־ B).

$\underset{\text{סימון}}{q_1 = q} \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{108.7}{100} q = 1.087q$

$\underline{A:}\ \ 2 = 1 \cdot q^n \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = n \ln q \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 2}{\ln q}$

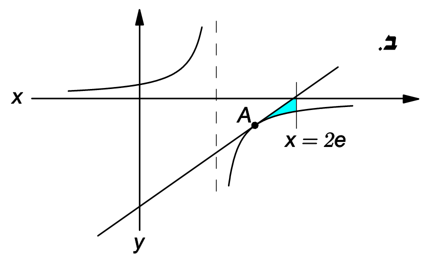
$\underline{B:}\ \ 4 = 1 \cdot (1.087q)^n \quad \Rightarrow \quad \ln 4 = n \ln 1.087q \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 4}{\ln 1.087q}$

$\frac{\ln 2}{\ln q} = \frac{\ln 4}{\ln 1.087q} = \frac{2 \ln 2}{\ln 1.087q} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln 1.087q}{\ln q} = 2 \quad \Rightarrow \quad \log_q 1.087q = 2$

$1.087q = q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 - 1.087q = 0 \quad \Rightarrow \quad q(q - 1.087) = 0 \ \ , \ \ q > 0 \quad \Rightarrow \quad q = 1.087$

$n = \frac{\ln 2}{\ln q} = \frac{\ln 2}{\ln 1.087} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n = 8.31}$ **(חודשים)**

ב.



$\underline{x_A:}\ \ \frac{4}{e}x - 8 = \frac{e}{e - x} \quad / \cdot e(e - x)$

$4x(e - x) - 8e(e - x) = e^2$

$4xe - 4x^2 - 8e^2 + 8ex = e^2$

$4x^2 - 12ex + 9e^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x - 3e)^2 = 0$

$2x = 3e \quad \Rightarrow \quad \underline{x_A = \frac{3e}{2}}$

$S = \int_{\frac{3e}{2}}^{2e} \left(\left(\frac{4}{e}x - 8\right) - \frac{e}{e - x}\right) dx = \left(\frac{2x^2}{e} - 8x + e \ln |e - x|\right) \Big|_{\frac{3e}{2}}^{2e}$

$S = \left(\frac{2 \cdot 4e^2}{e} - 16e + e \ln |-e|\right) - \left(\frac{2 \cdot 9e^2}{e \cdot 4} - 12e + e \ln |-0.5e|\right)$

$S = 8e - 16e + e - \frac{9}{2}e + 12e - e(\ln 0.5 + \ln e) = 0.5e - e \ln 0.5 - e \cdot 1$

$\mathbf{S = -0.5e - e \ln 0.5 = 0.525}$ **(יחידות ריבועיות)**

סוד ההצלחה

בנקאי מצליח גילה את סוד הצלחותיו: החלטות נכונות.

כיצד הוא מצליח להגיע לאותן החלטות נכונות: נסיון.

טוב, אבל איך רוכשים נסיון כדי להגיע למיומנות של קבלת אותן החלטות נכונות?

התשובה היא: החלטות שגויות . . .

5. א.

$$f(x)=\int \frac{2\ln x-1}{x}\,dx=2\int \frac{\ln x}{x}\,dx-\int \frac{1}{x}\,dx \overset{*}{=} 2\cdot\frac{1}{2}\ln^2 x-\ln x+c=\ln^2 x-\ln x+c$$

$$(*)\quad \int \frac{\ln x}{x}\,dx=\int \ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\int \ln x\cdot(\ln x)'\,dx=\frac{1}{2}\ln^2 x+c$$

$$f''(x)=\left(\frac{2\ln x-1}{x}\right)'=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-1\cdot(2\ln x-1)}{x^2}=\frac{2-2\ln x+1}{x^2}=\frac{3-2\ln x}{x^2}\overset{?}{=}0$$

$$3-2\ln x=0 \quad\Rightarrow\quad \ln x=\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad x=e^{1.5}$$

$$f(e^{1.5})=b \quad\Rightarrow\quad \ln^2 e^{1.5}-\ln e^{1.5}+c=b \quad\Rightarrow\quad 1.5^2-1.5+c=b \quad\Rightarrow\quad c=b-0.75$$

$$\mathbf{f(x)=\ln^2 x-\ln x+b-0.75}$$

ב. (1)

$$f'(x)=\frac{2\ln x-1}{x}\overset{?}{=}0 \quad\Rightarrow\quad \ln x=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{e}$$

$$y=\ln^2\sqrt{e}-\ln\sqrt{e}+b-0.75=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+b-\frac{3}{4}=b-1$$

$$f''(\sqrt{e})=\frac{3-2\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\frac{3-2\cdot\frac{1}{2}}{+}=\frac{3-1}{+}>0 \quad\Rightarrow\quad \textbf{min}:\ (\sqrt{e}\,,\ b-1)$$

(2)

$$f''(x)=\frac{3-2\ln x}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \underline{0<x<e^{1.5}:}\ \ f''(x)=\frac{+}{+}>0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\smile:}\ \ \mathbf{0<x<e^{1.5}}$$

$$\underline{x>e^{1.5}:}\ \ f''(x)=\frac{-}{+}<0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\frown:}\ \ \mathbf{x>e^{1.5}}$$

ג. (1) לפונקציה יש מינימום בנקודה שבה $x=\sqrt{e}$ שאינה תלויה בערך האיבר החופשי (c).

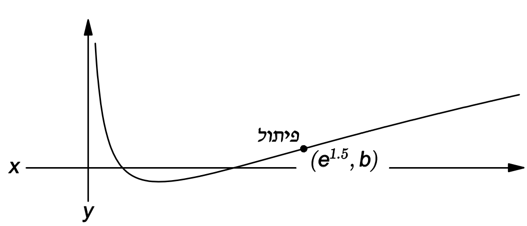
מתקיים: $\ln^2\sqrt{e}-\ln\sqrt{e}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

ומכאן: אם $c=\frac{1}{4}$ - לפונקציה נקודה משותפת אחת עם ציר x

אם $c>\frac{1}{4}$ - אין לפונקציה נקודה משותפת כלשהי עם ציר x.

$$\Rightarrow\quad c<\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad b-\frac{3}{4}<\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{b<1}$$

(2) $0<b<1$



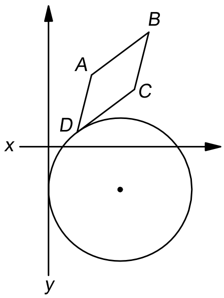
בשאלה לא נדרשנו להתייחס לאסימפטוטות:

אופקית - אינה קיימת. אנכית (חד־צדדית ימנית): $x=0$

מבחן 3 - חורף תש"ע - 2010

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 ושאלה אחת מהשאלות 4-5.

חלק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים



1. נתון מעגל, שמרכזו M נמצא ברביע הרביעי.

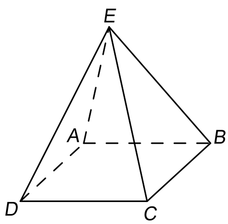
המעגל משיק לציר y. רדיוס המעגל הוא 5.

במקבילית $ABCD$ הצלע DC משיקה למעגל בנקודה D.

$A(3,5)$, $B(7,8)$. שטח המקבילית הוא 13.

א. מצא את משוואת הישר DC.

ב. מצא את השיעורים של נקודת ההשקה בין המעגל לציר y.



2. בסיסה של פירמידה $ABCDE$ הוא מקבילית. $\vec{EA} \perp \vec{EC}$.

א. הוכח: אם הבסיס $ABCD$ הוא מלבן אז $\vec{ED} \perp \vec{EB}$.

ב. נסח את הטענה ההפוכה לטענה שבסעיף א, והוכח אותה.

3. א. נתון מקום גאומטרי המקיים: $|z - \bar{z} + i| = |3z + \bar{z} - i|$, $z = x + yi$.

מצא את משוואת הישר המשיק לגרף של המקום הגאומטרי הנתון בנקודה שבה $x = 0$.

אבן עזרא מתפייט על המספר '1'

רבי אברהם אבן עזרא (ראב"ע, 1164–1080), פרשן המקרא, משורר, פיטן ופילוסוף, חי כמאה שנה לפני פיבונאצ'י והביא לאירופה בספרו **'ספר המִספר'** את שיטת הרישום ההודית־ערבית. את הספר הוא כתב בהיותו בעיר וירונה שבאיטליה (ארץ מוצאו של פיבונאצ'י) בשנים 1148–1147. למרות זאת, פיבונאצ'י הוא זה שידוע כראשון שהביא את השיטה ההודית־ערבית לאירופה, בגלל ששפת ספרו של ראב"ע היתה עברית, ושל פיבונאצ'י - לטינית.

ראב"ע חיבר ספר מתמטי נוסף - **'ספר האחד'**. ספר זה, קצר יותר ובעל חשיבות משנית, מביא את תכונותיהם של עשרת המספרים השלמים הראשונים. כך, למשל, הוא מתאר בלשונו הזכה את המספר אחד:

'הוא סופר עצמו, ואין אחֵר סופרו, הוא שורש ויסוד, ומרובע ומעוקב, והוא דומה לעצם הדבר הנושא כל המקרים, וכל מספר בכוחו והוא בכל מספר במעשה, והוא ההוה וכל מספר הווה בעבורו. והוא קדמון וכל הוא ראשון, ואין לו שבר כי אם במחשבת חילוק הכלל שיהיה אחד, והוא תחלת כל מספר שאינו זוג המחוברים על סדר המולידים המרובעים, גם הוא תחילת כל זוג שתהיינה הקצוות כפל זה על זה שוות והוא סיבת כל מספר זוגי ושאינו זוגי' . . .

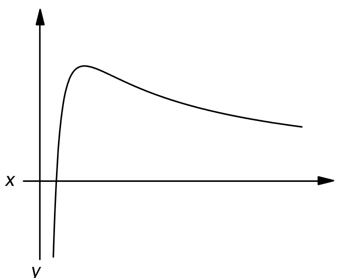
תשובות

1. א. $3x - 4y - 2 = 0$ **ב.** $(0,-3)$ **3. א.** $y = 0$

חלק שני - גידול ודעיכה , פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. א. בשעה 8^{00} היו 100_{gr} של חומר רדיואקטיבי I ו־ 100_{gr} של חומר רדיואקטיבי II .
הכמות של כל אחד מהחומרים קטנה עם הזמן בצורה מעריכת.
כעבור חצי שעה נותרו 80_{gr} של חומר I ו־ 64_{gr} של חומר II .
כעבור כמה שעות (מהשעה 8^{00}) יהיה ההפרש בין הכמויות של שני החומרים שווה ל־ 25_{gr} ?

ב. מצא על גרף הפונקציה $f(x) = 2^x$ את הנקודה הקרובה ביותר לישר $y = x \ln 4$.
(אין קשר בין הסעיפים.)



5. בציור מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\ln ax}{x}$,
ונתונה הפונקציה $g(x) = -\frac{\ln ax}{x}$, $a > 1$.
מעבירים ישר דרך נקודות הקיצון של שתי הפונקציות.
השטח, המוגבל על ידי הישר, על ידי הגרפים של שתי הפונקציות
ועל ידי הישר $x = e$, שווה ל־ $\ln^2(2e) - 1$.
מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודת הפיתול של $f(x)$ ודרך נקודת הפיתול של $g(x)$.

בהצלחה

הפרדוקסים של זֶנוֹן - למה אכילס לא ישיג את הצב

זֶנוֹן, פילוסוף יווני, 435-495 לפנה"ס, נהג להציג פרדוקסים מתמטיים רבים.
אחד מהמפורסמים שבהם הוא זה: אכילס והצב עורכים ביניהם תחרות ריצה. אכילס נותן לצב מקדמה של 100 מ'. אכילס מהיר מהצב פי 10. התחרות מתחילה. כשאכילס עובר 100 מ', הצב משיג אותו ב־10 מ'. כשאכילס עובר את אותם 10 מ', הצב משיג אותו במטר. כשאכילס עובר את המטר, משיג אותו הצב ב־10 ס"מ וכך הלאה עד אינסוף.
יוצא מכאן, שכל פעם שאכילס ידביק את הפער שבינו לבין הצב - הצב ישיג אותו בעשירית הפער האחרון שהיה ביניהם. אם כך אכילס לא יצליח להשיג את הצב לעולם . . .
מצד שני ברור שהוא ישיג אותו.
נו, טוב, לכן זה פרדוקס . . . (בסוף אכילס מת, בלי קשר לצב).

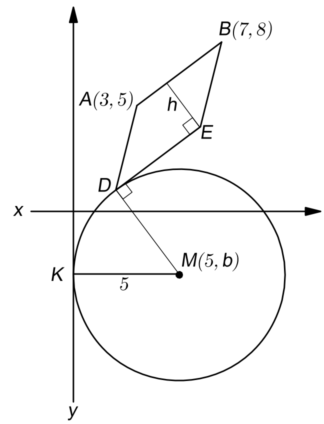
תשובות

4. א. $t = 1.5_{\text{ hours}}$ **ב.** $(1, 2)$

5. $x = \frac{1}{2}\sqrt{e^3}$

<u>פתרון מבחן 3</u>

1. א. מכיון שבמהלך הפתרון נשתמש בפרמטר C שבמשוואת ישר $(Ax+By+C=0)$,
נשנה את סימון קדקוד C של המקבילית (ל- E).



$AB=\sqrt{(3-7)^2+(5-8)^2}=5$

$S_{ABED}=5\cdot h=13 \quad \Rightarrow \quad h=\frac{13}{5}$

$m_{ED}=m_{AB}=\frac{8-5}{7-3}=\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{ED:}\ \ 3x-4y+C=0$

$h=d(A\leftrightarrow ED)=\frac{|\,3\cdot3-4\cdot5+C\,|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|\,C-11\,|}{5}=\frac{13}{5}$

$(1)\ \ C-11=13 \quad \Rightarrow \quad C_1=24$

$(2)\ \ C-11=-13 \quad \Rightarrow \quad C_2=-2$

שני ישרים מקבילים ל- AB רחוקים מ- A $\frac{13}{5}$ י"א: אחד מעל ל- AB , והאחר מתחתיו.
הפרמטר הקובע את גובה הקו הוא C . DE מתחת ל- AB , ולכן:

$C_2<C_1 \quad \Rightarrow \quad C=-2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{ED:}}\ \ \mathbf{3x-4y-2=0}$

ב.

$MD=R=5\ \ ,\ \ MD\perp ED \quad \Rightarrow \quad d(M\leftrightarrow ED)=5$

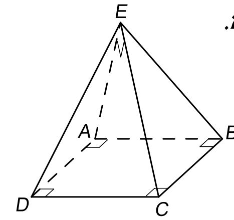
$M(5,b)\ \ ,\ \ d(M\leftrightarrow ED)=\frac{|\,3\cdot5-4\cdot b-2\,|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|\,13-4b\,|}{5}=5 \quad \Rightarrow \quad |\,13-4b\,|=25$

$(1)\ \ 13-4b=25 \quad \Rightarrow \quad 4b=-12 \quad \Rightarrow \quad b=-3<0\ \ (\surd)$

$(2)\ \ 13-4b=-25 \quad \Rightarrow \quad 4b=38 \quad \Rightarrow \quad b=\frac{19}{2}\not<0\ \ (\times)$

$y_k=y_M=b=-3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K(0,-3)}$

2. א.



$$\underset{\text{נתון}}{\vec{EA}\perp\vec{EC}} \iff \vec{EA}\cdot\vec{EC}=0 \ , \ \underset{\text{נתון}}{\vec{AD}\perp\vec{AB}} \iff \vec{AD}\cdot\vec{AB}=0$$

$$\underset{\text{צ״ל}}{\vec{ED}\perp\vec{EB}} \iff \vec{ED}\cdot\vec{EB}=0 \iff (\vec{EA}+\vec{AD})\cdot(\vec{EC}+\vec{CB})=0$$

$$\iff \underset{=0}{\vec{EA}\cdot\vec{EC}}+\vec{EA}\cdot\vec{CB}+\vec{AD}\cdot\vec{EC}+\vec{AD}\cdot\vec{CB}=0$$

$$\iff \vec{EA}\cdot(-\vec{AD})+\vec{AD}\cdot\vec{EC}+\vec{AD}\cdot\vec{CB}=0 \iff \vec{AD}\cdot(\vec{AE}+\vec{EC})+\vec{AD}\cdot\vec{CB}=0$$

$$\iff \vec{AD}\cdot\vec{AC}+\vec{AD}\cdot\vec{CB}=0 \iff \vec{AD}\cdot(\vec{AC}+\vec{CB})=0$$

$$\iff \boldsymbol{\vec{AD}\cdot\vec{AB}=0} \iff \boldsymbol{\vec{AD}\perp\vec{AB}} \ (\surd)$$

ב.

פירמידה שבסיסה מקבילית ומקצועותיה הצדדיים הנגדיים מאונכים זה לזה אזי בסיסה מלבן.

באותיות הציור: $ABCD$ מקבילית , $\vec{EA}\perp\vec{EC}$, $\vec{ED}\perp\vec{EB}$ $\Leftarrow$ $ABCD$ מלבן.

ההוכחה היא הכיוון ההפוך להוכחה שבסעיף א:

$$\underset{\text{צ״ל}}{\vec{AD}\perp\vec{AB}} \iff \vec{AD}\cdot\vec{AB}=0 \iff \vec{AD}\cdot(\vec{AC}+\vec{CB})=0 \iff \vec{AD}\cdot\vec{AC}+\vec{AD}\cdot\vec{CB}=0$$

$$\iff \vec{AD}\cdot(\vec{AE}+\vec{EC})+\vec{AD}\cdot\vec{CB}=0 \iff \vec{EA}\cdot(-\vec{AD})+\vec{AD}\cdot\vec{EC}+\vec{AD}\cdot\vec{CB}=0$$

$$\iff \underset{\text{נתון: }=0}{\vec{EA}\cdot\vec{EC}}+\vec{EA}\cdot\vec{CB}+\vec{AD}\cdot\vec{EC}+\vec{AD}\cdot\vec{CB}=0$$

$$\iff \vec{EA}\cdot(\vec{EC}+\vec{CB})+\vec{AD}\cdot(\vec{EC}+\vec{CB})=0 \iff (\vec{EA}+\vec{AD})\cdot(\vec{EC}+\vec{CB})=0$$

$$\iff \underset{\text{נתון}}{\vec{ED}\cdot\vec{EB}=0} \iff \boldsymbol{\vec{ED}\perp\vec{EB}} \ (\surd)$$

(מקבילית שאחת מזוויותיה ישרה - היא מלבן.)

פרדוקס המעטפות

נתונות לפניך שתי מעטפות אטומות, כשבכל אחת מהן סכום כסף. נתון גם שאחת המעטפות מכילה סכום כפול מאשר המעטפה האחרת. עליך לבחור את אחת המעטפות והסכום שבה - שלך.

נניח שבחרת מעטפה ובה 100 ש'. המנחה מאפשר לך להחליף את בחירתך במעטפה האחרת. נראה כי כדאי לך לעשות זאת: יש לך סיכוי של 50% להפסיד 50 ש' (אם במעטפה האחרת 50 ש') ו־50% להרויח 100 ש' (אם במעטפה האחרת 200 ש'). הרווח גדול מההפסד. נו, אם כך זה לא משנה איזו מעטפה בחרת בתחילה.

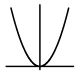
יותר מזה: גם אם לא פתחת אותה כדאי לך לכאורה להחליף את המעטפות, מאותו שיקול: הרווח גדול מההפסד, והסיכויים לרווח או הפסד שווים.

נניח שלא פתחת את המעטפה השניה, הרי מאותו שיקול בדיוק כדאי לך לחזור לבחירתך הראשונה . . .

3. א. $x = x + yi\ ,\ |\ z - \bar{z} + i\ | = |\ 3z + \bar{z} - i\ | \quad \Rightarrow \quad |\ x + yi - (x - yi) + i\ | = |\ 3(x + yi) + x - yi - i\ |$

$|\ 2yi + i\ | = |\ 4x + 2yi - i\ | \quad \Rightarrow \quad |\ (2y + 1)i\ | = |\ 4x + (2y - 1)i\ |$

$(2y + 1)^2 = (4x)^2 + (2y - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad 4y^2 + 4y + 1 = 16x^2 + 4y^2 - 4y + 1 \quad \Rightarrow \quad 8y = 16x^2$

$y = 2x^2 \quad \Rightarrow$  $\Rightarrow \quad \boldsymbol{y = 0}$

---

4. א. הנוסחה: $m_t = m_0 \cdot a^t$. x - קצב הדעיכה של חומר I מידי שעה . y - כנ"ל עבור חומר II

$\underline{I:}\ \ 100 \cdot x^{0.5} = 80 \quad \Rightarrow \quad x^{0.5} = 0.8\ \ /(\ \ )^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0.64$

$\underline{II:}\ \ 100 \cdot y^{0.5} = 64 \quad \Rightarrow \quad y^{0.5} = 0.64\ \ /(\ \ )^2 \quad \Rightarrow \quad y = 0.4096$

$100 \cdot 0.64^t - 100 \cdot 0.4096^t = 25\ \ /:25 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot 0.64^t - 4 \cdot 0.4096^t - 1 = 0\ \ /\cdot(-1)$

$\Rightarrow \quad 4 \cdot 0.4096^t - 4 \cdot 0.64^t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot (0.64^t)^2 - 4 \cdot 0.64^t + 1 = 0$

$(2 \cdot 0.64^t - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.64^t = 0.5 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.64} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t = 1.55_{hours}}$

ב. נייצג נקודה על הפונקציה: $(k, 2^k)$. נרשום את הישר $y = x \ln 4$

בייצוג הכללי: $-x \ln 4 + y = 0$, ונפעיל את נוסחת מרחק נקודה מישר: $d = \frac{|\ Ax_1 + By_1 + C\ |}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

מתקיים: $2^x - x \ln 4 > 0$ לכל x (ראה כוכבית), לכן: $d(k) = \frac{2^k - k \ln 4}{\sqrt{\ln^2 4 + 1}}$

$d'(k) = \frac{2^k \ln 2 - \ln 4}{\sqrt{\ln^2 4 + 1}} \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \ln 4 = 2^k \ln 2 \quad \Rightarrow \quad 2^k = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \ln_2 4 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = 1$

$d''(k) = \frac{2^k \ln^2 2}{\sqrt{\ln^2 4 + 1}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \min\ (\surd)\ ,\ k = 1 \quad \Rightarrow \quad 2^k = 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(1, 2)}$

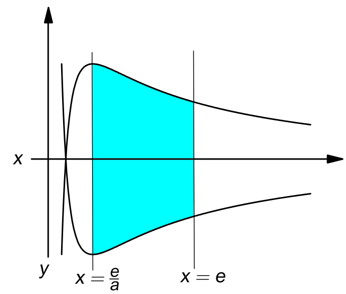
$(*)$ לפונקציה $y = 2^x - x \ln 4$ יש ערך קיצון מינימלי בלבד (הַשְׁלֵם!).

ערכה המינימלי הוא $2 - \ln 4 > 0$ לכן: $2^x - x \ln 4 > 0$ לכל x (ערך מוחלט מיותר).

האריה של ברנולי

*פעם פרסם **יוהאן ברנולי** (Johann Bernoulli , 1667–1748) בעיה מתמטית קשה,*
שהמתמטיקאים בני זמנו התקשו מאוד לפתרה.
ניוטון פתר את הבעיה בתוך שעות ספורות ופרסם את הפתרון בעילום שם.
כשהפתרון התפרסם, אמר ברנולי כי ניוטון הוא זה שפתר את החידה,
והוסיף משפט פִּרגון יפהפה: "מזהה אני את האריה לפי טביעת כף רגלו . . ."

.5



$f(x) = \frac{\ln ax}{x}$, $a > 1$

$g(x) = -\frac{\ln ax}{x}$

שתי הפונקציות נגדיות זו לזו,

ולכן הן סימטריות ביחס לציר x .

$$f'(x) = \frac{\frac{a}{ax}\cdot x - \ln ax}{x^2} = \frac{1-\ln ax}{x^2} \overset{?}{=} 0$$

$$\ln ax = 1 \quad\Rightarrow\quad ax = e \quad\Rightarrow\quad x = \frac{e}{a}$$

מהציור נתון שקיימת נקודת קיצון ושהיא מקסימלית.

משיקולי סימטריה, ל- $g(x)$ נקודת קיצון מינימלית באותו שיעור x .

$$S = \int_{\frac{e}{a}}^{e} \left(\frac{\ln ax}{x} + \frac{\ln ax}{x}\right) dx = \int_{\frac{e}{a}}^{e} \frac{2\ln ax}{x}\, dx \overset{*}{=} \ln^2 ax \Big|_{\frac{e}{a}}^{e}$$

$$= \ln^2(ae) - \ln^2 e \quad\Rightarrow\quad S = \ln^2(ae) - 1$$ (יחידות ריבועיות)

$$S = \ln^2(ae) - \cancel{1} = \ln^2(2e) - \cancel{1} \quad\Rightarrow\quad \ln ae = \pm \ln 2e$$

$$(1)\quad ae = 2e \quad\Rightarrow\quad a = 2 > 1 \ (\surd)$$

$$(2)\quad ae = (2e)^{-1} = \frac{1}{2e} \quad\Rightarrow\quad a = \frac{1}{2e^2} < 1 \ (\times)$$

$$f''(x) = \left(\frac{1-\ln ax}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\,(1-\ln ax)}{x^4} = \frac{-x-2x+2x\ln ax}{x^4} = \frac{x\,(2\ln ax - 3)}{x^4} \overset{?}{=} 0$$

$$x > 0 \quad\Rightarrow\quad \ln ax = \frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad ax = e^{1.5} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{e^{1.5}}{a}$$

משיקולי סימטריה, ל- $g(x)$ פיתול באותו שיעור x .

לכן:

$$a = 2 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{e^{1.5}}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x = \frac{1}{2}\sqrt{e^3}}$$

$$(*)\quad (\ln ax)' = \frac{1}{ax}\cdot a = \frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad \int \frac{\ln ax}{x} dx = \int \ln ax \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int \ln ax \cdot (\ln ax)' = \frac{1}{2}\ln^2 ax + c$$

המספר הראשוני ה-713 ניתן לרישום באופן הבא:

$$10^{1951} \times (10^{1975} + 1991991991991991991991991991) + 1$$

מספר זה התגלה כראשוני בשנת 1991 . . .

מבחן 4 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד א

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 ושאלה אחת מהשאלות 4-5.

חלק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נקודה E נמצאת על אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=36$.

האליפסה חותכת את ציר x בנקודות A ו־ B.

א. מצא את משוואת העקום שעליו נמצא המקום הגאומטרי של מפגשי התיכונים במשולש ABE.

ב. הנקודות $(\sqrt{2},y)$ נמצאות על המקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף א.

חיברו נקודות אלה עם הנקודות A ו־ B, ונוצר מצולע. מצא את שטח המצולע.

ג. האליפסה הנתונה התקבלה ממעגל על ידי הכפלת שיעורי ה־ y של כל אחת מהנקודות על המעגל בקבוע, בלי לשנות את שיעורי ה־ x שלהן.

(1) מהי משוואת המעגל?

(2) האם למעגל ולמקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א יש נקודות חיתוך? נמק.

2. נתון משולש ABC שווה־שוקיים וישר־זווית, $\angle C=90^\circ$.

שניים מקודקודי המשולש הם: $A(3,-2,1)$ ו־ $C(6,-2,-2)$.

המישור $\pi:\ 2x+y+2z-15=0$ מקביל למישור ABC.

א. (1) מצא את שתי האפשרויות לשיעורי הקדקוד B.

(2) נסמן את שתי האפשרויות לקדקוד B ב־ B_1 וב־ B_2.

האם הקדקוד C נמצא על הישר B_1B_2? נמק.

ב. נקודה D נמצאת במישור π. מצא את נפח הפירמידה DAB_1B_2.

3. א. (1) נתונות נקודות המקיימות $\frac{|z^2-i|}{|z^2+3i|}=1$, $z=x+yi$.

רשום באמצעות x ו־ y את משוואת המקום הגאומטרי של נקודות אלה.

(2) באיזה רביע, או באילו רביעים, נמצא המקום הגאומטרי, שאת משוואתו רשמת בתת־סעיף א(1)? נמק.

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודות הנמצאות על המקום הגאומטרי שאת משוואתו רשמת, ומקיימות $|z|^2=1.25$.

(2) איזה מרובע נוצר כאשר מחברים את הנקודות שבתת־סעיף ב(1)? נמק.

תשובות

1. א. $x^2+4y^2=4$ **ב.** $S=6\sqrt{2}$ (יחידות ריבועיות) **ג. (1)** $x^2+y^2=36$ **(2)** לא

2. א. (1) $B_2(5,2,-3)$, $B_1(7,-6,-1)$ **(2)** כן **ב.** $V=18$ (יחידות קוב)

3. א. (1) $y=-\frac{1}{2x}$ **(2)** II , IV **ב. (1)** $(\pm\frac{1}{2},\mp 1)$, $(\pm 1,\mp\frac{1}{2})$ **(2)** מלבן

חלק שני - גידול ודעיכה , פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x-ae^{-x}}{e^x+ae^{-x}}$, a פרמטר.

א. מצא עבור $a>0$ ועבור $a<0$ (הבע באמצעות a במידת הצורך) את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת האסימפטוטות שלה המקבילות לצירים.

(2) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

(3) נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים. השאר $\ln$ בתשובותיך.

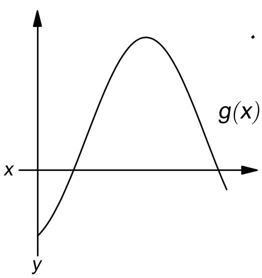
ב. ידוע כי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y נמצאת בחלק השלילי של הציר.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור: **(1)** $a>0$ **(2)** $a<0$.

5. נתונות הפונקציות $f(x)=\log_3(x^2-6x+18)$ ו- $g(x)=\sin\frac{\pi x}{6}-\cos\frac{\pi x}{3}$

המוגדרות לכל x בתחום $0\le x\le\frac{5\pi}{3}$.

בציור - גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון.



בתחום הנתון:

א. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(2) נתון כי הישר $y=k$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ ולגרף של $g(x)$ באותה נקודה.

$g'(x)=0$ בנקודה אחת בלבד.

העתק את הגרף של $g(x)$ ובאותה מערכת צירים סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(3) פתור: $\log_3(x^2-6x+18)=\sin\frac{\pi x}{6}-\cos\frac{\pi x}{3}$. נמק.

ב. (1) באיזה תחום $f'(x)>0$, ובאיזה תחום $f'(x)<0$?

(2) מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'(x)$, ע"י ציר x וע"י הישרים $x=2$ ו- $x=4$.

בהצלחה

תשובות

4. $a>0$: **א. (1)** ת"ה: $\forall x$, אסימפטוטות: $-\infty:\ y=-1$, $+\infty:\ y=1$

(2) $\forall x$ $f\nearrow$ **(3)** $(\frac{1}{2}\ln a\ ,\ 0)$ $(0,\frac{1-a}{1+a})$

$a<0$: **א. (1)** ת"ה: $x\ne\frac{1}{2}\ln(-a)$

אסימפטוטות: $x=\frac{1}{2}\ln(-a)$, $-\infty:\ y=-1$, $+\infty:\ y=1$

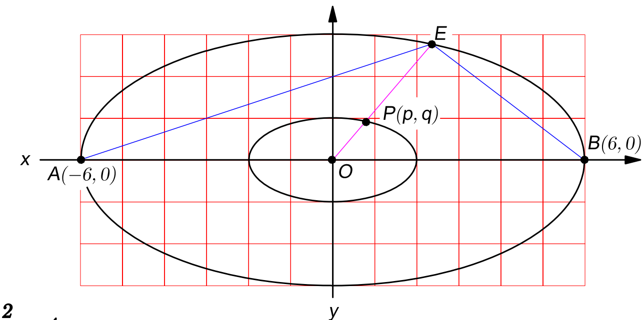
(2) $\forall\{x\ne\frac{1}{2}\ln a\}$ $f\searrow$ **(3)** $(0,\frac{1-a}{1+a})$

5. א. (1) $max_{ab.}(0,2.63)$, $min_{ab.}(3,2)$ **(3)** $x=3$

ב. (1) $f'>0:\ 3<x<\frac{5\pi}{3}$, $f'<0:\ 0<x<3$ **(2)** $S=\log_3\frac{100}{81}=0.19$ (י"ר)

פתרון מבחן 4

1. א. חיתוך האליפסה $x^2+4y^2=36$ עם ציר x הוא בנקודות: $(\pm 6,0)$ $\Leftarrow$ $x^2=36$ $\Leftarrow$ $y=0$.



$$(1)\quad \frac{EP}{PO}=2 \quad\Rightarrow\quad E(3p,3q)$$

$$E\in\{x^2+4y^2=36\}$$

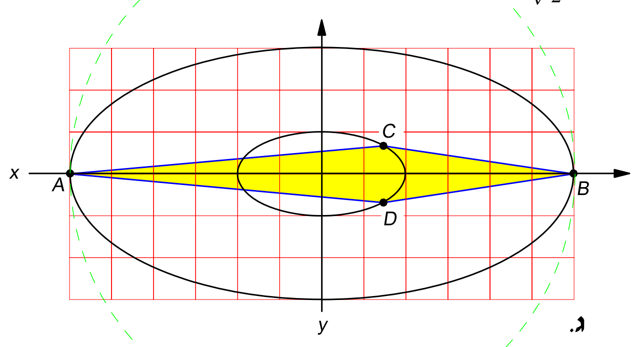
$$\Rightarrow\quad (3p)^2+4(3q)^2=36$$

$$9p^2+4\cdot 9q^2=36$$

$$p^2+4q^2=4 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{x^2+4y^2=4}$$

ב.

$$(\sqrt{2},y)\in\{x^2+4y^2=4\} \quad\Rightarrow\quad 2+4y^2=4 \quad\Rightarrow\quad 4y^2=2 \quad\Rightarrow\quad y^2=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$(2)\quad S=\frac{AB\cdot CD}{2}$$

$$AB=12\ ,\ \ CD=\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{12}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{12\sqrt{2}}{2}$$

$\boldsymbol{S=6\sqrt{2}}$ **(יחידות ריבועיות)**

ג.

(1)

משוואת המעגל: $\boldsymbol{x^2+y^2=36}$ $\leftarrow$ $x^2+(2yk)^2=36$ $\leftarrow$ $x^2+(2y)^2=36$ $\leftarrow$ $x^2+4y^2=36$

$$\underbrace{x^2+4y^2=36}_{\text{משוואת האליפסה הנתונה}} \rightarrow x^2+(2y)^2=36 \rightarrow \underbrace{x^2+(2yk)^2=36}_{k=0.5\ \text{הקבוע הוא}} \rightarrow x^2+y^2=36$$

(2) רדיוס המעגל הוא 6 י"א.

קצות הצירים של האליפסה שהתקבלה (המקום הגאומטרי) הן ב־ $x=\pm 2$ ו־ $y=\pm 1$.

לכן __אין__ נקודות חיתוך ביניהם.

(ניתן גם לנסות לפתור את מערכת המשוואות ולהראות שאין פתרון.)

---

(1) נקודת מפגש תיכונים מחלקת אותם ביחס של $2:1$ כשהחלק הגדול קרוב לקדקוד

(2) המרובע שהתקבל הוא דלתון: $x_C=x_D$ לכן CD מאונך לציר x .

C ו־ D במרחקים שווים מציר x $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה ואחד מהם נחצה - הוא דלתון.

שטח דלתון שווה למחצית מכפלת אלכסוניו.

החזקה ה־ 3 של 20 שווה לסכום החזקות ה־ 3 של 4 מספרים עוקבים: $8000=20^3=11^3+12^3+13^3+14^3$

5. א.

$f(x)=\frac{kx}{\ln x}\ ,\ \ k\neq 0$

$(\ln x\neq 0)\cap(x>0)\ \ \Rightarrow\ \ (x\neq 1)\cap(x>0)\ \ \Rightarrow\ \ \mathbf{(0<x<1)\cup(x>1)}$

ב. (1)-(2) משמעות הנתון $(y\leq -2)$ היא כי אם יש לפונקציה ערך מקסימלי בתחום $x>1$ אזי ערך זה הוא -2 . נמצא נקודת קיצון בתחום ואת התנאי שהיא מקסימלית:

$f'(x)=\frac{k\ln x-\frac{1}{x}\cdot kx}{\ln^2 x}=\boxed{\frac{k(\ln x-1)}{\ln^2 x}}\overset{?}{=}0\ \ \Rightarrow\ \ \ln x-1=0\ \ \Rightarrow\ \ x=e$

$\underline{k>0:}$

x	1		e	
f′		$\frac{+-}{+}=-$	0	$\frac{++}{+}=+$
f		↘	min	↗

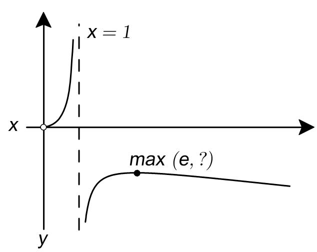
$\underline{k<0:}$

x	1		e	
f′		$\frac{--}{+}=+$	0	$\frac{-+}{+}=-$
f		↗	max	↘

$\Rightarrow\ \ \mathbf{k<0}$

$\max f(x)=f(e)=\frac{ke}{\ln e}=ke\ =\ -2\ \ \Rightarrow\ \ \mathbf{k=-\frac{2}{e}}$

$k=-\frac{2}{e}\ \ \Rightarrow\ \ \mathbf{f(x)=\frac{-2x}{e\ln x}}$ **(3)**



הגבול החד־צדדי (ימני) של הפונקציה

ב־ $x=0$ הוא 0 : $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{-2x}{e\ln x}=\frac{-2\cdot 0}{e\cdot(-\infty)}=0$

לכן הפונקציה ׳מחוררת׳ ב־ $(0,0)$.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{-2x}{e\ln x}=\frac{-2\cdot 1}{e\cdot 0}=\infty$

(הנתון שלפונקציה אסימפטוטה יחידה ניתן להקלת הפתרון. ניתן להגיע לכך כמתואר לעיל.)

ג.

נגדיר את $m(x)$ כפונקציה של שיפוע המשיק:

$m(x)=f'(x)=-\frac{2}{e}\cdot\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

$m'(x)=-\frac{2}{e}\cdot\frac{\frac{1}{x}\ln^2 x-(\ln x-1)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^4 x}=-\frac{2}{e}\cdot\frac{\ln^2 x-2\ln^2 x+2\ln x}{x\ln^4 x}=-\frac{2}{e}\cdot\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x\ln^4 x}$

$m'(x)=-\frac{2}{e}\cdot\frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}=\frac{2}{e}\cdot\frac{\ln x-2}{x\ln^3 x}\overset{?}{=}0\ \ \Rightarrow\ \ \ln x=2\ \ \Rightarrow\ \ x=e^2$

מכנה הנגזרת חיובי בנקודה החשודה. לכן כדי למצוא את סימן הנגזרת השניה,

מספיק לגזור את מונה הנגזרת הראשונה:

$(\ln x-2)'=\frac{1}{x}\ ,\ \ x=\ ^2\ ,\ \ \frac{1}{e^2}>0\ \ \Rightarrow\ \ m''(e^2)>0\ \ \Rightarrow\ \ x_{min}=e^2$

$f(x)=-\frac{2}{e}\cdot\frac{x}{\ln x}\ \ \Rightarrow\ \ f(e^2)=-\frac{2}{e}\cdot\frac{e^2}{2}=-e\ \ \Rightarrow\ \ \mathbf{(e^2,-e)}$

מבחן 16 - חורף תשע"ד - 2014

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 ושאלה אחת מהשאלות 4-5.

פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. הנקודות $C(x_1, y_1)$ ו־ $D(x_2, y_2)$ נמצאות ברביע הראשון על הפרבולה $y^2 = 4x$.

א. **(1)** הראה כי שיפוע המיתר CD הוא $m = \frac{4}{y_2 + y_1}$.

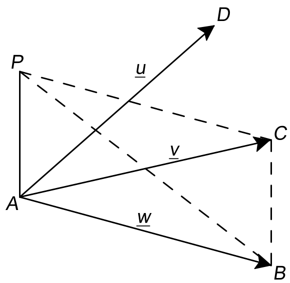
(2) הנקודה $(x, 3)$ היא אמצע המיתר CD . מצא את m .

ב. נתון כי מרחק כל נקודה על הפרבולה הנתונה מהישר $x = a$ שווה למרחקה מהנקודה $(1, 0)$.

מרחק הנקודה C מהישר $x = 2a$ הוא 6 יחידות אורך.

(1) מהו הערך של a ? נמק.

(2) מצא את משוואת הישר CD .



2. נתונים הוקטורים $\vec{AD} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{w}$.

נתון גם:

$|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 2$, $\angle BAC = \angle DAC = 60^\circ$, $\angle DAB = 90^\circ$.

א. האם יתכן ששלושת הוקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$

נמצאים במישור אחד? נמק.

נתון גם כי הוקטור $\vec{AP} = a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w}$ מאונך למישור ABC ,

a ו־ b הם פרמטרים.

ב. מצא את האורך של $\vec{AP}$ (ערך מספרי).

ג. היעזר בחישובים טריגונומטריים ומצא את הזווית בין המישורים PCB ו־ ABC .

חידת מקביליות

נתונות שתי מקביליות במישור.

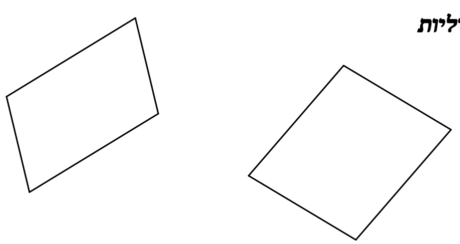
כיצד ניתן לחלק כל אחת מהן לשני חלקים,

כך שכל אחד מהחלקים שווה בשטחו לחלק האחר,

ע"י העברת ישר אחד דרך שתי המקביליות?

תשובה (בצופן א"ת ב"ש):

צוזג מבג קגל טדפקפא יורבמ תכלחפטמ צידשמכמפת (צפלס!)



תשובות

1. א. (2) $m = \frac{2}{3}$ **ב. (1)** $a = -1$ **(2)** $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$

2. א. לא **ב.** $|\vec{AP}| = 2\sqrt{6}$ (יחידות אורך) **ג.** $\alpha = 70.53^\circ$

3. המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z מקיים: $|z-12-5i|=7$.
המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים $w=x+iy$ מקיים: $\arg(w)=45^{\circ}$.
($\arg(w)$ היא הזווית בהצגה הקוטבית של w.)
המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים w חותך את המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z בנקודות B ו־ C .

א. סרטט באותה מערכת צירים סקיצות של שני המקומות הגאומטריים.

ב. הנקודות B ו־ C מייצגות במישור גאוס את המספרים המרוכבים z_1 ו־ z_2 בהתאמה.
מצא את $\arg(z_2 \cdot z_1)$.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x)=2e^{\sqrt{x}}$.

א. מצא את: **(1)** תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) תחומי העליה והירידה של פונקצית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $y=2\cdot f'(x)$,
והראה כי נקודה זו נמצאת על גרף הפונקציה $y=f(x^2)$, $x>0$.

ג. הפונקציות $y=2\cdot f'(x)$ ו־ $y=f(x^2)$ נפגשות בנקודה אחת בלבד (הנקודה שמצאת בסעיף ב).
השטח המוגבל על־ידי הגרפים של שתי פונקציות אלה ועל־ידי הישר $x=a$, $a>1$,
שווה ל־ $8e-2\cdot f(a)$.
מצא את הערך של a (תוכל להשאיר ln בתשובתך).

חילוף מוזר

התבונן על המכפלה: $12\cdot 42=504$.
נחליף את סדר הספרות בכל אחד מגורמי המכפלה: $24 \to 42$, $21 \to 12$. **מתקיים:** $21\cdot 24=504$.
הנה עוד דוגמאות: $96\cdot 23=69\cdot 32=2208$, $14\cdot 82=41\cdot 28=1148$, $13\cdot 62=31\cdot 26=806$
נסה למצוא את הכלל לקיומה של תופעה זו.

תשובות

3. **ב.** $\arg(z_2\cdot z_1)=90^{\circ}$

4. **א.** **(1)** $x\geq 0$ **(2)** $\nearrow: x>1$, $\searrow: 0<x<1$ **ב.** $\min(1,2e)$ **ג.** $a=1+\ln 3$

5. א. קבלן מציע דירות למכירה בתשלומים חודשיים.

בתאריך $1/1/2012$ התשלום החודשי עבור דירה היה 5900 שקלים, ובכל חודש גדל ב־ 0.2% .

המשכורת החודשית של רן בתאריך $1/1/2012$ היתה 8000 שקלים,

ובכל חודש היא גדלה ב־ 1.2% .

רן יכול להתחיל לשלם עבור דירה רק אחרי התאריך שבו התשלום החודשי עבור הדירה

יהיה 60% ממשכורתו החודשית.

כעבור כמה חודשים שלמים מהתאריך $1/1/2012$ יוכל רן להתחיל לשלם עבור הדירה?

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = x^n \cdot \ln x^n$.

הפרמטר n הוא מספר טבעי וזוגי.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) קבע אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית. נמק.

(3) הראה כי יש רק ישר אחד המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ ומקביל לציר x ,

ומצא את משוואתו.

(אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.)

בהצלחה

סימטריה ראשונית

```
700000000000000007
000000222222000000
000022222222220000
000222000002222000
000000000002222000
000000000022220000
000000000222200000
000000222200000000
000022220000000000
000222222222222000
000222222222222000
700000000000000003
```

המספר הרשום כאן (קוראים לרוחב משמאל לימין, שורה אחרי שורה) – הוא מספר ראשוני!

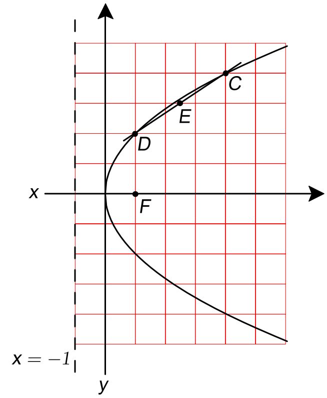
(Prime curios , Chris K. Caldwell and G. L. Honaker, Jr.)

תשובות

5. א. 21 (חודשים) **ב.** **(1)** $x \neq 0$ **(2)** זוגית **(3)** $y = -\frac{1}{e}$

פתרון מבחן 16

1. א. (1)



$y^2 = 4x \;,\; C(x_1, y_1) \;,\; D(x_2, y_2)$

$\Rightarrow \quad C(\frac{y_1^2}{4}, y_1) \;,\; D(\frac{y_2^2}{4}, y_2)$

$m_{CD} = \dfrac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}} = \dfrac{4(y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{m_{CD} = \dfrac{4}{y_1 + y_2}} \quad (\checkmark)$

(2)

$CE = ED \;,\; y_E = 3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y_1 + y_2}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 = 6$

$m = \dfrac{4}{y_1 + y_2} = \dfrac{4}{6} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m = \frac{2}{3}}$

ב. (1)

מדריך הפרבולה: $y^2 = 4x = 2px \quad \Rightarrow \quad p = 2 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{p}{2} = -\frac{2}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -1$

מוקד הפרבולה: $F(\frac{p}{2}, 0) \quad \Rightarrow \quad F(1, 0)$

פרבולה היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהמוקד ($F(1,0)$ במקרה שלנו)
שווה למרחקן מהמדריך ($x = -1$ במקרה שלנו).
נתון שמרחק כל נקודה על הפרבולה מהנקודה הזהה לנקודת המוקד,
שווה למרחקה מהישר $x = a$, ולכן: $\mathbf{a = -1}$.

(2) הישר $x = 2a$ הוא הישר $x = -2$ ($a = -1 \Rightarrow$) .
המרחק בין $C(\frac{y_1^2}{4}, y_1)$ מהישר $x = -2$ הוא 6 :

$\Rightarrow \quad x_C - (-2) = 6 \quad \Rightarrow \quad x_c = 4 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y_1^2}{4} = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1^2 = 16$

$y_1 = y_C > 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad C(4, 4)$

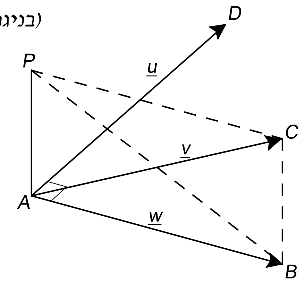
<u>$CD:$</u> $m = \frac{2}{3} \;,\; C(4,4) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = \frac{2}{3}(x - 4) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}}$

ההבדל בין אפס לכלום

פרופסור למתמטיקה שאל את תלמידיו מה ההבדל בין אפס לכלום.
הוא הניח לסטודנטים לדון בבעיה בכובד ראש במשך מספר דקות, ואז כתב בגיר על הלוח: '0' ואמר: "זה אפס".
מיד לאחר מכן מחק את שכתב על הלוח והסביר: "זה כלום".

2. א. לא. אם שלושת הוקטורים היו באותו מישור אזי:

$\angle DAB = \angle DAC + \angle BAC = 60^{\circ} + 60^{\circ} = 120^{\circ} \neq 90^{\circ}$ (בניגוד לנתון)



ב.

$|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{u}^2 = \underline{v}^2 = \underline{w}^2 = 4$

$\angle DAC = 60^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 60^{\circ} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$\angle BAC = 60^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos 60^{\circ} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$\angle DAB = 90^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} \cdot \underline{w} = 0$

$\vec{AP} = a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w} \;,\; \vec{AP} \perp ABC \quad \Rightarrow \quad \vec{AP} \cdot \underline{w} = 0 \;,\; \vec{AP} \cdot \underline{v} = 0$

$\vec{AP} \cdot \underline{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad (a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w}) \cdot \underline{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad a\, \underline{u} \cdot \underline{w} + b\, \underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{w}^2 = 0$

$\Rightarrow \quad 2b + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{b = -2}$

$\vec{AP} \cdot \underline{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w}) \cdot \underline{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad a\, \underline{u} \cdot \underline{v} + b\underline{v}^2 + \underline{w} \cdot \underline{v} = 0$

$\Rightarrow \quad 2a + 4b + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a + 4 \cdot (-2) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 3}$

$|\vec{AP}| = |a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w}| = |3\underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w}| = \sqrt{(3\underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w}) \cdot (3\underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w})}$

$= \sqrt{9\underline{u}^2 - 6\underline{u} \cdot \underline{v} + 3\underline{u} \cdot \underline{w} - 6\underline{u} \cdot \underline{v} + 4\underline{v}^2 - 2\underline{v} \cdot \underline{w} + 3\underline{u} \cdot \underline{w} - 2\underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{w}^2}$

$= \sqrt{9\underline{u}^2 + 4\underline{v}^2 + \underline{w}^2 + 6\underline{u} \cdot \underline{w} - 12\underline{u} \cdot \underline{v} - 4\underline{v} \cdot \underline{w}}$

$= \sqrt{9 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 + 6 \cdot 0 - 12 \cdot 2 - 4 \cdot 2} = \sqrt{24} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{|\vec{AP}| = 2\sqrt{6}}$ **(יחידות אורך)**

ג. $\triangle ABC$ הוא שווה־שוקיים (נתון: $AB = AC = 2$. למעשה הוא שווה־צלעות: $\angle A = 60^{\circ}$).

$\triangle PAB \cong \triangle PAC$ (צלע־זווית־צלע). צלעות מתאימות במשולשים חופפים: $PB = PC$.

לכן גם $\triangle PBC$ הוא שווה־שוקיים.

התיכון לבסיס במשולש שווה־שוקיים מתלכד עם הגובה לבסיס,

ולכן התיכונים AE ו־ PE הינם גם גבהים ל־ BC במישורים המתאימים,

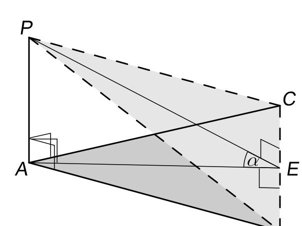
כש־ BC הוא ישר החיתוך בין שני המישורים ABC ו־ PCB .

מכאן שהזווית המבוקשת היא α שבציור.

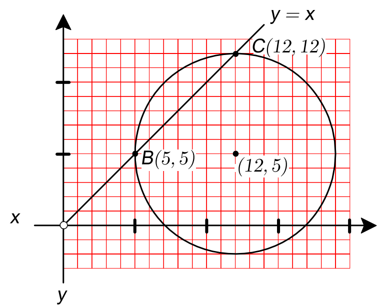
$\angle BAC = 60^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \angle BAE = 30^{\circ}$ גובה לבסיס במש״ש חוצה את זווית הראש

$\underline{\triangle AEB:}\ \frac{AE}{AB} = \cos 30^{\circ} \quad \Rightarrow \quad AE = 2\cos 30^{\circ} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\underline{\triangle PAE:}\ tg\, \alpha = \frac{PA}{AE} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 70.53^{\circ}}$



3. א.



$|z-12-5i|=7 \quad , \quad z=a+bi$

$|a+bi-12-5i|=7 \quad \Rightarrow \quad |(a-12)+(b-5)i|=7$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(a-12)^2+(b-5)^2}=7$

$\Rightarrow \quad \mathbf{(a-12)^2+(b-5)^2=49}$

$w=x+yi \quad , \quad \theta=45^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x}=tg\ 45^\circ=1$

$\Rightarrow \quad \mathbf{y=x\ ,\ x>0}$

ב.

$B\ ,\ C \in w \quad \Rightarrow \quad arg\ z_1=arg\ z_2=45^\circ \quad \Rightarrow \quad arg\ (z_1\cdot z_2)=45^\circ+45^\circ$ דה־מואבר

$\Rightarrow \quad \mathbf{arg\ (z_1\cdot z_2)=90^\circ}$

(בתודה ל**איתן לוייב** מביה"ס אמי"ת בר־אילן, גבעת שמואל, שקיצר את הגרסה הקודמת . . .)

חבל שזה נגמר

$3!-2!+1!=5$

$4!-3!+2!-1!=19$

$5!-4!+3!-2!+1!=101$

$6!-5!+4!-3!+2!-1!=619$

$7!-6!+5!-4!+3!-2!+1!=4421$

$8!-7!+6!-5!+4!-3!+2!-1!=35899$

כל המספרים שהתקבלו: 35899 , 4421 , 619 , 101 , 19 , 5 הם ראשוניים.

למרבה הצער, החוקיות אינה ממשיכה.

אפשר לקבל עוד מספרים ראשוניים בתבנית זו, אם נתחיל ב־ 105 , 61 , 59 , 41 , 19 , 15 10 ו־ 160 ,

אבל לא ברצף כפי שמוצג כאן.

(Prime curios , Chris K. Caldwell and G. L. Honaker, Jr.)

4. א. (1)

$$f(x)=2e^{\sqrt{x}} \quad , \quad \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x \ge 0}$$

(2)

$$f'(x)=2e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f''(x)=\frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}}{x}=\boxed{\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{2x^{1.5}}}\overset{?}{=}0$$

$$\sqrt{x}-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad \Rightarrow$$

x	0		1	
f''	∅	−	0	+
f'	∅	↘	min	↗

$\Rightarrow$ **↘: $0<x<1$, ↗: $x>1$**

ב. בסעיף זה שתי פונקציות המסומנות ב־ y .

לצורך הנוחות וההבדלה סומנה הראשונה ב־ $g(x)$ והשניה ב־ $h(x)$:

$$g(x)=2\cdot f'(x)=\frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$g'(x)=2\cdot f''(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{x^{1.5}}\overset{?}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad \Rightarrow \quad y=2e \quad \Rightarrow \quad \mathbf{min\ (1,2e)}$$

$$h(x)=f(x^2)=2e^{\sqrt{x^2}}=2e^{x} \quad \Rightarrow \quad h(1)=2e^{1}=2e \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(1,2e)\in h(x)}\ (\checkmark)$$

ג.

$$S \underset{\text{נתון}}{=} 8e-2\cdot f(a)=8e-2\cdot 2e^{\sqrt{a}}=8e-4e^{\sqrt{a}}$$

$$S \overset{*}{=} \int_1^a (h(x)-g(x))\,dx=\int_1^a \left(2e^{x}-\frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)dx$$

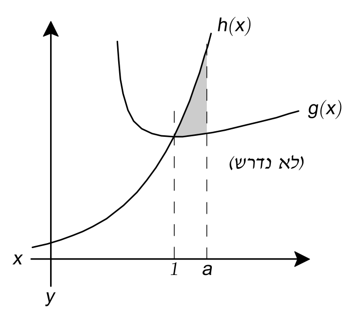
$$S=\left(2e^{x}-4e^{\sqrt{x}}\right)\Big|_1^a=(2e^{a}-4e^{\sqrt{a}})-(2e-4e)=2e^{a}-4e^{\sqrt{a}}+2e$$

$$S=2e^{a}-4e^{\sqrt{a}}+2e \underset{\text{נתון}}{=} 8e-4e^{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow \quad 2e^{a}=6e \quad \Rightarrow \quad e^{a}=3e \quad \Rightarrow \quad \ln e^{a}=\ln 3e$$

$$\Rightarrow \quad a=\ln 3+\ln e \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a=1+\ln 3}$$

$(*)$ $h(4)>g(4)$ (בדוק!)



מבחן 17 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד א

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 ושאלה אחת מהשאלות 4-5.

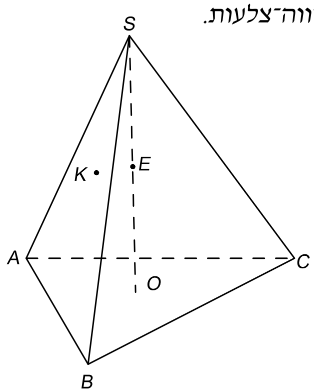
פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. א. מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי של הנקודות,
שהמרחק של כל אחת מהן מהישר $-5x+12y+13=0$, הוא 3 יחידות אורך.

ב. מהי משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים בשתי נקודות למקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א ?

ג. האם ציר y יכול להשיק בנקודה $(0,0)$ לאחד המעגלים שבסעיף ב ? נמק.

2. נתונה פירמידה ישרה $SABC$, שבסיסה ABC הוא משולש שווה־צלעות.
גובה הפירמידה הוא SO .
נקודה E היא אמצע SO .
נקודה F מקיימת: $\vec{SF}=t\,\vec{SC}$.
נסמן: $\vec{AB}=\underline{u}$, $\vec{AC}=\underline{v}$, $\vec{OS}=\underline{w}$.
נקודה K מקיימת: $\vec{SK}=\frac{1}{9}\underline{u}-\frac{2}{9}\underline{v}-\frac{2}{3}\underline{w}$.
מצא את הערך של t ,
אם ידוע שהנקודות F , K ו־ E נמצאות על ישר אחד.



3. א. סרטט במישור גאוס סקיצה של המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z המקיימים: $|z+3-\sqrt{3}\,i|=\sqrt{3}$. נמק.

ב. המקום הגאומטרי שבסעיף א נפגש עם ציר x בנקודה z_1 .
נתונה הנקודה $M(-3,\sqrt{3})$. נסמן ב־ O את ראשית הצירים.
המספר המרוכב z_2 נמצא על המקום הגאומטרי שבסעיף א,
כך שהמרובע z_1Mz_2O הוא דלתון. מצא את הזווית החדה של הדלתון.

ג. (1) מצא את הארגומנט של z_2 .

(2) מבין המספרים המרוכבים z שבסעיף א, מהו המספר שיש לו הארגומנט הגדול ביותר? מהו ארגומנט זה?

תשובות

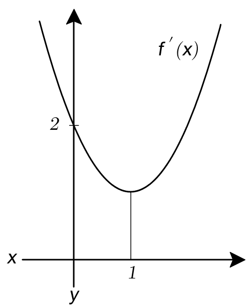
1. א. $(1)\ 5x-12y-52=0$, $(2)\ 5x-12y+26=0$ **ב.** $5x-12y-13=0$ (הישר הנתון) **ג.** לא

2. $t=\frac{1}{3}$

3. א. $(x+3)^2+(y-\sqrt{3})^2=3$ **ב.** 60° **ג.** $\arg(z_2)=120^\circ$ **(2)** $\arg(z_1)=180^\circ$

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת לכל x .



א. על פי הגרף של $f'(x)$ מצא תחומי קעירות כלפי מעלה ($\smile$) וכלפי מטה ($\frown$) של הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x . נמק.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר y בחלקו השלילי.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון גם: $f(x) = (x-a)e^{0.5x^2-x}$, a פרמטר.

היעזר בנתונים בגרף של $f'(x)$, וחשב את השטח המוגבל על־ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל־ידי הצירים.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4(x^2+4x+c)$, c פרמטר.

נתון כי לפונקציה יש אסימפטוטה שמשוואתה $x=-2$.

א. **(1)** מצא את ערך הפרמטר c .

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(3) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

(4) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. **(1)** נתונה הפונקציה $g(x) = -|f(x)|$. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) עבור אילו ערכים של k יש למשוואה $g(x)=k$ שני פתרונות בלבד?

בהצלחה

סכום מינימלי של מרחקים

מהי הנקודה במרובע קמור שסכום מרחקיה מכל אחד מקדקודי המרובע הוא מינימלי?

תשובה (בצופן א"ת ב"ש): יורב תכלפטמ ציגפשז (צפלס!)

תשובות

4. **א.** $\smile: x>1$, $\frown: x<1$ **ג.** $S = 1-\frac{1}{\sqrt{e}} = 0.39$ (יחידה ריבועית)

5. **א.** **(1)** $c=4$ **(2)** $x \neq -2$ **(3)** $\nearrow: x>-2$, $\searrow: x<-2$ **(4)** $(-1,0)$, $(-3,0)$, $(0,1)$

ב. **(2)** $k=0$

מבחן 35 - קיץ תשע"ט - 2019 - מועד ב

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 ושאלה אחת מהשאלות 4-5.

פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון מעגל שמשוואתו היא $x^2+y^2=a^2$. $a>0$ פרמטר.

הזיזו את המעגל ימינה (הזזה אופקית) כך שישיק לציר y.

א. הבע באמצעות a את משוואת המעגל שהתקבל.

ב. בונים מעגל המשיק מבחוץ למעגל שהתקבל בסעיף א ומשיק גם לציר y.

שיעור x של מרכז המעגל שבונים הוא חיובי. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאים מרכזי המעגלים הנבנים כך. אם יש צורך, השתמש ב־ a.

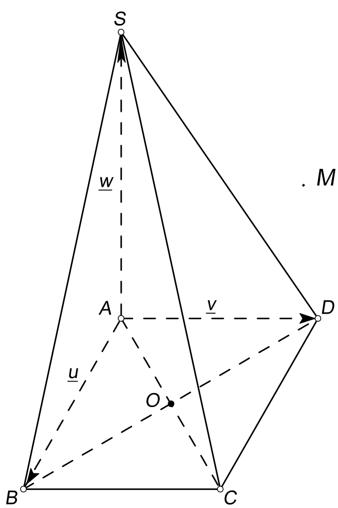
הישר $y=x+3$ משיק בנקודה M למקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף ב.

ג. מצא את ערכו של הפרמטר a .

ד. רשום את שיעורי נקודת ההשקה של שני המעגלים:

(1) המעגל שהתקבל בסעיף א.

(2) המעגל שנבנה כמתואר בסעיף ב ומרכזו הוא הנקודה M .



2. נתונה פירמידה SABCD, שבסיסה, ABCD, הוא ריבוע.

הנקודה O היא נקודת חיתוך אלכסוני הבסיס.

P היא נקודה על הקטע SD, ומתקיים: $\vec{SP}=t\cdot\vec{SD}$, $t>0$.

נסמן: $\vec{AB}=\underline{u}$, $\vec{AD}=\underline{v}$, $\vec{AS}=\underline{w}$.

א. הבע את הוקטור $\vec{OP}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו־ t .

ב. מצא עבור איזה ערך של t , OP מקביל למישור הפאה SAB .

נתון: אורך צלע הריבוע ABCD הוא 4 , AS מאונך לבסיס הפירמידה , $AS=4\sqrt{2}$.

A היא ראשית הצירים. B , D ו־ S נמצאות על החלק החיובי של הצירים x , y ו־z בהתאמה.

ג. מצא עבור אילו ערכי t , הישר OP יוצר זווית של 45° עם מישור הפאה SAD.

הנקודה T נמצאת על הקטע SC כך ש־ TABCD היא פירמידה ישרה.

ד. מצא את נפח הפירמידה TABCD.

תשובות

1. א. $(x-a)^2+y^2=a^2$ **ב.** $y^2=4ax\ ,\ x\neq 0$ (פרבולה, למעט $x=0$) **ג.** $a=3$ **ד.** $(3,3)$

2. א. $\vec{OP}=-\frac{1}{2}\underline{u}+(t-\frac{1}{2})\underline{v}+(1-t)\underline{w}$ **ב.** $t=\frac{1}{2}$ **ג.** $t_1=1\ ,\ t_2=\frac{2}{3}$ **ד.** $V=\frac{32\sqrt{2}}{3}=15.08$ (יח"ק)

.3 נתונה סדרה הנדסית שאיברה הראשון הוא 1 ואיברה השני הוא iz (z הוא מספר מרוכב).
הסדרה אינה קבועה.

א. **(1)** רשום את חמשת איבריה הראשונים של הסדרה (אם יש צורך, הבע באמצעות z).
(2) הוכח כי סכום חמשת איבריה הראשונים של הסדרה שווה ל- $\frac{z^5+i}{z+i}$.

ב. **(1)** מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^5=-i$ (z הוא מספר מרוכב).
(2) מצא את כל פתרונות המשוואה $1+iz-z^2-iz^3+z^4=0$ (z הוא מספר מרוכב).

הנקודה A נמצאת ברביע השלישי במישור גאוס,
והיא מתאימה לאחד מפתרונות המשוואה שבתת־סעיף ב(2).
ABO הוא משולש שווה־צלעות במישור גאוס (O - ראשית הצירים).

ג. מצא את המספר המרוכב המתאים לנקודה B (מצא את שתי האפשרויות).

<u>פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות</u>

.4 נתונה הפונקציה $f(x)=\ln(x^2+ax+1)$. a הוא פרמטר , $-2<a<2$.

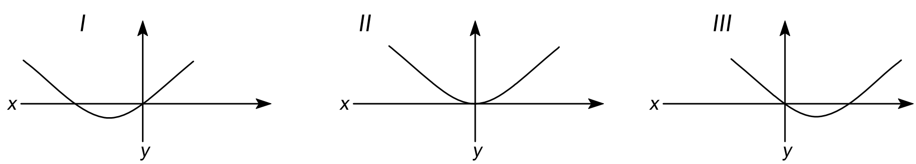
א. הראה שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר x (הבע בעזרת a, אם צריך).

ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה (הבע בעזרת a, אם צריך).

ד. שלושת הגרפים מתארים את גרף הפונקציה $f(x)$ כתלות בפרמטר a בתחומים הבאים:

(1) $0<a<2$ **(2)** $-2<a<0$ **(3)** $a=0$



התאם בין הגרפים II , I ו־ III לתחומים המצויינים לעיל ((2) , (1) ו־ (3)).

ה. עבור $-2<a<0$:

נסמן ב־ S את השטח המוגבל על־ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל־ידי ציר x .
הבע באמצעות a ו־ S את האינטגרל $\int_0^{-a}\ln(4x^2+4ax+4)\,dx$.

תשובות

.3 **א.** **(1)** $1\ ,\ iz\ ,\ -z^2\ ,\ -iz^3\ ,\ z^4$ **ב.** **(1)** $cis\,54^\circ\ ,\ cis\,126^\circ\ ,\ cis\,198^\circ\ ,\ cis\,270^\circ\ ,\ cis\,342^\circ$

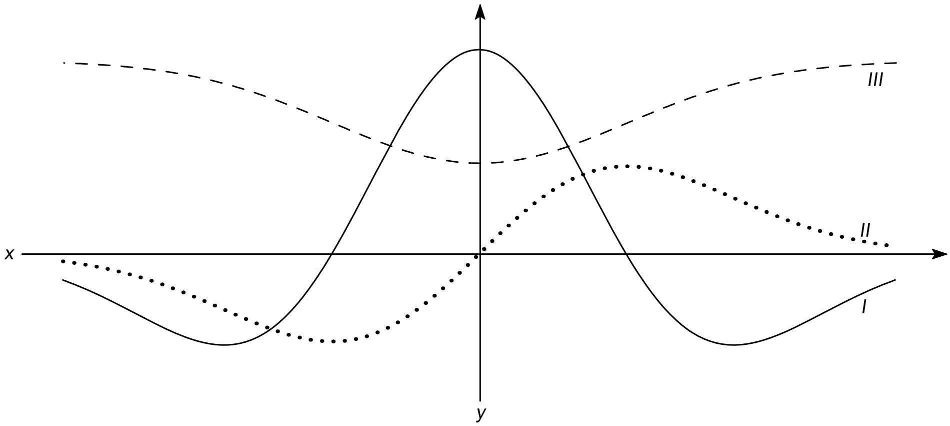
ב. **(2)** $cis\,54^\circ\ ,\ cis\,126^\circ\ ,\ cis\,198^\circ\ ,\ cis\,342^\circ$ **ג.** $B_1:\ cis\,138^\circ\ ,\ B_2:\ cis\,258^\circ$

.4 **ב.** $(0,0)\ ,\ (-a,0)$ **ג.** $\min\left(-\frac{a}{2}\ ,\ \ln\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\right)$

ד. $(1)\leftrightarrow I\ ,\ (2)\leftrightarrow III\ ,\ (3)\leftrightarrow II$ **ה.** $\int_0^{-a}\ln(4x^2+4ax+4)\,dx=-a\ln 4-S$

5. בסרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות f , f' ו־ f'' , המוגדרות לכל x .

גרף III נמצא כולו מעל גרף II .



א. התאם כל גרף לפונקציה המתאימה לו. נמק.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f'(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר y .

נתון כי $f'(x) = x \cdot e^{-x^2}$.

ב. מצא עבור איזה ערך של x אורך הקטע AB יהיה מינימלי,

ועבור איזה ערך של x , אורך הקטע AB יהיה מקסימלי.

נתון כי האורך המקסימלי של הקטע AB שווה ל־ $1 + \frac{1}{2e}$.

ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

בהצלחה

האם מספר לא־רציונאלי בחזקת מספר לא רציונאלי יכול להיות רציונאלי?

ובכן, התשובה היא: כן. יש אינסוף אפשרויות כאלה, למרות שאיננו יכולים לדעת מהו!

התבונן במספר $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. אם מספר זה הוא רציונאלי - אז מצאנו דוגמה.

אם הוא אינו רציונאלי, אז $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ הוא הדוגמה.

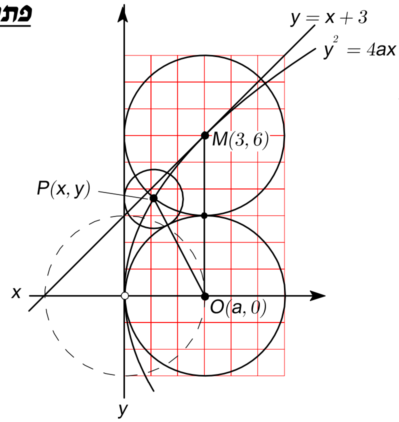
הבסיס $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$ אינו רציונאלי והמעריך אינו רציונאלי. ומתקיים: $(\surd)$ $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$.

אפשר ליישם את העקרון גם על $\sqrt{5}^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ וכו'

תשובות

5. **א.** $f'' \leftrightarrow I$, $f' \leftrightarrow II$, $f \leftrightarrow III$ **ב.** $x_{min} = \frac{1}{2}$, $x_{max} = -1$ **ג.** $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + 1$

פתרון מבחן 35



1. א.

מכיון שמרכז המעגל הוא ראשית הצירים,
הזזה אופקית של המעגל כך שישיק לציר y
- היא הזזה באורך הרדיוס שלו - a .
נקבל מעגל שמרכזו $O(a,0)$ ורדיוסו - $R_O = a$:

$$x^2+y^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(x-a)^2+y^2=a^2}$$

ב. נסמן את מרכז המעגל הנוסף - $P(x,y)$.

נמצא את הקשר בין x ל־ y . עבור $x=0$ אין מעגל.

קו המרכזים של שני מעגלים משיקים מבחוץ הוא סכום אורכי מחוגיהם.

$$R_P = x \quad \Rightarrow \quad PO=\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=R_P+R_O=x+a \quad /(\ )^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2ax+a^2+y^2=x^2+2ax+a^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y^2=4ax\ ,\ x\neq 0}$$ **פרבולה**

ג. משוואת פרבולה $y^2=2px$. במקרה שלנו: $y^2=2\cdot 2ax$, כלומר: $p=2a$.

משוואת משיק לפרבולה בנקודה (x_0,y_0) שעליה היא $y\cdot y_0=p(x+x_0)$

$$y=x+3\ ,\ \ p=2a \quad \Rightarrow \quad y\cdot(x_0+3)=2a(x+x_0) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{2a}{x_0+3}x+\frac{2ax_0}{x_0+3}$$

$$\Rightarrow \quad (I)\ \ m=\frac{2a}{x_0+3}=1 \quad \Rightarrow \quad 2a=x_0+3$$

$$(II)\ \ \frac{2ax_0}{x_0+3}=3 \quad \Rightarrow \quad 2ax_0=3x_0+9 \quad \overset{(I)}{\Rightarrow} \quad (x_0+3)\cdot x_0=3x_0+9$$

$$\Rightarrow \quad (x_0+3)x_0=3(x_0+3) \quad \underset{\substack{\uparrow \\ x_0>0}}{/:(x_0+3)} \quad \Rightarrow \quad x_0=3$$

$$(I)\ \ 2a=3+3=6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a=3}$$

ד. משוואת המעגל הראשון היא $(x-3)^2+y^2=9$

$$y_M=3+3=6 \quad \Rightarrow \quad M(3,6)\ ,\ \ R_M=x_M=3 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2+(y-6)^2=9$$

מרכזי שני המעגלים נמצאים על אותו קו אנכי $x=3$. אורכי מחוגיהם שווים $R=3$.

לכן נקודת ההשקה ביניהם תהיה אמצע קטע המרכזים:

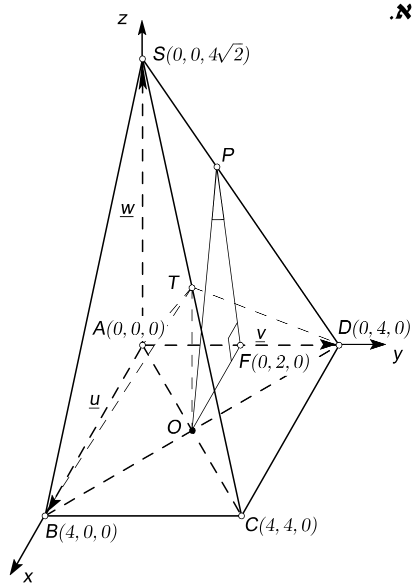
$$M(3,6)\ ,\ \ O(3,0) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3+3}{2},\frac{6+0}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(3,3)}$$

אפשר לפתור גם על־ידי מערכת משוואות:

$$(I)\ \ (x-3)^2+y^2=9$$

$$(II)\ \ (x-3)^2+(y-6)^2=9$$

2. א.



$\vec{SP} = t\cdot \vec{SD}$

$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AS} + \vec{SP} = -\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w} + t\cdot \vec{SD}$

$= -\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w} + t\cdot(-\underline{w} + \underline{v})$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{OP} = -\frac{1}{2}\underline{u} + (t-\frac{1}{2})\underline{v} + (1-t)\underline{w}}$

ב.

וקטור מקביל למישור הוא צירוף ליניארי של שני וקטורים הפורשים את המישור.

$\underline{u}$ ו־ $\underline{w}$ פורשים את מישור SAB .

כדי ש־ $\vec{OP}$ יהיה צירוף ליניארי של $\underline{u}$ ו־ $\underline{w}$ - המקדם של $\underline{v}$ בביטוי שמצאנו צריך להיות 0 .

$\Rightarrow \quad t - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t = \frac{1}{2}}$

ג. (**אבינועם מור**, תל־אביב)

$SA \perp ABCD \quad \Leftarrow$ המישורים SAD , SAB ו־ $ABCD$ מאונכים זה לזה.

$AF = FD \quad \Rightarrow \quad F(0, 2, 0)$

$OF \perp AD \;,\; OF \perp SA \quad \Rightarrow \quad OF \perp SAD \quad \Rightarrow \quad OF \perp PF$

$\angle OPF$ - היא הזווית בין המשופע OP לבין היטל המשופע על מישור SAD, שהוא PF.

$OPF = 45^{\circ} \quad \Rightarrow \quad PF = FO = 2$

$\underline{SD:}\; (0, 0, 4\sqrt{2}) + t(0, 4, -4\sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad (0\;,\; 4t\;,\; 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}t)$ נקודה אופיינית

$F(0, 2, 0) \quad \Rightarrow \quad PF = \sqrt{0^2 + (4t-2)^2 + (4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}t)^2} = 2 \;\; /(\;\;)^2$

$16t^2 - 16t + 4 + 32 - 64t + 32t^2 = 4 \;\; /:16 \quad \Rightarrow \quad 3t^2 - 5t + 2 = 0$

$t_{1,2} = \frac{5\pm 1}{6} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t_1 = 1 \;\;,\;\; t_2 = \frac{2}{3}}$

$t = 1$ כאשר הנקודות P ו־ D מתלכדות, והזווית היא $\angle FDO = 45^{\circ}$.

ד.

$TO \perp ABCD \;\;,\;\; SA \perp ABCD \quad \Rightarrow \quad TO \parallel SA$

$AO = OC \quad \Rightarrow \quad TO = \frac{1}{2}SA = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ קטע אמצעים במשולש

$V = \frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot TO = \frac{4\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V = \frac{32\sqrt{2}}{3} = 15.08}$ **(יחידות קוב)**

3. א. (1)

$a_1 = 1 \;,\; a_2 = iz \;\Rightarrow\; q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{iz}{1} = iz$

$a_3 = a_1{}^2 = 1\cdot(iz)^2 = -z^2 \;\Rightarrow\; a_4 = -z^2\cdot iz = -iz^3 \;\Rightarrow\; a_5 = -iz^3\cdot iz = z^4$

$\Rightarrow\; \mathbf{1 \;,\; iz \;,\; -z^2 \;,\; -iz^3 \;,\; z^4}$

(2)

$S_5 = \frac{a_1(q^5-1)}{q-1} = \frac{1\cdot((iz)^5-1)}{iz-1} = \frac{iz^5-1}{iz-1}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{z^5+i}{z+i} \;\Rightarrow\; \mathbf{S_5 = \frac{z^5+i}{z+i}}\;(\checkmark)$

ב. (1)

$z^5 = -i = 0 - i = 1\cdot cis\,270^\circ \;\Rightarrow\; z = \sqrt[5]{1}\cdot cis\,\frac{270^\circ+360^\circ k}{5}$

$k=0 \;\Rightarrow\; \mathbf{z_1 = cis\,54^\circ} \;,\; k=1 \;\Rightarrow\; \mathbf{z_2 = cis\,126^\circ} \;,\; k=2 \;\Rightarrow\; \mathbf{z_3 = cis\,198^\circ}$

$k=3 \;\Rightarrow\; \mathbf{z_4 = 270^\circ} \;,\; k=4 \;\Rightarrow\; \mathbf{z_5 = cis\,342^\circ}$

(2) הסכום $1+iz-z^2-iz^3+z^4=0$ סכום 5 איבריה הראשונים של הסדרה ההנדסית.
לכן סכומם הוא $S_5 = \frac{z^5+i}{z+i}$ ופתרון המשוואה $S_5 = 0$ שקול לפתרון $z^5+i=0$
למעט הפתרון שמאפס את המכנה $z+i$.
למשוואה זו ישנם ארבעה פתרונות, בהיותה ממעלה רביעית.
את פתרונות המשוואה $z^5+i=0$ מצאנו כבר בתת־הסעיף ב(1).
הפתרון $cia\,270^\circ$ מאפס את המכנה ($=-i$) ולכן הוא נפסל. ולכן:

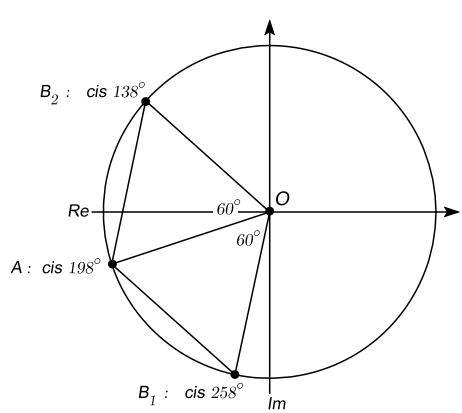
$\mathbf{z_1 = cis\,54^\circ \;,\; z_2 = cis\,126^\circ \;,\; z_3 = cis\,198^\circ \;,\; z_5 = cis\,342^\circ}$

ג.

$z \in III_{quarter} \;\Rightarrow\; 180^\circ < \arg z < 270^\circ \;\Rightarrow\; z = z_3 = cis\,198^\circ$

$A = cis\,198^\circ \;\Rightarrow\; B = cis\,(198^\circ \pm 60^\circ)$

$\Rightarrow\; \begin{array}{l} \mathbf{B_1 = cis\,258^\circ} \\ \mathbf{B_2 = cis\,138^\circ} \end{array}$



4. א.

$f(x) = \ln(x^2 + ax + 1)\ ,\ -2 < a < 2$

$x^2 + ax + 1 > 0\ \ \forall x \iff \underline{\smile} \iff \triangle = a^2 - 4 < 0\ \ \checkmark\ \ \forall\{-2 < a < 2\}$

ב.

$\ln(x^2 + ax + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + ax + 1 = e^0 = 1 \Rightarrow x^2 + ax = 0 \Rightarrow x(x + a) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0\ ,\ x_2 = -a \Rightarrow \mathbf{(0,0)\ ,\ (-a,0)}$

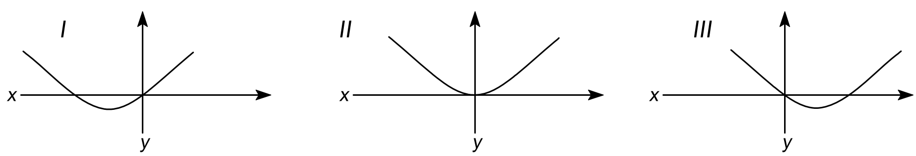
ג.

$\boxed{f'(x) = \frac{2x+a}{x^2+ax+1}} \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 2x + a = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{2}$

x		$-\frac{a}{2}$	
f'	$\frac{-}{+} = -$	0	$\frac{+}{+} = +$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(-\frac{a}{2}) = \ln(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 1) = \ln(1 - \frac{a^2}{4}) \Rightarrow \mathbf{min\ (-\frac{a}{2}, \ln(1 - \frac{a^2}{4}))}$

ד.



$(1)\quad 0 < a < 2 \Rightarrow x_{min} = -\frac{a}{2} < 0 \Rightarrow \mathbf{(1) \leftrightarrow I}$

$(2)\quad -2 < a < 0 \Rightarrow x_{min} = -\frac{a}{2} > 0 \Rightarrow \mathbf{(2) \leftrightarrow III}$

$(3)\quad a = 0 \Rightarrow x_{min} = -\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow \mathbf{(3) \leftrightarrow II}$

ה.

עבור $-2 < a < 0$ הגרף הוא III .

שיעורי x של נקודות החיתוך עם ציר x הם $x = 0$ ו־ $x = -a$.

לכן השטח הנתון (שנמצא מתחת לציר x) הוא

$$\int_0^{-a} -\ln(x^2 + ax + 1) = S \Rightarrow \int_0^{-a} \ln(x^2 + ax + 1) = -S$$

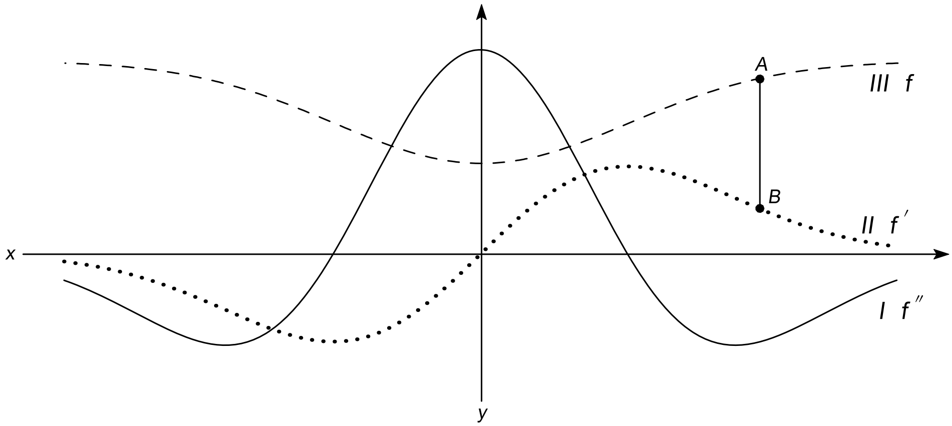
$$\int_0^{-a} \ln(4x^2 + 4ax + 4)\,dx = \int_0^{-a} \ln 4(x^2 + ax + 1)\,dx$$

$$= \int_0^{-a} (\ln 4\,dx + \ln(x^2 + ax + 1))\,dx$$

$$= x \ln 4 \Big|_0^{-a} - S = -a \ln 4 - 0 - S$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\int_0^{-a} \ln(4x^2 + 4ax + 4)\,dx = -a \ln 4 - S}$$

5. א.



לגרפים I ו־ II יש נקודות קיצון. גרף III אינו מתאפס באף לא נקודה אחת.

לכן גרף III אינו יכול להיות נגזרת, ולכן הוא f .

ל־ f יש נקודת קיצון אחת, גרף II מתאפס באותו x יחיד $(x = 0)$ בניגוד לגרף I .

לכן: $\mathbf{f \leftrightarrow III \;,\; f' \leftrightarrow II \;,\; f'' \leftrightarrow I}$

ב.

$$f'(x) = x\cdot e^{-x^2} \quad\Rightarrow\quad f(x) = \int x\cdot e^{-x^2}\,dx \overset{(*)}{=} -\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

$$AB = d(x) = f(x) - f'(x) = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + c - x\cdot e^{-x^2}$$

$$d'(x) = xe^{-x^2} - (e^{-x^2} - 2x^2\cdot e^{-x^2}) = \boxed{e^{-x^2}(2x^2 + x - 1)} \overset{?}{=} 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm 3}{4} \quad\Rightarrow\quad x_1 = \tfrac{1}{2}\ ,\ x_2 = -1$$

x		-1		$\frac{1}{2}$	
d'	$++=+$	0	$+-=-$	0	$++=+$
d	↗	max	↘	min	↗

$$\Rightarrow\quad \mathbf{x_{max} = -1\ ,\ x_{min} = \tfrac{1}{2}}$$

ג.

$$AB_{max} = d(-1) = -\tfrac{1}{2}e^{-1} + c + e^{-1} = c + \tfrac{1}{2}e^{-1} = c + \frac{1}{2e} \underset{\text{נתון}}{=} 1 + \frac{1}{2e} \quad\Rightarrow\quad c = 1$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{f(x) = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + 1}$$

$$(*)\quad -x^2 = u \quad\Rightarrow\quad -2x\,dx = du$$

$$\Rightarrow\quad \int xe^{-x^2}dx = -\tfrac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)\,dx = -\tfrac{1}{2}\int e^u du = -\tfrac{1}{2}e^u + c = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

על־פי הקבלה, אפשר לדעת את שם הקופאית.

דוגמאות שאלות - משרד החינוך

בעקבות בקשות הבהרה של מורים, פרסם משרד החינוך דוגמאות שאלות למבחני בגרות, שאמורות לייצג את רמת הידע הנדרשת ואת רמת המורכבות של השאלות במבחן עצמו.

אנליטית

1. נתון המקום הגאומטרי של הנקודות המקיימות את המשוואה $x(6-x)=y(y+8)$.

א. אפיין את המקום הגאומטרי הנתון (קבע את סוגו: ישר, מעגל, אליפסה, פרבולה).

ב. מזיזים את המקום הגאומטרי הנתון בסעיף א׳ שלוש יחידות שמאלה וארבע יחידות מעלה.

לאחר מכן: מגדילים את שיעור x של כל נקודה על המקום הגאומטרי פי $\frac{4}{3}$.

הראה שהמקום הגאומטרי שמתקבל באופן זה הוא אליפסה ומצא את משוואתו.

ג. הנקודה D נמצאת על האליפסה שאת משוואתה מצאת בסעיף ב.

הנקודות F ו־ G הם מוקדי האליפסה.

מהו היקפו של המשולש DFG? מהו שטחו המקסימלי? הסבר את תשובתך.

ד. האליפסה, שאת משוואתה מצאת בסעיף ב, זהה למקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z המקיימים את הקשר הבא: $|z-n|+|z-m|=\frac{40}{3}$ (m ו־n מספרים ממשיים).

מצא את ערכי m ו־ n .

2. א. מצא משוואת פרבולה $y^2=2px$ ($p>0$ פרמטר),

שמוקדה נמצא על האליפסה $x^2+4y^2=36$. פרט את שיקוליך.

ב. הנקודה P נמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת בסעיף א.

OP הוא מיתר בפרבולה (O ראשית הצירים).

הנקודה Q נמצאת על המיתר OP כך ש: $\frac{PQ}{QO}=\frac{1}{m}$, $m>1$.

הראה שהמקום הגאומטרי של הנקודות Q המתקבלות באופן זה הוא פרבולה,

והבע את משוואתה באמצעות m .

ג. המרחק בין המוקד הימני של האליפסה לבין המוקד של הפרבולה החדשה,

הוא $3\sqrt{3}-4.5$ יחידות אורך.

מצא את ערכו של m אם ידוע ש־ $1<m<6$.

תשובות

1. א. $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ **ב.** אליפסה: $\frac{x^2}{\frac{400}{9}}+\frac{y^2}{25}=1$

ג. היקף: 22.15 (יחידות אורך) , שטח: 22.05 (יחידות ריבועיות) **ד.** $n=\mp\frac{5\sqrt{7}}{3}$, $m=\pm\frac{5\sqrt{7}}{3}$

2. א. $y^2=24x$ **ב.** $y^2=\frac{24m}{1+m}x$ **ג.** $m=3$

3. א.

$$z_1 = r_1 \text{ cis } \alpha \;,\; |z_2| = r_2 \;,\; |z_3| = r_3 \;,\; \{z_1 , z_2\} \in I_Q \;,\; z_3 \in III_Q \;,\; \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = ?$$

ממיקום המספרים ברביעים הנתונים, ועל ישר אחד:

$$\arg(z_1) = \arg(z_2) \;,\; z_1 \neq z_2 \;\Rightarrow\; r_1 \neq r_2 \;,\; z_2 = r_2 \text{ cis } \alpha \;,\; z_3 = r_3 \text{ cis } (\alpha + 180^\circ)$$

$$z_3 = r_3 \text{ cis } (\alpha + 180^\circ) = r_3 (-\cos\alpha - i \sin\alpha) = -r_3 \text{ cis } \alpha$$

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_1 \text{ cis } \alpha - (-r_3 \text{ cis } \alpha)}{r_2 \text{ cis } \alpha - (-r_3 \text{ cis } \alpha)} = \frac{\text{cis } \alpha\, (r_1 + r_3)}{\text{cis } \alpha\, (r_2 + r_3)} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3}}$$

ב. (I) $z_1^7 = z_3^7 = -128$.

למשוואה יש 7 פתרונות שונים, המהווים סדרה הנדסית, והם גם קדקודי משובָּע משוכלל.

מספר הקדקודים אינו זוגי, ולכן אין אלכסון שעובר דרך ראשית הצירים, בניגוד לנתון.

נראה גם בדרך חישובית:

$$z_1^7 = -128 \;\Rightarrow\; r_1^7 = 128 = 2^7 \;,\; \text{cis } 7\alpha = -1 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{7} = 25\tfrac{5}{7}^\circ + 51\tfrac{3}{7}^\circ k$$

$$z_3^7 = -128 \;\Rightarrow\; r_3^7 = 128 = 2^7 \;,\; z_3 = -r_3 \text{ cis } 7\alpha \;\Rightarrow\; -\text{cis } 7\alpha = -1$$

$$\Rightarrow\; \text{cis } 7\alpha = 1 \;\Rightarrow\;\Rightarrow\; \alpha = \frac{0^\circ + 360^\circ k}{7} = 51\tfrac{3}{7}^\circ k \neq 25\tfrac{5}{7}^\circ + 51\tfrac{3}{7}^\circ k \;\Rightarrow\; \underline{\times}$$

(II) $z_1^4 = z_3^4 = 64$.

למשוואה זו 4 פתרונות שונים, המהווים סדרה הנדסית, והם גם קדקודי ריבוע.

כל הפתרונות מונחים על הצירים $(0, \pm\sqrt{8})$, $(\pm\sqrt{8}, 0)$, בניגוד לנתון $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

בדרך חישובית:

$$z_1^4 = 64 \;\Rightarrow\; r_1^4 = 64 \;,\; \text{cis } 4\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{0^\circ + 360^\circ k}{4} = 90^\circ k$$

$$z_3^4 = 64 \;\Rightarrow\; r_3^4 = 64 \;,\; z_3 = -r_3 \text{ cis } 4\alpha \;\Rightarrow\; \text{cis } 4\alpha = -1$$

$$\Rightarrow\; \alpha = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{4} = 45^\circ + 90^\circ k \neq 90^\circ k \;\Rightarrow\; \underline{\times}$$

(III) $z_1^8 = z_3^8 = -8 - 8\sqrt{3}\, i$.

למשווה זו יש 8 פתרונות שונים, המהווים סדרה הנדסית, והם גם קדקודי מתומן משוכלל.

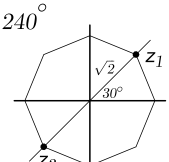
לפחות אחד הפתרונות נמצא ברביע I ולפחות אחד הפתרונות נמצא ברביע III .

כל האלכסונים של קדקודים נגדיים נחתכים בראשית הצירים, ולכן משוואה זו מתאימה.

בדרך חישובית:

$$\underline{-8 - 8\sqrt{3}\, i :}\; \text{tg } \theta = \frac{-8\sqrt{3}}{-8} = \sqrt{3} = \text{tg } 60^\circ \;,\; (-,-) \;\Rightarrow\; \theta = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$$

$$r = \sqrt{64 + 192} = 16 \;\Rightarrow\; r_1^8 = r_3^8 = 16 \;\Rightarrow\; -8 - 8\sqrt{3}\, i = 16 \text{ cis } 240^\circ$$

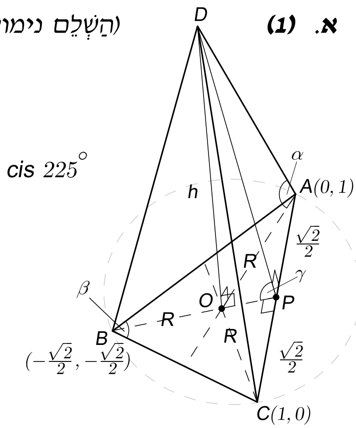


$$z_1^8 = (r_1 \text{ cis } \alpha)^8 = r_1^8 \text{ cis } 8\alpha = 16 \text{ cis } 240^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 30^\circ$$

$$z_3^8 = (-r_3 \text{ cis } \alpha)^8 = (-r_3)^8 \text{ cis } 8\alpha = 16 \text{ cis } 240^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 30^\circ \;\Rightarrow\; \checkmark$$

4. א. (1)

(הַשְׁלֵם נימוקים . . .)



$$a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \;\;,\;\; r = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$tg\,\theta = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 = tg\,45^\circ$$

$$(-,-) \;\Rightarrow\; arg\,(a_2) = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ \;\Rightarrow\; a_2 = cis\;225^\circ$$

$$a_1 = i = cis\;90^\circ \;\Rightarrow\; = \frac{cis\;225^\circ}{cis\;90^\circ} = cis\;135^\circ$$

$$a_n = cis\;90^\circ \cdot (cis\;135^\circ)^{n-1}$$

$$\Rightarrow\; a_n = cis\;(90^\circ + (n-1)\cdot 135^\circ)$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \;....\; \cdot a_{15} = cis\;90^\circ \cdot cis\;225^\circ \cdot cis\;(225^\circ + 135^\circ) \cdot \;....\; \cdot cis\;(90^\circ + 14 \cdot 135^\circ)$$

$$= cis\;(90^\circ + 225^\circ + \;...\; + 1980^\circ) = cis\;\frac{15}{2}(90^\circ + 1980^\circ) = cis\;15{,}525^\circ \underset{\uparrow\atop -360^\circ\cdot 43}{=} \boldsymbol{cis\;45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i}$$

(2)

$$a_1 = a_n = a_1 q^{n-1} \iff q^{n-1} = 1 \iff cis^{n-1}\;135^\circ = cis\;(n-1)135^\circ = cis\;360^\circ k \;\;,\;\; k \in N$$

$$(n-1)135^\circ = 360^\circ k \;\;/:45^\circ \;\Rightarrow\; 3(n-1) = 8k \;\Rightarrow\; n = \frac{8k}{3} + 1 \;\Rightarrow\; k = 3 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{n = 9}$$

ב. (1)

$$a_1 = i \;\Rightarrow\; \underline{A(0,1)} \;\;,\;\; a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \;\Rightarrow\; \underline{B(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$a_3 = a_2 \;\; = cis\;225^\circ \cdot cis\;135^\circ = cis\;(225^\circ + 135^\circ) = cis\;360^\circ = 1 \;\Rightarrow\; \underline{C(1,0)}$$

$$\underline{y_{AC}:}\;\; m = \frac{1}{-1} = -1 \;\;,\;\; y = -1(x-1) \;\Rightarrow\; y = -x + 1 \;\equiv\; x + y - 1 = 0$$

$$BP = h_b = \frac{|-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \;\;,\;\; AC = \;...\; = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

<u>אפשר גם:</u>

$$AB = BC = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$cos\,\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2(2+\sqrt{2}) - 2}{2 \cdot (2+\sqrt{2})} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; \beta = 45^\circ$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}^{\,2}\; sin\;45^\circ}{2} = \frac{(2+\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$h = 2 \;\Rightarrow\; V_{piramid} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2} \cdot 2}{3} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{piramid} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} = 0.8047}$$ (יחידת קוב)

(2)

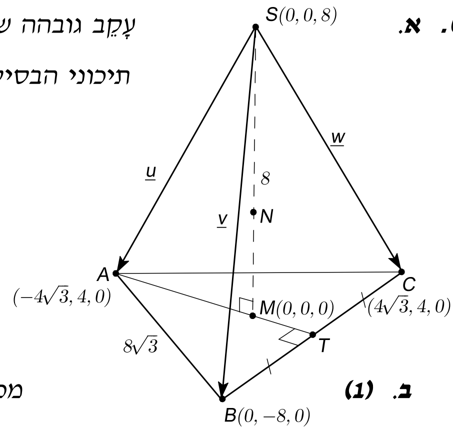
$$\frac{AC}{sin\;\beta} = \frac{\sqrt{2}}{sin\;45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 = 2R \;\Rightarrow\; R = 1$$

$$\underline{\triangle DOA:}\;\; tg\;\alpha = \frac{DO}{OA} = \frac{h}{R} = \frac{2}{1} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\alpha = 63.43^\circ}$$

(3)

$$\underline{\triangle DOA:}\;\; DA = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \;\;,\;\; \underline{\triangle DPA:}\;\; DP = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{\triangle DOP:}\;\; sin\;\gamma = \frac{DO}{DP} = \frac{2}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{= 70.53^\circ}$$



6. א. עָקֵב גובהה של פירמידה משולשת, ישרה ומשוכללת (M) הוא מפגש

תיכוני הבסיס (שהם גם הגבהים, וחוצי הזוויות). לכן: $AM = \frac{2}{3}AT$

$\vec{SN} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \frac{1}{4}\underline{w}$

$\vec{SM} = \vec{SA} + \frac{2}{3}\vec{AT} = \vec{SA} + \frac{2}{3}(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC})$

$= \underline{u} + \frac{2}{3}(-\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}(-\underline{v} + \underline{w})) = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$

$= \frac{4}{3}(\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \frac{1}{4}\underline{w}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{SM} = \frac{4}{3}\vec{SN}} \ (\checkmark)$

ב. (1) מכיון שהפירמידה ישרה ומשוכללת,

כל הפאות הצדדיות חופפות זו לזו.

לכן כל המקצועות הצדדיים שווים זה לזה ($|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}|$),

וכל הזוויות שבין כל שני מקצועות צדדים - שוות זו לזו ($\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA$) :

$|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha_1 = |\underline{u}|\cdot|\underline{w}|\cdot\cos\alpha_2 = |\underline{v}|\cdot|\underline{w}|\cdot\cos\alpha_3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{u}\cdot\underline{w} = \underline{v}\cdot\underline{w}} \ (\checkmark)$

(2)

$\vec{SC}\cdot\vec{AB} = \underline{w}\cdot(-\underline{u} + \underline{v}) = \underline{v}\cdot\underline{w} - \underline{u}\cdot\underline{w} \ , \ \underline{v}\cdot\underline{w} = \underline{u}\cdot\underline{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{SC}\cdot\vec{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{SC} \perp \vec{AB}} \ (\checkmark)$

$\vec{SA}\cdot\vec{BC} = \underline{u}\cdot(-\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u}\cdot\underline{w} - \underline{u}\cdot\underline{v} \ , \ \underline{u}\cdot\underline{w} = \underline{u}\cdot\underline{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{SA}\cdot\vec{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{SA} \perp \vec{BC}} \ (\checkmark)$

ג. $\underline{u} = (-4\sqrt{3}\ ,\ 4\ ,\ -8) \ , \ \underline{v} = (0\ ,\ -8\ ,\ -8) \ , \ \underline{w} = (4\sqrt{3}\ ,\ 4\ ,\ -8) \ , \ C(4\sqrt{3}, 4, 0)$

$\vec{SC} = \underline{C} - \underline{S} = (4\sqrt{3}\ ,\ 4\ ,\ 0) - \underline{S} = \underline{w} = (4\sqrt{3}\ ,\ 4\ ,\ -8) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S(0\ ,\ 0\ ,\ 8)}$

$\vec{SA} = \underline{A} - \underline{S} = \underline{A} - (0\ ,\ 0\ ,\ 8) = \underline{u} = (-4\sqrt{3}\ ,\ 4\ ,\ -8) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A(-4\sqrt{3}\ ,\ 4\ ,\ 0)}$

$\vec{SB} = \underline{B} - \underline{S} = \underline{B} - (0\ ,\ 0\ ,\ 8) = \underline{v} = (0\ ,\ -8\ ,\ -8) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B(0\ ,\ -8\ ,\ 0)}$

$\vec{SM} = \underbrace{\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}}_{\text{חישוב}} = (0\ ,\ 0\ ,\ -8) = \underline{M} - \underline{S} = \underline{M} - (0\ ,\ 0\ ,\ 8) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M(0\ ,\ 0\ ,\ 0)}$

$|\vec{AB}| = |(4\sqrt{3}\ ,\ -12\ ,\ 0)| = \sqrt{48 + 144} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{(8\sqrt{3})^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{192 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 48\sqrt{3}$

$|\vec{SM}| = |(0, 0, -8)| = 8 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{48\sqrt{3} \cdot 8}{3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V = 128\sqrt{3}}$ **(יחידות קוב)**

ד. מישור ABS נפרש על־ידי $\underline{u}$ ו־ $\underline{v}$ ומצאנו גם ש־ $S(0,0,8)$:

$\underline{x} = (0,0,8) + t_1(-4\sqrt{3}, 4, -8) + s_1(0, -8, -8) = (0,0,8) + t(\sqrt{3}, -1, 2) + s(0, 1, 1)$

$(a,b,c)\cdot(0,1,1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -c \ , \ \underbrace{b = 1}_{\text{בחירה}} \quad \Rightarrow \quad c = -1$

$(a,b,c)\cdot(\sqrt{3}, -1, 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a\sqrt{3} - b + 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad a\sqrt{3} - 1 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$ABS: \ \sqrt{3}x + y - z + d = 0 \ , \ (0,0,8) \quad \Rightarrow \quad -8 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 8 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sqrt{3}x + y - z + 8 = 0}$

7. א.

$f(x)=\frac{\ln^n x}{x} \quad , \quad (x>0)\cap(x\neq 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x>0}$

$y=0 \quad \Rightarrow \quad \ln x=0 \quad \Rightarrow \quad x=e^0=1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(1,0)}$

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln^n x}{x}=\frac{(-\infty)^n}{+0} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} n_{odd}: & \frac{-\infty}{+0}=-\infty \\ n_{even}: & \frac{+\infty}{+0}=+\infty \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_{\leftarrow}=0}$

ב.-ג.

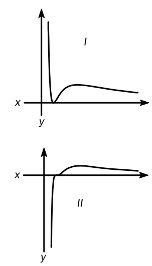
$f'(x)=\frac{n\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln^n x}{x^2}=\boxed{\frac{\ln^{n-1}x\cdot(n-\ln x)}{x^2}}=0$

$(1)\quad \ln^{n-1}x=0 \quad \Rightarrow \quad \ln x=0 \quad \Rightarrow \quad x=e^0=1$

$(2)\quad n-\ln x=0 \quad \Rightarrow \quad \ln x=n \quad \Rightarrow \quad x=e^n$

x		0		1		e^n	
f'	n_{even}		$\frac{-+}{+}=-$	0	$\frac{++}{+}=+$	0	$\frac{+-}{+}=-$
	n_{odd}		$\frac{++}{+}=+$	0	$\frac{++}{+}=+$	0	$\frac{+-}{+}=-$
f	n_{even}		↘	min	↗	max	↘
	odd		↗	infl.	↗	max	↘

$\Rightarrow \quad \mathbf{I \longleftrightarrow n_{even}} \qquad \mathbf{II \longleftrightarrow n_{odd}}$



מהטבלה: **עבור n זוגי - שני ערכי קיצון , עבור n אי־זוגי - ערך קיצון יחיד.**

אפשר גם: עבור n זוגי - $f(x)\geq 0$ לכל $x>0$. לכן $(1,0)$ היא נקודת מינימום.

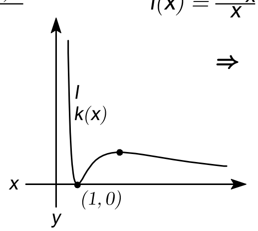
פולינום 'חזק' מלוג, לכן המכנה 'יגדל' מהר יותר ולכן הגבול הוא $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}=0$

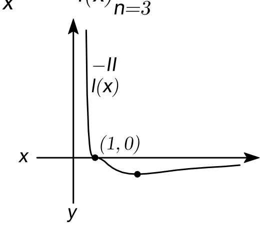
$\Leftarrow$ אסימפטוטה אופקית $y_{\rightarrow}=0$ $\Leftarrow$ הגרף יורד לכיוון ציר x $\Leftarrow$ קיצון נוסף: max.

ד.

$k(x)=\frac{\ln^2\frac{1}{x}}{x}=\frac{\ln^2 x^{-1}}{x}=\frac{(-\ln x)^2}{x}=\frac{\ln^2 x}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k(x)\in I}$

$l(x)=\frac{\ln^3\frac{1}{x}}{x}=\frac{-\ln^3 x}{x}=-\frac{\ln^3 x}{x}=-f(x)_{n=3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{l(x)\in -II}$





ה. הפונקציות $g(x)=\frac{\ln^2(x-1)}{x-1}$ ו־ $h(x)=\frac{\ln^3(x-1)}{x-1}$ הן העתקה של שֶׁנֶת אחת ימינה של $f(x)$ עבור $n=2$ ו־ $n=3$, לכן גודל השטח אינו משתנה.

שיעורי x של נקודות החיתוך:

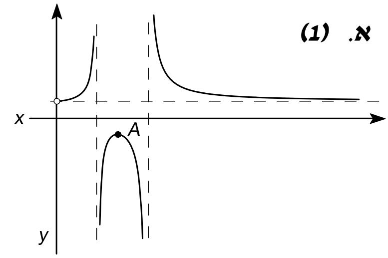
$\frac{\ln^2 x}{x}=\frac{\ln^3 x}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln^2 x=\ln^3 x \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \ln x=0 & \Rightarrow & x=1 \\ \ln x=1 & \Rightarrow & x=e \end{matrix}$

$S\overset{(1)}{=}\int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{\ln^3 x}{x}\right)dx\overset{(2)}{=}\left(\frac{\ln^3 x}{3}-\frac{\ln^4 x}{4}\right)\Big|_1^e=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S=\frac{1}{12}}$ **(יחידה ריבועית)**

$(1)\quad \ln^2 x>\ln^3 x \ \forall\ \{1<x<e\}$

$(2)\quad \int \ln^2 x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\int u^2\,du=\frac{u^3}{3}+c=\frac{\ln^3 x}{3}+c \quad . \quad$ באופן דומה: $\int\frac{\ln^3 x}{x}\,dx=\frac{\ln^4 x}{4}+c$

8. א. (1)



$$f(x)=\frac{\ln^2 x+a^2}{\ln^2 x-a^2}\quad,\quad \underline{x>0}\quad,\quad \ln^2 x\neq a^2\quad\Rightarrow\quad \ln x\neq \pm a$$

$$\Rightarrow\quad \underline{x\neq e^{\pm a}}$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{\cancel{\ln^2 x}\,(1+\frac{a^2}{\ln^2 x})}{\cancel{\ln^2 x}\,(1-\frac{a^2}{\ln^2 x})}=\frac{1+0}{1-0}=1\quad\Rightarrow\quad (0,1)$$

׳חור׳ (אי־רציפות סליקה)

על־פי הציור: $\Rightarrow\quad \boldsymbol{y_{\to}=1\ ,\ x=e^{a}\ ,\ x=\frac{1}{e^{a}}}$

(2)

$$f'(x)=\frac{\frac{2\ln x}{x}(\ln^2 x-a^2)-\frac{2\ln x}{x}(\ln^2 x+a^2)}{(\ln^2 x-a^2)^2}=\frac{-4a^2\ln x}{x\,(\ln^2 x-a^2)^2}\overset{?}{=}0\quad\Rightarrow\quad \ln x=0\quad\Rightarrow\quad x=e^0=1$$

$$f(1)=\frac{a^2}{-a^2}=-1\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{A\ (1,-1)}$$

ב. $g(x)=\frac{\ln^2 x-a^2}{\ln^2 x+a^2}$ המכנה שונה מ־ 0 לכל $x>0$ שהוא תחום ההגדרה של $g(x)$.

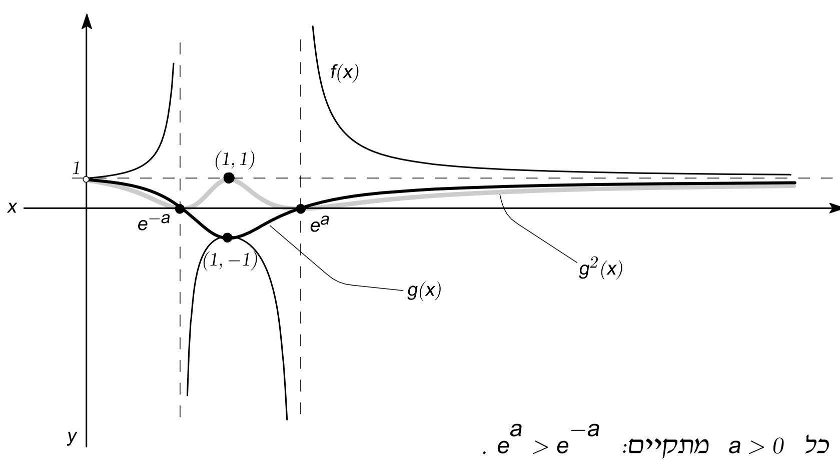
המונה מתאפס עבור $x=e^{\pm a}$, שב־ $f(x)$ הוא ׳ייצר׳ את האסימפטוטות האנכיות.

אסימפטוטה אופקית $y=1$ ב־ $+\infty$ אינה משתנה, מאותו חישוב הגבול.

$max\ (1,-1)$ עבור $f(x)$ נהפך ל־ $min\ (1,-1)$ עבור $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

$g^2(x)$ מתנהגת כמו $g(x)$ לגבי תחומי עליה / ירידה / שיעורי x של נקודות קיצון,

חוץ מאשר בתחום שבו $g(x)<0$ שאז עליה הופכת לירידה ולהיפך - כמובן מעל ציר x .



ג. עבור כל $a>0$ מתקיים: $e^{a}>e^{-a}$.

$$S_{rectangle}=(e^{a}-a^{-a})\cdot 1=e\quad\Rightarrow\quad e^{a}-\frac{1}{e^{a}}-e=0\ \ /\cdot e^{a}$$

$$\Rightarrow\quad (e^{a})^2-e\cdot e^{a}-1=0\quad\Rightarrow\quad (e^{a})_{1,2}=\frac{e\pm\sqrt{e^2+4}}{2}$$

$$e^{a}>0\quad\Rightarrow\quad e^{a}=\frac{e+\sqrt{e^2+4}}{2}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a=\ln\frac{e+\sqrt{e^2+4}}{2}=1.114}$$

על פי הקבלה, אפשר לדעת את שם ה

9. א. (1)-(2)-(3)

$\boxed{f(x)=e^{x}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}}\ ,\ \forall x$

$$f'(x)=e^{x}\cdot x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cdot e^{x}=e^{x}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\left(x+\frac{2}{3}\right)=\boxed{\frac{e^{x}\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\sqrt[3]{x}}}\overset{?}{=}0\quad\Rightarrow\quad x=-\frac{2}{3}$$

עבור $x=0$ הנגזרת אינה מוגדרת (ולכן יש לה שם אסימפטוטה אנכית), אבל <u>משנה</u> סימן:

$$f(0)=1\cdot 0=0\ \ ,\ \ f\left(-\frac{2}{3}\right)=e^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=0.39$$

x		$-\frac{2}{3}$		0	
f'	$\frac{+-}{-}=+$	0	$\frac{++}{-}=-$	$\emptyset$	$\frac{++}{+}=+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

max $\left(-\frac{2}{3},0.39\right)$, **min** $(0,0)$

$\Rightarrow$ $\nearrow$: $\left(x<-\frac{2}{3}\right)\cup(x>0)$

$\searrow$: $-\frac{2}{3}<x<0$

$\boxed{g(x)=e^{x}\cdot\sqrt[3]{x}}\ ,\ \forall x$

$$g'(x)=e^{x}\cdot x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot e^{x}=e^{x}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\left(x+\frac{1}{3}\right)=\boxed{\frac{e^{x}\left(x+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt[3]{x^{2}}}}=0\quad\Rightarrow\quad x=-\frac{1}{3}$$

עבור $x=0$ הנגזרת אינה מוגדרת (ולכן יש לה שם אסימפטוטה אנכית), <u>ואינה משנה</u> סימן:

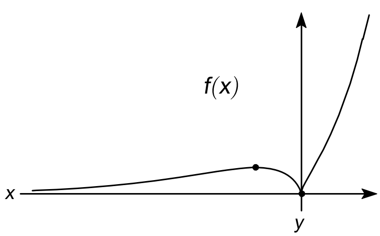
$$g(0)=0\ \ ,\ \ g\left(-\frac{1}{3}\right)=e^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=-0.497$$

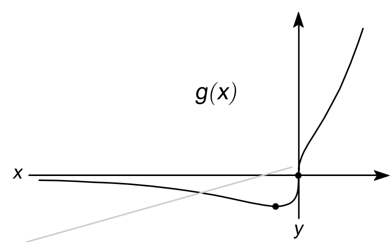
x		$-\frac{1}{3}$		0	
g'	$\frac{+-}{+}=-$	0	$\frac{++}{+}=+$	$\emptyset$	$\frac{++}{+}=+$
g	$\searrow$	min	$\nearrow$	infl.	$\nearrow$

min $\left(-\frac{1}{3},-0.497\right)$

$\Rightarrow$ $\searrow$: $x<-\frac{1}{3}$

$\nearrow$: $x>-\frac{1}{3}$





ב. גם f' וגם g' אינן מוגדרות עבור $x=0$. לכן הגרפים I ו־ III נפסלים.

לגרפים II ו־ IV אסימפטוטות אנכיות עבור $x=0$ - מתאים גם ל־ f וגם ל־ g .

בגרף II הנגזרת מתאפסת ומשנה את סימנה בשתי נקודות. אחת מהן כש־ $x=0$ ושם היא אינה מוגדרת, מה שמתאים לשתי נקודות קיצון, כמו שיש ל־ $f(x)$ $\Leftarrow$ **<u>$f\longleftrightarrow II$</u>** .

בגרף IV הנגזרת מתאפסת בנקודה אחת בלבד, משנה בה את סימנה ואינה משנה את סימנה $(+)$ בשאר התחום. לכן לפונקציה הקדומה יש נקודת קיצון אחת בלבד.

עבור $x=0$ הפונקציה עולה, הנגזרת אינה מוגדרת $\Leftarrow$ פיתול אנכי כמתואר $\Leftarrow$ **<u>$g\longleftrightarrow IV$</u>** .

ג.

$$h(x)=\frac{1}{e^{f(x)}}\ \ ,\ \ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{f(x)}}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0\quad\Rightarrow\quad y_{\rightarrow}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{f(x)}}=\frac{1}{e^{0}}=\frac{1}{1}=1\quad\Rightarrow\quad y_{\leftarrow}=1$$

10. א. נוסחת הגידול/דעיכה: $m_t = m_0 \cdot q^t$ כאשר: t - זמן , m_0 - כמות ראשונה

m_t - כמות לאחר t יחידות זמן , $q = 1 \pm \frac{p}{100}$, p - אחוז הגידול/דעיכה

$A = a \;,\; B = b \;,\; m_{0_A} = k \;,\; m_{0_B} = 5k \;,\; t = 3$

נתון: $(I)\;\; L = k \cdot a^3 \;\;,\;\; (II)\;\; \frac{5}{8}L = 5k \cdot b^3$

$$(II):(I) \;\Rightarrow\; \frac{5}{8} = \frac{5b^3}{a^3} \;\Rightarrow\; a^3 = 8b^3 \;\; / \sqrt[3]{} \;\Rightarrow\; a = 2b$$

$$(III)\;\; k \cdot a^x = 5k \cdot b^x \;\Rightarrow\; (2b)^x = 5b^x \;\Rightarrow\; 2^x b^x = 5b^x \;\Rightarrow\; 2^x = 5$$

$$\Rightarrow\; \ln 2^x = \ln 5 \;\Rightarrow\; x \ln 2 = \ln 5 \;\Rightarrow\; x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \;\Rightarrow\; \mathbf{x = 2.32_{hours}}$$

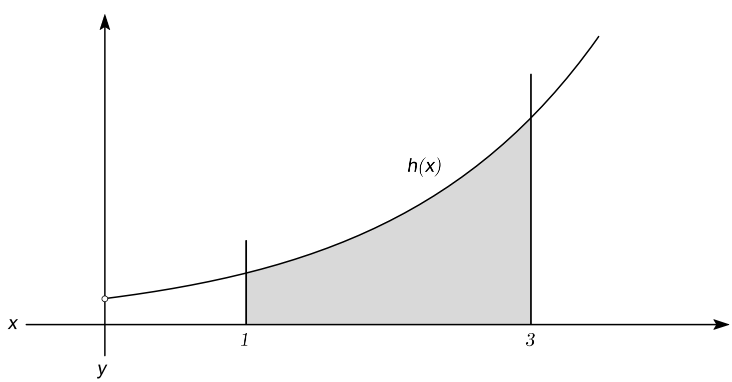
ב. (1)-(2)

$$f(x) = k \cdot a^x \;\Rightarrow\; \mathbf{f(x) = k \cdot (2b)^x \;\;,\;\; g(x) = 5k \cdot b^x}$$

ג.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{k \cdot (2b)^x}{5k \cdot b^x} = \frac{2^x b^x}{5b^x} \;\Rightarrow\; h(x) = \frac{2^x}{5}$$

$$h'(x) = \frac{2^x \ln 2}{5} > 0 \;\; \forall \{x > 0\} \;\Rightarrow\; h(x)\nearrow \;\; \forall \{x > 0\}$$



$$S = \int_1^3 \frac{1}{5} \cdot 2^x \, dx = \left. \frac{2^x}{5 \ln 2} \right|_1^3 = \frac{2^3}{5 \ln 2} - \frac{2^1}{5 \ln 2} \;\Rightarrow\; \mathbf{S = \frac{6}{5 \ln 2} = 1.73}$$ **(יחידות ריבועיות)**

> *יוסי גמזו כתב לשלישיית גשר הירקון את השיר 'סימן שאתה צעיר' (מי שזוכר - סימן שהוא כבר אינו צעיר . . .).*
> *אחת השורות בשיר זה היא: 'אם יש לך זהב בלב וְלֹא בֵּין הַשִּׁינַּיִם - סימן שאתה צעיר'.*
> *כל פעם שאני שומע שורה זו, מזמם לי בראש: 'אם יש לך זהב בלב וְלֹבֶן בַּשִּׁינַּיִם' . . .*

סימנים מתמטיים המופיעים בספר

$\cup$ - איחוד, היחס 'או'. דוגמה: התחום $x < 2$ או $x > 9$ ייכתב כך: $(x < 2) \cup (x > 9)$

$\cap$ - חיתוך, היחס 'וגם'. דוגמה: התחום $x < 8$ וגם $x > 1$ הוא התחום: $1 < x < 8$.
נרשום זאת כך: $\underline{1 < x < 8}$ $\Rightarrow$ $(x > 1) \cap (x < 8)$.

$(\surd)$ - מופיע בדרך כלל בסוף הוכחה כאישור למש"ל (מה שהיה להוכיח), או כאישור לבדיקת נתון.

$\in$ - שייכות. דוגמה: $x \in [1,9]$ כלומר: x שייך לקטע הסגור $[1,9]$ או: $1 \le x \le 9$
דוגמה: $(1,2) \notin y_{CD}$ כלומר: הנקודה $(1,2)$ אינה על הישר העובר דרך C ו־ D .

$\forall$ - לכל. דוגמה: תחום הגדרה: $\forall x$. כלומר: תחום ההגדרה הינו עבור כל x ממשי.

דוגמה: $\frac{(x-1)^2}{x^6} > 0 \quad \forall \{x \ne 0 \ , \ x \ne 1\}$

משמעות הסימון: הביטוי $\frac{(x-1)^2}{x^6}$ גדול מ־ 0 לכל x השונה מ־ 0 ושונה מ־ 1 .

פתרון משוואה ריבועית מוצג בקיצור באופן הבא (לדוגמה): $6x^2 - x - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 19}{12} = \ . \ . \ .$
זאת - מתוך הנחה שהתלמיד בשאלון זה שולט בביצוע $\sqrt{\triangle}$ ובבדיקת החישוב.

'ללא הגבלת הכלליות' - קביעת ערך מייצג, במקום פרמטר (שאמור להצטמצם בהמשך). למשל, אם יש למצוא גודל זווית לפי יחסי צלעות, ניתן לקבוע אורך אחת מהן ב־1 (יחידת אורך אחת, או כל ערך אחר).

$\emptyset$ - קבוצה ריקה. למשל: $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-5}}{3} = \emptyset$ כלומר: למשוואה הריבועית הנתונה אין פתרון

ep. - end point נקודות קצה של תחום סגור הן נקודות קיצון חד־צדדיות (אלא אם כן הפונקציה בסביבה החד־צדדית של הנקודה היא קבועה). למשל: $(5,6)$: min_{ep}.

ab. - absolute סימון של נקודת קיצון מוחלטת בתחום סגור. למשל: $(-7,11)$: max_{ab}.

ext. - extreme קיצון.

cm^2 - סמ"ר , **cm^3** - סמ"ק , **asym.** - אסימפטוטה , **infl.** - פיתול (inflection)

$\nearrow$ - עליה , $\searrow$ - ירידה , למשל: $f \nearrow \forall x > 6$ - המשמעות: הפונקציה f(x) עולה בתחום $x > 6$

$\smile$ - קעירות (קעירות כלפי מעלה) , $\frown$ - קמירות (קעירות כלפי מטה).

$x \to a+$ - שאיפה ל־ a מימין , למשל: '$x \to 0+$' הכוונה היא לשאיפה $0.1, 0.01, 0.001 \ . \ . \ .$
$x \to a-$ - שאיפה ל־ a משמאל , למשל: '$x \to 0-$' הכוונה היא לשאיפה $0.9, 0.99, 0.999 \ . \ . \ .$

lim - קיצור של limit, גבול.
למשל: $\lim\limits_{x \to \infty}(x) = 5$: הגבול של f(x) כאשר x 'שואף' ל־ ∞ הוא 5 (אסימפטוטה אופקית: $y = 5$).

$y_{\to} = k$ - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית בכיוון $+\infty$ בלבד.
$y_{\leftarrow} = k$ - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית בכיוון $-\infty$ בלבד.

<u>ללא הגבלת הכלליות</u> - הסבר

כשצריך למצא יחסים בין חלקים שונים ללא נתוני גודלם, מסמנים בדרך כלל, את גודל אחד החלקים בפרמטר, נניח a, ואת החלקים האחרים בהתאם ליחס שלהם לפרמטר שקבענו.

במקרים כאלה ניתן לקבוע מספר (במקום פרמטר) שנח לנו לעבוד איתו ולציין: 'ללא הגבלת הכלליות', שזה אומר שאותו גודל שקבענו הוא מקרה פרטי המתאים גם לכל גודל אחר.

<u>דוגמה:</u> אורך אחד הניצבים במשולש ישר־זווית גדול פי שלושה מאורך הניצב האחר.

פי כמה גדול אורך היתר מאורך הניצב הקטן?

<u>פתרון:</u> ברור מנוסח השאלה שלא משנה מהם אורכי צלעות המשולש אלא רק היחס ביניהם.

נסמן את אורך הניצב הקטן ב־a . מכאן שאורך הניצב הגדול הוא $3a$.

נפעיל את משפט פיתגורס ואז אורך היתר הוא:

$$\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10a^2}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{a^2}=a\sqrt{10}$$

ולכן היתר גדול מהניצב הקטן פי $\sqrt{10}=\frac{\cancel{a}\sqrt{10}}{\cancel{a}}$.

בפתרון זה היינו רשאים לקבוע את אורך הניצב הקטן כ־1 (ולציין: 'ללא הגבלת הכלליות').

לכן אורך הניצב הגדול היה 3 ואורך היתר היה $\sqrt{10}$. היחס שהיה מתקבל הוא בדיוק אותו יחס.

אם היינו קובעים את אורך הניצב הקטן כ־ 8. אורך הניצב הגדול היה 24. אורך היתר היה $24\sqrt{10}$,

והיחס המבוקש היה בדיוק אותו יחס - $\sqrt{10}=\frac{24\sqrt{10}}{24}$.

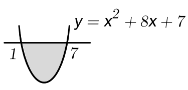
מכאן שניתן לבחור במקרים כאלה את אורך אחד הגדלים לנוחותנו ומשם להמשיך בפתרון.

'פטנט' זה מאושר לשימוש בפתרון מבחני הבגרות על־ידי משרד החינוך.

<u>שינוי גבולות אינטגרציה בחישוב שטח</u> - הסבר

חישוב שטח בין גרף פונקציה לבין ציר x הנמצא מתחת לציר x נותן ערך שלילי.

השטח הינו הערך המוחלט של אותו ערך שקיבלנו.



ישנן מספר אפשרויות כדי לקבל את הערך הנכון.

1. סימון כל הביטוי בערך מוחלט:

$$S=\left|\int_1^7(x^2+8x+7)\,dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}+4x^2+7x\right)\Big|_7^1\right|=$$

$$\left|\left(\frac{1}{3}+4+7\right)-\left(\frac{343}{3}+98+49\right)\right|=\left|11\frac{1}{3}-261\frac{1}{3}\right|=|-250|=250$$

2. הצמדת מינוס לביטוי:

$$S=-\int_1^7(x^2+8x+7)\,dx=\ ...\ =-(-250)=250$$

3. הפיכת גבולות האינטגרציה (לשם כך התכנסנו . . .):

$$S=\int_7^1(x^2+8x+7)\,dx=\ ...\ =261\frac{1}{3}-11\frac{1}{3}=250$$

סיווג שאלות המבחנים - חלק א

*סוגריים מרובעים - מספר העמוד, שאר המספרים - מספרי השאלות. את הסיווג הכין **שרון חיים**.*

גידול ודעיכה [1]

הסיווג לפי הפרמטר הנדרש לחישוב בסעיף הראשון של השאלה

- מצב התחלתי
1, 14
- זמן
2, 4, 5, 6, 7
- קצב גידול/דעיכה
3, 8, 11, 12
- מצב סופי
9, 10, 13
- זמן מחצית החיים
1, 4, 11, 13
- הבעה באמצעות פרמטר
2

מספרים מרוכבים [42]

הגדרות וטכניקה אלגברית

- מספר מדומה טהור
26
- מספר הופכי
21
- מספר צמוד
1, 3, 4, 15, 20, 22, 27
- ערך מוחלט
2, 12, 13, 15, 17, 24, 27
- משוואות מרוכבות
1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 15, 16, 20, 21, 22, 25, 27
- משוואות מרוכבות, הבעה באמצעות פרמטר
8, 14, 23

מישור גאוס

- קו ישר
23, 24
- שני ישרים מאונכים
26
- משולש
12
- משולש שווה-צלעות
22
- מעוין
18
- ריבוע
5
- מעגל
11
- מעגל היחידה
4, 15, 19
- משולש שווה-צלעות חסום במעגל היחידה
4
- ריבוע חסום במעגל
6
- מקומות גאומטריים
13, 21
- שרטוט סקיצה, מקום גאומטרי
27

בשילוב סדרות

- סדרה הנדסית
1, 2, 11

באחד הימים, כשעבדתי בגינה שלי, השכנים שלי, שחזרו מטיול עם כלבם, עצרו לפטפט איתי.

תוך כדי שיחה ידידותית, שאלתי את ביתם בת ה־12 מה היא רוצה להיות כשהיא תהיה גדולה.

"נשיאת ארה"ב", היא ענתה.

שאלתי אותה: "אילו היית הנשיאה, מה הדבר הראשון שהיית עושה?"

היא ענתה: "הייתי מחלקת מזון ודואגת למגורים לכל חסרי הבית."

שני הוריה, הדמוקרטים, עמדו שם וזרחו מגאווה.

אמרתי: "וואו, איזו מטרה נעלה! אבל את לא חייבת לחכות עד שתהיי נשיאה . . ."

"למה הכוונה?" שאלה הילדה.

עניתי: "את יכולה לבא אלי, לכסח את הדשא, לנכש עשבים ולקצוץ את הגדר החיה.

אני אתן לך 50$, תוכלי ללכת למקום בו מרוכזים ההומלסים ולתת להם את הכסף

כדי שיקנו לעצמם אוכל, או ישלמו עבור דיור."

הילדה חשבה על כך מספר שניות וענתה:

"למה שחסר הבית לא יבא אליך, יעבוד אצלך ואז אתה תתן לו את הכסף?"

צחקתי ואמרתי לה: "ברוכה הבאה למפלגה הרפוליקנית."

הוריה אינם מדברים איתי מאז . . .

וקטור גאומטרי - גופים במישור [63]

גופים במישור:

- משולש
6
- ריבוע
6
- טרפז
9
- מרובע חסום במחומש
12

וקטור גאומטרי - גופים במרחב [63]

מנסרה ישרה מרובעת שבסיסה:

- מעוין
3

מקבילון
4

תיבה
5

קוביה
11

פירמידה משולשת שבסיסה:

- משולש
7, 13
- משולש שווה-צלעות (משוכללת)
2

פירמידה מרובעת שבסיסה:

- מקבילית
10

פירמידה ישרה מרובעת שבסיסה:

- ריבוע
1

פירמידה מחומשת שבסיסה:

- מחומש
8

וקטור אלגברי - גופים במישור [78]

גופים במישור:

- משולש
4, 19
- מקבילית
19
- מלבן
11, 14
- ריבוע
16
- מעגל
17, 21

וקטור אלגברי - גופים במרחב [78]

תיבה
10, 15

- תיבה שבסיסה ריבוע
4/4, 8/4, 31/2

קוביה
8, 17

פירמידה משולשת שבסיסה:

- משולש
20, 21

פירמידה מרובעת שבסיסה:

- מקבילית
1

וקטור אלגברי – חישובים [78]

משוואת מישור
1, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 23

הצגה פרמטרית של:

- ישר
6, 8, 13, 14, 17, 18
- מישור
16, 21

ישר החיתוך בין שני מישורים והצגה פרמטרית
5, 9, 23

חישוב מרחקים בין:

- שתי נקודות
11
- שני ישרים
7
- ישר למישור
12, 14

מצב הדדי: ישרים ומישורים

שני ישרים

- מאונכים
22
- מצטלבים
9, 22

ישר ומישור

- מאונכים
10
- מקבילים
7
- נחתכים
3, 20, 23
- ישר מוכל במישור
3, 7, 22, 23

חישוב זוויות

- זווית בין שני ישרים
22
- זווית בין ישר למישור
1, 2, 10, 15

טריגונומטריה במרחב - מנסרה [112]

מנסרה ישרה משולשת שבסיסה:

- משולש ישר-זווית
9, 10
- משולש שווה-שוקיים
4
- משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים
11
- משולש שווה-צלעות (משוכללת)
2, 3

תיבה
12

- תיבה שבסיסה ריבוע
1, 5, 6, 7, 8

טריגונומטריה במרחב - מנסרה [119]

פירמידה ישרה משולשת שבסיסה:

- משולש
7
- משולש שווה-שוקיים
13, 16, 18
- משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים
14
- משולש שווה-צלעות (משוכללת)
1, 2, 3, 5, 10, 12

פירמידה ישרה מרובעת שבסיסה:

- מלבן
6
- ריבוע
4, 8, 9, 11, 15, 17

מצא שלושה מספרים a , b ו־ c כך ש: $a+b+c+ab+ac+bc+abc=1000$

תשובה (בצופן א"ת ב"ש): בב באמי זבגצ זבג

סיווג שאלות המבחנים – חלק ב

פענוח הרישום: שאלה/מבחן. דוגמה: 38/4 – מבחן 38 שאלה 4. את הסיווג הכין ***שרון חיים***.

גידול ודעיכה

הסיווג לפי הפרמטר הנדרש לחישוב בסעיף הראשון של השאלה

- חישוב זמן
1/4a, 16/5a
- חישוב קצב גידול/דעיכה – שני תרחישים
3/4a, 10/5, 15/4b
- פתרון מערכת משוואות
2/4a
- עם פרמטר
1/4a

גאומטריה אנליטית

משולשים

- משולש ישר-זווית
12/1
- משולש שווה-שוקיים
29/1
- משולש שווה-צלעות
29/1
- היקף משולש
10/1
- שטח משולש
2/1, 8/1, 11/1, 14/1, 18/1, 30/1

נקודות וקווים מיוחדים במשולש

- חוצה זווית
30/1
- מפגש תיכונים במשולש
4/1, 8/1

מרובעים

- מקבילית
3/1
- מלבן
15/1, 24/1
- מעוין
28/1
- ריבוע
5/1, 27/1
- טרפז
25/1
- שטח מקבילית
3/1
- שטח מלבן
24/1
- שטח ריבוע
5/1
- שטח מצולע
4/1

מעגל

- מעגל
4/1, 5/1, 13/2, 21/1, 24/1, 25/1, 31/1, 33/1
- מעגל, עם פרמטר
1/1, 21/1, 35/1
- משיק למעגל
1/1, 3/1, 6/2, 13/2, 17/1, 22/1, 23/1, 26/1, 27/1
- שני מעגלים או יותר
6/2, 13/1, 13/2, 17/1, 22/1, 31/1, 35/1
- מעגל חסום במרובע
21/1
- מעגל חוסם משולש
11/1, 14/1
- שטח עיגול
5/1

פרבולה

- פרבולה
16/1, 23/1, 29/1
- פרבולה, עם פרמטר
13/2, 28/1
- משיק לפרבולה
9/1, 23/1
- משיק לפרבולה, עם פרמטר
7/1, 11/1, 18/1, 20/1, 22/1, 26/1, 32/1

אליפסה

- אליפסה
4/1, 28/1
- אליפסה, עם פרמטר
5/1, 10/1, 13/1, 19/1
- ריבוע חסום באליפסה
5/1
- עיגול חסום באליפסה
5/1

מקומות גאומטריים

- קו ישר
1/1, 6/2, 14/1, 17/1, 20/3, 31/1
- פרבולה
7/1, 19/1, 29/1, 31/1, 35/1
- היפרבולה
21/1
- מעגל
2/1, 13/2, 15/1, 30/1, 31/1, 34/1
- אליפסה
4/1, 33/1, 34/1
- שרטוט סקיצה של מקום גאומטרי
7/1

נושאים נוספים

- מספרים מרוכבים
15/1
- וקטורים גאומטריים
15/1
- וקטורים אלגבריים
26/2
- חישובי זוויות
7/1, 19/1
- פירמידה
4/2, 13/1, 22/2

מספרים מרוכבים

הגדרות וטכניקה אלגברית

- מספר מדומה טהור
7/3, 9/3, 12/3a, 26/3a, 31/3
- מספר הופכי
6/3, 9/3, 10/3a, 19/3, 34/3
- מספר צמוד
3/3, 6/3, 7/3, 9/3, 10/3a, 19/3, 25/3, 26/3, 27/3, 33/3, 34/3
- ערך מוחלט
3/3, 4/3, 7/3, 10/3a, 14/3b, 15/1, 16/3, 17/3, 19/3, 21/3, 23/3, 25/3, 26/3, 31/3, 32/3, 34/3
- משוואות מרוכבות
3/3, 4/3, 6/3, 7/3, 8/3, 9/3, 10/3a, 11/3a, 14/3b, 15/1, 16/3, 17/3, 18/3, 19/3, 20/3, 21/3, 22/3, 25/3, 27/3, 28/3, 30/3, 32/3, 33/3, 34/3, 35/3
- משוואות מרוכבות, הבעה באמצעות פרמטר
5/3, 29/3

מישור גאוס

- כללי
5/3, 20/3, 32/3
- הצגה קוטבית (בשאלה או בפתרון)
5/3, 7/3, 8/3, 9/3, 10/3a, 11/3a, 12/3a, 14/3b, 8/3, 19/3, 20/3, 21/3, 22/3, 24/3, 25/3, 26/3a, 28/3, 29/3, 31/3
- הצגה קוטבית, מציאת הארגומנט (הזווית)
10/3a, 16/3, 17/3, 18/3, 23/3, 24/3, 25/3, 26/3a
- שני ישרים מאונכים
12/3a
- משולש ושטח משולש
10/3a, 24/3, 25/3, 28/3
- משולש שווה-שוקיים
31/3
- משולש שווה-צלעות
29/3, 35/3
- דלתון
17/3
- מלבן
4/3
- ריבוע
31/3
- שטח מרובע
31/3

נוסחאון בגרות רשמי – 5 יחידות

אלגברה

- נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$
האיבר ה־n־י	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

- לוגריתמים $(a, b, c > 0 ; a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

- מספרים מרוכבים: משפט דה־מואבר: $[R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

פתרונות המשוואה: $z^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ הם:

$z_k = \sqrt[n]{R}\,[\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi+2k\pi}{n})]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

- וקטורים: אורך של וקטור: $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מישור דרך קצוות הוקטורים $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$: $\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) + s(\underline{c} - \underline{a})$

מכפלה סקלרית: $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cos\alpha$

מרחק בין נקודה $\underline{p}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\frac{|\underline{v} \cdot \underline{p} + e|}{|\underline{v}|}$

מציאת זווית בין הישר $\underline{a} + t\underline{b}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\sin\beta = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{b}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{b}|}$

מציאת זווית בין המישורים $\underline{v_1} \cdot \underline{x} + e_1 = 0$, $\underline{v_2} \cdot \underline{x} + e_2 = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\underline{v_1} \cdot \underline{v_2}|}{|\underline{v_1}| \cdot |\underline{v_2}|}$

גאומטריה אנליטית

קו ישר - שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1,y_1) ו־(x_2,y_2) : $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

משוואת ישר $y=mx+b$ עם שיפוע m העובר בנקודה (x_1,y_1) : $y-y_1=m(x-x_1)$

הנקודה C המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע שקצותיו

הם $A(x_1,y_1)$ ו־$B(x_2,y_2)$ ביחס $\frac{AC}{BC}=\frac{k}{l}$ היא: $\left(\frac{lx_1+kx_2}{k+l}\ ,\ \frac{ly_1+ky_2}{k+l}\right)$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו־m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1\cdot m_2=-1$

מרחק הנקודה (x_0,y_0) מהישר $Ax+By+C=0$: $d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$

מעגל - משוואת משיק למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

בנקודה (x_0,y_0) שעל המעגל היא:

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$$

פרבולה - משוואת משיק לפרבולה $y^2=2px$

בנקודה (x_0,y_0) שעל הפרבולה היא: $y\cdot y_0=p(x+x_0)$

אליפסה - משוואת אליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

מרחק המוקד מהראשית: $c=\sqrt{a^2-b^2}$

סכום מרחקי נקודה על האליפסה מהמוקדים: $r_1+r_2=2a$

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל־k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית,

כאשר ההסתברות להצלחה היא p :

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\quad,\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- הסתברות מותנית: $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

- נוסחת בייס: $P(A/B)=\frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}$

המילה הארוכה ביותר בתנ"ך היא בת 11 אותיות, ויש שלוש כאלה:

'וְהָאֲחַשְׁדַּרְפְּנִים' - אסתר ט' ג' , 'וּכְתוֹעֲבוֹתֵיהֶן' - יחזקאל ט"ז מ"ז , 'וְכַעֲלִילוֹתֵיכֶם' - יחזקאל כ' מ"ד

טריגונומטריה

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

- משפט הסינוסים: (R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
- משפט הקוסינוסים: (γ היא הזווית הכלואה בין a ל-b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$
- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גִזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$
- שטח משולש: $S = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל-c)
- גופים במרחב: פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B\cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס , h - גובה הגוף)

חרוט: שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול , l - הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות: $(x^t)' = tx^{t-1}$ (t ממשי) , $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$

נגזרת של מכפלת פונקציות: $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

נגזרת של מנת פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקציה מורכבת: $[f(u(x))]' = f'(u)\cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית) ו-$f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c$ ($t \neq -1$ ממשי)

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז:

$\int f[u(x)]\cdot u'(x)\,dx = F[u(x)] + c$, $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + c$