מספר מילים לפנֵי

בעקבות תפיחתו עם השנים, של ספר הבגרויות לשאלון זה, עד כדי אי־נוחות, חִלקתי אותו לשני חלקים: החלק הראשון מכיל את רֹב שאלות הבגרות מהשנים 2004–2013 שנערכו במתכונת ה'צבירה', המתאימות לשאלון זה, בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. ספר זה, חלקו השני של ספר הבגרויות, מכיל את כל מבחני הבגרות, 35 מבחנים, שנערכו במתכונת הנוכחית בין השנים 2009–2019. לכל השאלות תשובות סופיות בעמוד השאלה ופתרון מלא בהמשך עם הפניה לעמוד המתאים (המספר המעובה בסוגריים משמאל לכל שאלה).

בחלק מהשאלות שֻׁנה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל – סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעִתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ־2012 עד 2017 (מועד א), כפי שהם בספר, נמצאים באתר ההוצאה במִרְשֶׁתֶת (internet), בעלות שנתית מגוחכת של 20 (עשרים) ש' בלבד. ראו בגב הכריכה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי – בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל.
כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורה **שריף אמארה** מכפר זָלָפָה.

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התש"פ – 2020), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את החללים שבין השאלות והפתרונות לְחִלַּחְתִּי בהבזקי אנקדוטות – מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקדודות **לאומית או יהודיות.**

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על־ידי חברת 'קל־ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה אלי מיטב

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יָצאו גם לשאלונים 582-482-481-382

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יָצאו לשאלונים 582-581-482-481

מבחן 1 - קיץ תשס"ט - 2009 - מועד א

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 , שתי שאלות מהשאלות 4-6 , שתי שאלות מהשאלות 7-9

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. רוכב אופניים יצא בשעה 8:00 מעיר A לעיר B .

רוכב אופניים שני יצא בשעה 9:00 מעיר A לעיר B . המרחק בין A ל־ B הוא 45_{km} .

כאשר הרוכב הראשון הגיע לעיר B

הרוכב השני עדיין לא הגיע לעיר B והיה במרחק של 25_{km} ממנה.

מהירות הרוכב הראשון גדולה ב־ m קמ"ש ממהירות הרוכב השני, וידוע כי $0 < m < 5$.

א. הבע באמצעות m את שני הפתרונות האפשריים למהירות הרוכב השני.

ב. נסמן את שני הפתרונות שהבעת בסעיף א׳ ב־ x_1 וב־ x_2 .

מצא עבור אילו ערכי m מתקיים $| x_1 - x_2 | < 11$.

3. ידוע כי בכפר מסוים 20% מהתושבים חולים במחלת מעיים.

רופא הכפר בדק את כל התושבים.

90% מהחולים בכפר אובחנו על ידו כחולים, ו־ 10% מהבריאים בכפר אובחנו על ידו כחולים.

א. מהו אחוז התושבים בכפר שלגביהם הרופא ביצע אבחנה שגויה?

הרופא נתן תרופה לכל מי שאובחן על ידו כחולה.

התרופה גרמה לפריחה אצל 60% מהחולים שאובחנו כחולים,

ואצל 25% מהבריאים שאובחנו כחולים.

ב. מהי ההסתברות שתושב בכפר חולה, אם ידוע שיש לו פריחה?

> **שבעת המספרים הבאים הם מספרים ראשוניים עוקבים:** 53 , 47 , 43 , 41 , 37 , 31 , 29 .
> **המספר המורכב מסדרת הספרות של מספרי סדרה זו:** 29,313,741,434,753 **גם הוא ראשוני!**
> **זהו המספר הראשוני הקטן ביותר עם תכונה זו.** (Prime curios)

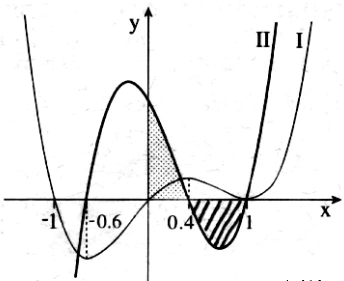
תשובות

1. א. $\frac{25-m\pm\sqrt{625-130m+m^2}}{2}$ km/h **ב.** $4 < m < 5$

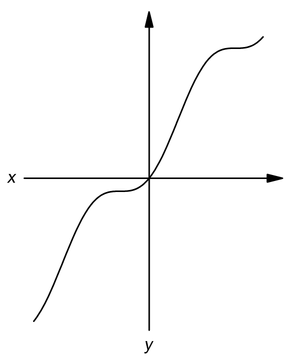
3. א. 10% **ב.** $\frac{27}{32}$

פרק שלישי

חדו"א של פולינומים , של פונקציות שורש , של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות



7. בציור שלפניך מוצגות סקיצות של שני גרפים: גרף I וגרף II .
אחד הגרפים הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$
והגרף האחר הוא הגרף של פונקציית הנגזרת השניה $f''(x)$.
א. איזה גרף הוא של $f'(x)$
ואיזה גרף הוא של $f''(x)$? נמק.
ב. מצא את שיעורי x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$. נמק.
ג. מצא את שיעורי x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$. נמק.
ד. הוכח שהשטח המוגבל על־ידי גרף II וציר x (המקווקוו בציור)
שווה לשטח המוגבל על־ידי גרף II והצירים (המנוקד בציור).



8. נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{\sin 2x}{2}$.
א. הראה כי $f'(x) = 2\sin^2 x$.
ב. **(1)** האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.
(2) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.
ג. בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $g(x) = x + \sin^2 x$
בתחום $-\pi \le x \le \pi$.
בתחום הנתון מצא את כל השטח המוגבל על־ידי הגרף של $g(x)$ ועל־ידי הישר $y = x$.

9. נתון משולש שאחת מצלעותיו היא 10_{cm} , וגובה המשולש לצלע זו הוא 5_{cm} .
(המשולש אינו קהה־זווית).
א. מבין כל המשולשים שהם כאלה, מצא את צלעות המשולש שהיקפו מינימלי.
ב. מה הן תכונות המשולש שאת צלעותיו מצאת בסעיף א'?

בהצלחה

תשובות

7. **א.** $f'(x) \longleftrightarrow I$, $f''(x) \longleftrightarrow II$ **ב.** $x_{max} = -1$, $x_{min} = 0$ **ג.** $x_1 = -0.6$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 1$

8. **ב.** **(1)** לא **(2)** כן **ג.** $S = \pi$ (יחידות ריבועיות)

9. **א.** 10_{cm} , $5\sqrt{2}_{cm}$, $5\sqrt{2}_{cm}$ **ב.** משולש ישר־זווית ושווה־שוקיים

פתרון מבחן 1

1. א.

	דרך	מהירות	זמן
רוכב ב׳	20	x	$\frac{45}{x+m}-1$
רוכב א׳	45	$x+m$	$\frac{45}{x+m}$

$\Leftarrow$ $\underline{x(\frac{45}{x+m}-1)=20}$

$$\frac{45x}{x+m}-x=20 \quad /\cdot(x+m) \quad \Rightarrow \quad 45x-x^2-mx=20x+20m$$

$$-x^2+(25-m)x-20m=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{m-25\pm\sqrt{625-50m+m^2-80m}}{-2}$$

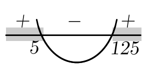
$$\Rightarrow \quad \mathbf{x_{1,2}=\frac{25-m\pm\sqrt{625-130m+m^2}}{2}} \ \mathbf{km/h}$$

ב.

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{25-m+\sqrt{625-130m+m^2}}{2}-\frac{25-m-\sqrt{625-130m+m^2}}{2}\right|=\left|\sqrt{m^2-130m+625}\right|<11$$

(1) תחום ההגדרה:

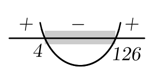
$$625-130m+m^2\geq 0 \quad , \quad m_{1,2}=\frac{130\pm120}{2}=65\pm60 \quad \Rightarrow \quad m_1=5 \ , \ m_2=125$$

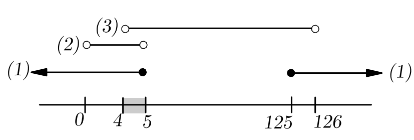
$a_m=1>0 \quad \Rightarrow$  $\Rightarrow \quad \underline{(m\leq5)\cup(m\geq125)}$

(2) נתון: $\underline{0<m<5}$

(3)

$$m^2-130m+625<11^2 \quad \Rightarrow \quad m^2-130m+504<0 \quad , \quad m_{1,2}=\frac{130\pm122}{2}=65\pm61$$

$m_1=4 \ , \ m_2=126 \ ; \ a_m=1>0 \quad \Rightarrow$  $\Rightarrow \quad \underline{4<m<126}$

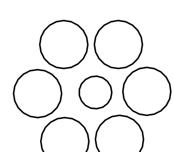
$(1)\cap(2)\cap(3):$  $\Rightarrow \quad \mathbf{4<m<5}$

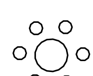
תעתועי ראיה

בציור נראה כאילו העיגול המרכזי בקבוצה השמאלית גדול יותר מהעיגול המרכזי בקבוצה הימנית, נכון?

אז זהו, שלא:

שני הכדורים המרכזיים בשתי הקבוצות שווים זה לזה!





3. א. הגדרת מאורעות: A - חולה , B - מאובחן כחולה

$P(A) = 0.2 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 0.8$

$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{0.2} = 0.9 \quad \Rightarrow \quad P(B \cap A) = 0.18$

$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B \cap \overline{A})}{0.8} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad P(B \cap \overline{A}) = 0.08$

	A	$\overline{A}$	Σ
B	0.18	0.08	$0.18 + 0.08 = 0.26$
$\overline{B}$	$0.2 - 0.18 = 0.02$	$0.8 - 0.08 = 0.72$	$0.02 + 0.72 = 0.74$
Σ	0.2	0.8	1

$P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0.02 + 0.08 = \mathbf{0.1 = 10\%}$

ב.

בשאלה לא נתון שאין פריחה לאנשים שלא קיבלו את התרופה מהרופא.

אין נתון גם אם יש מי מהמאובחנים כחולים שיש לו פריחה שלא כתוצאה מהשימוש בתרופה.

נתונים אלו אינם מצוינים בשאלה וזה חסר.

אנו מניחים שהנחת העבודה של השאלה היא כזאת:

כל פריחה שיש למי מתושבי הכפר נגרמה עקב נטילת התרופה מהרופא.

זה גם אומר שכל מי שלא אובחן כחולה - אין לו פריחה.

נבנה טבלה עבור האוכלוסיה שאובחנה כחולה.

נסמן: C - שיעור החולים (שאובחנו כחולים) , $\overline{C}$ - שיעור הבריאים (שאובחנו כחולים)

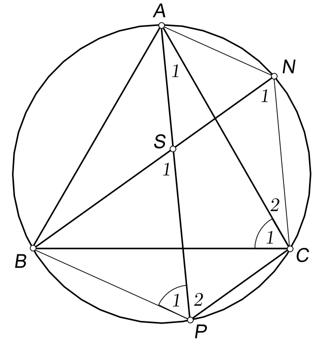
D - שיעור בעלי הפריחה

	C	$\overline{C}$	Σ
D	$60\% \cdot \frac{9}{13} = \frac{27}{65}$	$25\% \cdot \frac{4}{13} = \frac{1}{13}$	$\frac{27}{65} + \frac{1}{13} = \frac{32}{65}$
$\overline{D}$	$\frac{9}{13} - \frac{27}{65} = \frac{18}{65}$	$\frac{4}{13} - \frac{1}{13} = \frac{3}{13}$	$\frac{18}{65} + \frac{3}{13} = \frac{33}{65}$
Σ	$\frac{0.18}{0.26} = \frac{9}{13}$	$\frac{0.08}{0.26} = \frac{4}{13}$	1

$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{27}{65}}{\frac{32}{65}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P(C/D) = \frac{27}{32}}$

המספר הראשוני $5,780,507$ **ניתן להצגה הבאה:** $5,780,507 = 3^4 + 5^6 + 7^8$

4. בנית עזר: $BP\ ,\ NC\ ,\ AN$



א.

$(1)\ \angle P_1 = \angle C_1 \overset{(2)}{=} 60^\circ \quad , \quad (1)\ \angle P_2 = \angle ABC = 60^\circ$

$(3)\ \angle S_1 = \angle P_2 = 60^\circ$

$\underline{\triangle SBP:}\ (4)\ \angle B = 180^\circ - 2\cdot 60^\circ = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle S = \angle B = \angle P$

$(5)\ \ \mathbf{BS = SP = PB}\ \ (\checkmark)$

ב.

$(1)\ \angle N_1 = \angle BAC = 60^\circ$

$(6)\ \angle S_1 = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle N_1 = \angle S_1 \quad \overset{(7)}{\Rightarrow}\ NC \parallel SP \ \ , \ \ (8)\ PC \parallel SN$

$\overset{(9)}{\Rightarrow}$ **SPCN מקבילית** $(\checkmark)$

ג.

$(6)\ AP \parallel NC \quad \overset{(3)}{\Rightarrow}\ \angle C_2 = \angle A_1 \quad \overset{(10)}{\Rightarrow}\ \mathbf{AN = PC}\ \ (\checkmark)$

---

(1) זווית היקפיות הנשענות על מיתרים שווים - שוות זו לזו

(2) זווית במשולש שווה־צלעות היא בת 60°

(3) זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים הנחתכים ע״י ישר שלישי - שוות זו לזו

(4) השלמה ל־ 180° במשולש

(5) משולש שכל זוויותיו שוות זו לזו - הוא משולש שווה־צלעות

(6) סעיף קודם

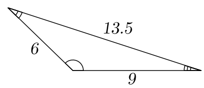
(7) אם זוויות מתאימות שוות זו לזו בישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי - הישרים מקבילים זה לזה

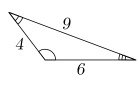
(8) נתון

(9) הגדרת מקבילית: מרובע שכל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו

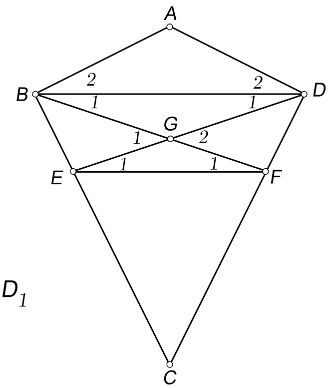
(10) זוויות היקפיות שוות - נשענות על מיתרים שווים

ישנם אינסוף זוגות משולשים השווים ב־5 גדלים מתוך 6 (3 צלעות ו־3 זוויות),
ובכל זאת הם אינם חופפים!
למשל:
אורכי צלעותיו של אחד המשולשים הם: $6,\ 4,\ 9$ יחידות אורך,
ואורכי צלעותיו של המשולש השני הם: $9,\ 6,\ 13.5$ יחידות אורך.
שני המשולשים האלה דומים אך אינם חופפים!





5. א. (1)



$(1)\ \angle ABC = \angle ADC \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ADC$

$\Rightarrow \quad \angle ABF = \angle ADE$

$(2)\ AB = AD \quad \Rightarrow^{(3)} \angle B_2 = \angle D_2$

$\Rightarrow \quad \angle ABF - \angle B_2 = \angle ADE - \angle D_2$

$\angle ABF - \angle B_2 = \angle B_1 \ , \ \ \angle ADE - \angle D_2 = \angle D_1 \quad \Rightarrow \quad \angle B_1 = \angle D_1$

(4) $\mathbf{GB = GD}$ $(\checkmark)$

(2)

$(1)\ \angle ABC = \angle ADC \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ADC \quad \Rightarrow \quad \angle CBF = \angle CDE$

$(5)\ GB = GD \ , \ \ (6)\ \angle G_1 = \angle G_2 \quad \Rightarrow^{(7)}$ $\mathbf{\triangle BGE \cong \triangle DGF}$

ב.

$(5)\ \triangle BGE \cong \triangle DGF \quad \Rightarrow^{(8)} \ \underline{BE = DF} \ , \ \ (2)\ BC = DC$

$\Rightarrow \quad BC - BE = DC - DF \quad \Rightarrow \quad \underline{EC = FC}$

$\Rightarrow \quad \frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FC} \quad \Rightarrow^{(9)} BD \parallel EF$

$BE = DF \ , \ BD \parallel EF \ , \ (10)\ \ BE \nparallel DF \quad \Rightarrow$ **טרפז שווה־שוקיים DBEF** $(\checkmark)$

---

(1) זוויות הדלתון שעל האלכסון המשני שוות זו לזו (2) נתון

(3) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו

(4) משולש שזוויות הבסיס שלו שוות זו לזו הוא משולש שווה־שוקיים

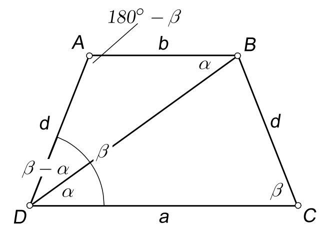
(5) מסעיף קודם (6) זוויות קודקודיות שוות זו לזו

(7) משפט חפיפה זווית־צלע־זווית (8) צמב"ח

(9) משפט תאלס הפוך (10) במשולש אין צלעות מקבילות

ר' אברהם הַבֶּדֶרְשִׁי *היה פיטן שחי בצרפת במאה ה־ 13. הוא חיבר תפילה ארוכה שנקראת 'בַּקָּשַׁת אֶלֶף אַלְפִין'.*
תפילה זו מכילה אלף מילים שכולן מתחילות באות 'א' !
יצירה אחרת שלו, 'בַּקָּשַׁת ה־לָמֵדִין' או 'בֵּית אֵל', הינה שיר, עם חרוז ועם משקל. בכל מילה שלו מופיעה האות 'ל' וכל השיר בנוי רק על מחצית אותיות הא"ב: מ־ 'א' ועד 'ל' בלבד !
לכן הוא גם נקרא 'בית אל': 'בית' = 412 מילים , 'אל' - האותיות מ־ 'א' ועד 'ל' בלבד.
בנו, הפיטן ***ר' יְדַעְיָה הַפְּנִינִי*** *חיבר את 'בַּקָּשַׁת הַמֵּמִין'. בתפילה זו למעלה מאלף מילים, שכולן מתחילות באות 'מ' !*

6. א.



$\underline{\triangle BDC:}\ BD^2 \overset{*}{=} a^2+d^2-2\,ad\cos\beta$ משפט הקוסינוסים

$\underline{\triangle BDA:}\ BD^2 = b^2+d^2-2\,bd\cos(180^\circ-\beta)$ משפט הקוסינוסים

$$a^2+d^2-2\,ad\cos\beta = b^2+d^2-2\,bd\,\underline{\cos(180^\circ-\beta)}$$

$$a^2-2\,ad\cos\beta = b^2-2\,bd\,(\underline{-\cos\beta})$$

$$2\,bd\cos\beta+2\,ad\cos\beta = a^2-b^2 \quad\Rightarrow\quad \cos\beta=\frac{a^2-b^2}{2d(b+a)}$$

$$(*)\ \ BD^2=a^2+d^2-2\,ad\,\frac{a^2-b^2}{2d(b+a)}=a^2+d^2-\frac{a(a^2-b^2)}{a+b}=a^2+d^2-\frac{a(a+b)(a-b)}{a+b}$$

$$=a^2+d^2-a^2+ab=d^2+ab \quad\Rightarrow\quad \mathbf{BD=\sqrt{ab+d^2}}\ \ (\checkmark)$$

ב.

$\underline{\triangle DBC:}\ \alpha+\beta=90^\circ \quad\Rightarrow\quad \angle B=90^\circ \quad\Rightarrow\quad BD^2+d^2=a^2$ פיתגורס

$$\Rightarrow\quad ab+d^2+d^2=a^2 \quad\Rightarrow\quad 2d^2=a^2-ab \quad\Rightarrow\quad d=\sqrt{\frac{a^2-ab}{2}}$$

$\Rightarrow\ \sqrt{\frac{a^2-ab}{2b^2}}=\frac{d}{b} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{d}{b}$ מספיק להוכיח:

$\underline{\triangle ABD:}\ \angle ADB=\beta-\alpha \quad\Rightarrow\quad \frac{b}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{d}{\sin\alpha} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{d}{b}}\ \ (\checkmark)$

משפט הסינוסים

אפשר גם:

$\Rightarrow\ \sqrt{\frac{a^2-ab}{2b^2}}=\frac{d}{b} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{d}{b}$ מספיק להוכיח:

$$\Longleftrightarrow\quad b\sin\alpha=d\sin(\beta-\alpha)$$

$$d\sin(\beta-\alpha)=d\sin((90^\circ-\alpha)-\alpha)=d\sin(90^\circ-2\alpha)=d\cos 2\alpha$$

$$\Longleftrightarrow\quad b\sin\alpha=d\cos 2\alpha$$

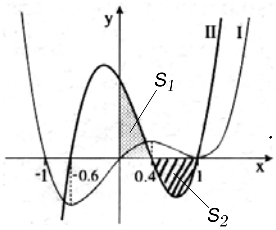
$$\Longleftrightarrow\quad b\cdot\frac{\cancel{d}}{a}=\cancel{d}\,(1-2\sin^2\alpha)$$

$$1-2\sin^2\alpha=1-2\left(\frac{d}{a}\right)^2=1-\frac{2d^2}{a^2}=1-\frac{\cancel{2}\cdot\frac{a^2-ab}{\cancel{2}}}{a^2}=\frac{a^2-a^2+ab}{a^2}=\frac{ab}{a^2}=\frac{b}{a}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \mathbf{\frac{b}{a}=\frac{b}{a}}\ \ (\checkmark)$$

מספרי יחידה ראשוניים

המספר המורכב מפעמיים הספרה '1' או מ־19 או מ־317 או מ־1031 פעמים '1' - הוא מספר ראשוני



.7 א. בנקודות שבהן $x=-0.6\ ,\ 0.4\ ,\ 1$ לגרף I יש נקודות קיצון
וגרף II מתאפס. מתאים לכך ש־ II הוא נגזרת של I
בנקודות שבהן ל־גרף II יש נקודות קיצון - גרף I <u>אינו</u> מתאפס.
לכן גרף I אינו מתאים להיות הנגזרת של גרף II.
מסקנה: $f''(x) \longleftrightarrow II\ ,\ f'(x) \longleftrightarrow I$

ב.-ג. ממצאי הגרפים והמסקנות נתונים בטבלה שלהלן (.infl קיצור של inflection - פיתול):

x		-1		-0.6		0		0.4		1	
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	max	↘	infl.	↘	min	↗	infl.	↗	infl.	↗
	⌒	⌒	⌒	infl.	⌣	⌣	⌣	infl.	⌒	infl.	⌣

$\Rightarrow$ **max: $x=-1$, min: $x=0$; infl.: $x=-0.6$, $x=0.4$, $x=1$**

ד.

$$S_1=\int_0^{0.4} f''(x)\,dx = f'(x)\Big|_0^{0.4} = f'(0.4)-f'(0)=f'(0.4)-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{לפי הציור}}}{0}=\underline{f'(0.4)}$$

$$S_2=-\int_{0.4}^{1} f''(x)\,dx=-f'(x)\Big|_{0.4}^{1}=-(\underset{\substack{\uparrow\\ =0}}{f'(1)}-f'(0.4))=\underline{f'(0.4)} \quad \text{כנ"ל} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_1=S_2}\ (\checkmark)$$

.8 א.

$$f(x)=x-\frac{\sin 2x}{2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=1-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cos 2x\cdot\cancel{2}=1-\cos 2x=1-(\cos^2x-\sin^2x)$$

$$(1-\cos^2x)+\sin^2x=\sin^2x+\sin^2x \quad\Rightarrow\quad \mathbf{f'(x)=2\sin^2x}\ (\checkmark)$$

ב. 1-2 .

$$f'(x)=2\sin^2x \overset{?}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad x=\pi k$$

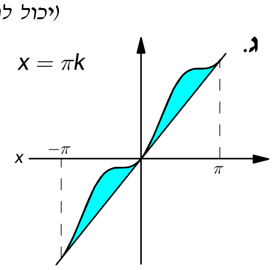
$f'(x)=2\sin^2x\ge 0$ לכל x . לכן הפונקציה עצמה הינה <u>מונוטונית עולה</u>.

ולכן: **(1)** **<u>אין</u> לפונקציה נקודות קיצון**

(2) **<u>יש</u> לפונקציה** (אינסוף) **נקודות פיתול** (באותן נקודות שבהן $x=\pi k$)

(יכול להיות שיש עוד. לא נדרש.)

ג.



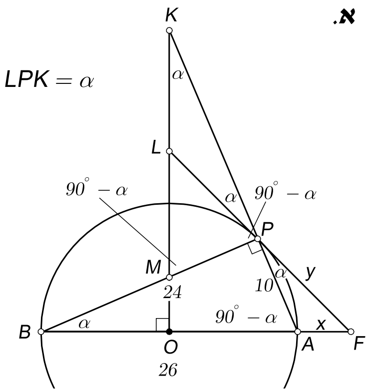
$$y=x\ ,\ g(x)=x+\sin^2x \quad\Rightarrow\quad x+\sin^2x=x \quad\Rightarrow\quad \sin x=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pi k$$

$$\Rightarrow\quad x_1=-\pi\ ,x_2=0\ ,\ x_3=\pi$$

$$S=\int_{-\pi}^{\pi}(\cancel{x}+\sin^2x-\cancel{x})\,dx=\underset{\text{ע"פ סעיף א'}}{\tfrac12\left(x-\tfrac12\sin 2x\right)}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$S=\tfrac12\left(\pi-\tfrac12\cdot 0\right)-\tfrac12\cdot\left(-\pi-\tfrac12\cdot 0\right)=\tfrac12\pi+\tfrac12\pi \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S=\pi} \quad \textbf{(יחידות ריבועיות)}$$

5. א.



$(1)\ \angle B=\alpha\ ,\ (2)\ \angle BPA=90^\circ \overset{(3)}{\Rightarrow} \angle A=90^\circ-\alpha$

$(4)\ \angle BPK=90^\circ\ ,\ (5)\ \angle BPL=\angle BAP=90^\circ-\alpha \overset{(6)}{\Rightarrow} \angle LPK=\alpha$

$(7)\ \angle K=\alpha \overset{(8)}{\Rightarrow} \angle KMP=90^\circ-\alpha$

$\Rightarrow$ $\underline{\triangle LPK:}$ $\angle K=\angle P \overset{(9)}{\Rightarrow} LP=LK$

$\underline{\triangle LMP:}$ $\angle M=\angle P \overset{(9)}{\Rightarrow} LP=LM$

$\overset{(10)}{\Rightarrow}$ $\mathbf{KL=LM}$ $(\checkmark)$

ב. <u>בגאומטריה אוקלידית</u> **(יניב סופן)**:

$(11)\ AP=\sqrt{26^2-24^2}=10\ ,\ (12)\ \angle APF=\angle LPK=\alpha\ ,\ (1)\ AF=x\ ,\ PF=y$

$(13)\ \triangle BFP\sim\triangle PFA \overset{(14)}{\Rightarrow} \frac{BF}{PF}=\frac{FP}{FA}=\frac{BP}{PA} \Rightarrow \frac{26+x}{y}=\frac{y}{x}=\frac{24}{10}=\frac{12}{5}$

$\Rightarrow y=\frac{12x}{5} \Rightarrow 26+x=\frac{12y}{5}=\frac{12}{5}\cdot\frac{12x}{5}=\frac{144}{25}x\ \ /\cdot 25$

$\Rightarrow 650+25x=144x \Rightarrow 119x=650 \Rightarrow x=\frac{650}{119} \Rightarrow$ $\mathbf{AF=5\frac{55}{119}cm}$

<u>בטריגונומטריה:</u>

$\underline{\triangle BPA:}$ $(11)\ AP=\sqrt{26^2-24^2}=10\ ,\ \sin\alpha=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$

$(12)\ \angle APF=\angle LPK=\alpha \overset{(15)}{\Rightarrow} \angle F=180^\circ-2\alpha-90^\circ=90^\circ-2\alpha$

$\underline{\triangle AFP:}$ $(16)\ \frac{10}{\sin(90^\circ-2\alpha)}=\frac{AF}{\sin\alpha}$

$$AF=\frac{10\sin\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{10\sin\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\frac{10\cdot\frac{5}{13}}{1-2\cdot(\frac{5}{13})^2}=\frac{\frac{50}{13}}{1-\frac{50}{169}}$$

$$AF=\frac{\frac{50}{13}}{\frac{119}{169}}=\frac{50}{13}\cdot\frac{169}{119}=\frac{50}{1}\cdot\frac{13}{119}=\frac{650}{119} \Rightarrow \mathbf{AF=5\frac{55}{119}cm}$$

---

(1) סימון (2) זווית היקפית הנשענת על קוטר (3) השלמה ל- 180° במשולש PAB

(4) השלמה ל- 180° של זווית שטוחה

(5) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני

(6) השלמה ל- 90° של $\angle BPK$ (7) השלמה ל- 180° במשולש KOA

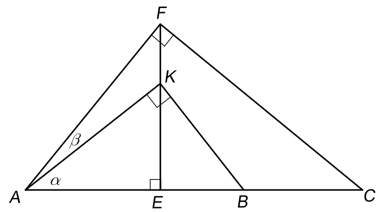
(8) השלמה ל- 180° במשולש KPM

(9) משולש ששתיים מזוויותיו שוות זו לזו הוא שווה־שוקיים (10) כלל המעבר

(11) משפט פיתגורס (12) זוויות קודקודיות שוות זו לזו (13) משפט דמיון זווית־זווית

(14) יחס הדמיון (15) השלמה ל- 180° במשולש BPF (16) משפט הסינוסים

6. א. (1)



$\underline{\triangle AKF:}\quad \angle AFK = 90^{\circ} - (\alpha+\beta) \quad , \quad \angle AKF = 90^{\circ} + \alpha$

$$\frac{AF}{\sin(90^{\circ}+\alpha)} = \frac{AK}{\sin(90^{\circ}-(\alpha+\beta))}$$

$$\frac{AF}{AK} = \frac{\sin(90^{\circ}+\alpha)}{\cos(\alpha+\beta)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{AF}{AK} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}$$

(2) רדיוס המעגל החוסם משולש ישר־זווית הוא מחצית היתר

$\underline{\triangle AFC:}\quad \cos(\alpha+\beta) = \frac{AF}{AC} = \frac{AF}{2R} \quad , \quad \underline{\triangle AKB:}\quad \cos\alpha = \frac{AK}{AB} = \frac{AK}{2r}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{AK}{2r} : \frac{AF}{2R} = \frac{AK}{\cancel{2}r}\cdot\frac{\cancel{2}R}{AF} = \frac{AK}{AF}\cdot\frac{R}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R}{r} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}\cdot\frac{AF}{AK} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{R}{r} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha+\beta)}}$$

ב.

סימון: q - רדיוס המעגל החוסם את המשולש AKF (הרדיוס המבוקש).

$$\underline{\triangle AKF:}\quad \frac{AK}{\sin(90^{\circ}-(\alpha+\beta))} = 2q \quad \Rightarrow \quad AK = 2q\cos(\alpha+\beta)$$

$$\underline{\triangle AKB:}\quad \cos\alpha = \frac{AK}{AB} = \frac{AK}{2r} \quad \Rightarrow \quad AK = 2r\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 2q\cos(\alpha+\beta) = 2r\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad q = r\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} \underset{\uparrow}{=} r\cdot\sqrt{\frac{R}{r}} = \frac{r\cdot\sqrt{R}}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha+\beta)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} = \sqrt{\frac{R}{r}}$$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{q = \sqrt{r\,R}}$ **(יחידות אורך)**

לא יכול להיות

$$25-30 = 1-6 \quad \Rightarrow \quad 25-30+9 = 1-6+9 \quad \Rightarrow \quad 5^2 - 2\cdot5\cdot3 + 3^2 = 1^2 - 2\cdot1\cdot3 + 3^2$$

$$\Rightarrow \quad (5-3)^2 = (1-3)^2 \quad \Rightarrow \quad 5-3 = 1-3 \quad \Rightarrow \quad \underline{5=1}$$

מה שכמובן אינו נכון.

היכן הַכֶּשֶׁל?

ובכן, המעבר $(5-3)^2 = (1-3)^2 \quad \Rightarrow \quad 5-3 = 1-3$ **אינו חוקי.**

במקרה זה: $x^2 = y^2$ אזי: $x = y$ __אוֹ__ $x = -y$

ולכן: $5-3 = 1-3$ __או__ $5-3 = -(1-3)$ **האפשרות הראשונה נפסלת בהיותה פסוק שקר** $(5=1)$

האפשרות השניה היא הנכונה: $(\surd)$ $5-3 = -(1-3) = -(-2) = 2$

7. א. (1)

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x}-2}\quad,\quad (1)\ \ 2x\ge 0 \quad\Rightarrow\quad x\ge 0\ \ ,\ \ (2)\ \ \sqrt{2x}-2\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq 2$$

$$(1)\cap(2)\quad\Rightarrow\quad \mathbf{(0\le x<2)\cup(x>2)}$$

(2)

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{2}{\sqrt{4}-2}=\frac{2}{0}=\infty \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}}=\frac{\infty}{2-0}=\infty \quad\Rightarrow$$ אין אסימפטוטה אופקית

(3)

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{0}{-2}=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{(0,0)}$$

(4)

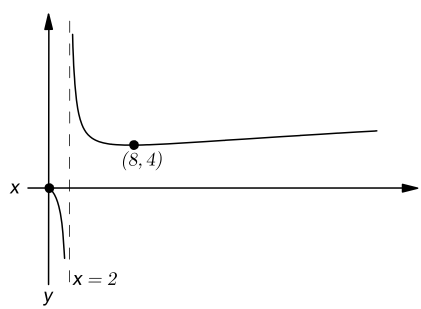
$$f'(x)=\frac{1\cdot(\sqrt{2x}-2)-x\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x}})}{(\sqrt{2x}-2)^2}=\frac{\sqrt{2x}-2-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}}{(\sqrt{2x}-2)^2}=\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,(\sqrt{2x}-2)^2}=\boxed{\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,(\sqrt{2x}-2)^2}}\stackrel{?}{=}0$$

$$\sqrt{x}=2\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad x=4\cdot 2=8$$

x	0		2		8	
y'		$-$	$\emptyset$	$-$	0	$+$
y	0	$\searrow$	asym.	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$f(8)=\frac{8}{4-2}=4 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{max_{ep.}\,(0,0)}\ \ ,\ \ \mathbf{min\ (8,4)}$$

(5)



ב.

x	0		2		8	
$f(x)$	0	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$		$-$	$\emptyset$	$-$	0	$+$
$'(x)$		$--=+$		$+-=-$	$+0=0$	$++=+$
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

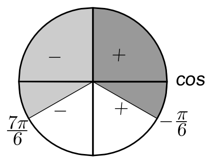
$$\Rightarrow\quad \mathbf{g(x):}\quad \nearrow:\ (0<x<2)\cup(x>8)\ \ ,\ \ \searrow:\ 2<x<8$$

סוודר: זה מה שלובשים, כשלאמא קר . . .

8. א. (1)-(2)

$$f(x)=\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\quad,\quad -\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{7\pi}{6}$$

$$a>0\ ,\ 16>0\ ,\ \sqrt{16\sin x+9}>0\quad\Rightarrow\quad -\cos x\overset{?}{=}\pm$$



$$\Rightarrow\quad \underline{\cos x>0:}\ -\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2}\ ,\ \underline{\text{cox }<0:}\ \frac{\pi}{2}<x\le\frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\quad \underline{-\cos x<0:}\ -\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2}\ ,\ \underline{-\text{cox }>0:}\ \frac{\pi}{2}<x\le\frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\quad \underline{\mathbf{f(x)>0:}}\ \boldsymbol{\frac{\pi}{2}<x\le\frac{7\pi}{6}}\ ,\ \underline{\mathbf{f(x)<0:}}\ \boldsymbol{-\frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{2}}$$

ב.

$$\int\frac{-a\ 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\ dx$$

$$\int f(u(x))\cdot u'(x)\ dx=F(u(x))+c\ ,\ 16\sin x+9=u\quad\Rightarrow\quad u'(x)=16\cos x$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}}\ dx=2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx=2\sqrt{x}+c$$

$$\int\frac{-a\ 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\ dx=-a\int\frac{16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\ dx=-a\cdot 2\sqrt{16\sin x+9}+c$$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)\ dx=-2a\sqrt{16\sin x+9}\ \Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}=-2a\left(\sqrt{16\cdot(-\tfrac{1}{2})+9}-\sqrt{16\cdot(-\tfrac{1}{2})+9}\right)$$

$$=-2a(1-1)=0\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)\ dx=0}$$

ג.

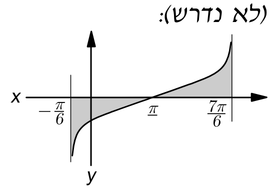
הקווים התוחמים את השטח המבוקש - הם גם הקווים התוחמים את תחום ההגדרה.

בתחום זה הפונקציה מקבלת ערכים שליליים עד $x=\frac{\pi}{2}$ וערכים חיוביים מ־ $x=\frac{\pi}{2}$ (לעיל).

לכן השטח המבוקש נמצא בחלקו האחד מתחת לציר x ובחלקו האחר - מעל ציר x .

משמעות התוצאה של סוף סעיף ב היא ששני השטחים האלו שווים בגודלם.

ציור להמחשה (לא נדרש):

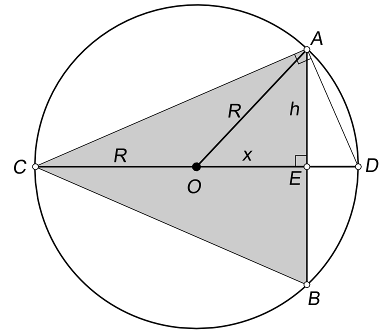


$$S=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)\ dx=2\cdot(-2a\sqrt{16\sin x+9})\ \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}}$$

$$S=-4a\left(\sqrt{16\cdot(-\tfrac{1}{2})+9}-\sqrt{16\cdot 1+9}\right)$$

$$S=-4a(1-5)=16a=\underset{\text{נתון}}{8}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$$

.9



$\triangle AEO:\ \ h = \sqrt{R^2 - x^2}$
פיתגורס

$AB = 2h = 2\sqrt{R^2 - x^2}$

$f(x) = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot CE = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}\sqrt{R^2 - x^2}\cdot (R + x)$

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\cdot (R + x)$

$f'(x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{R^2 - x^2}}\cdot (R + x) + \sqrt{R^2 - x^2}\cdot 1$

$f'(x) = \frac{-Rx - x^2 + R^2 - x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - Rx + R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} \overset{?}{=} 0$

$2x^2 + Rx - R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 8R^2}}{4} = \frac{-R \pm 3R}{4}$

$x_1 = \frac{1}{2}R\ (\surd)\ \ ,\ \ x_2 < 0\ (\times)$

מכנה הנגזרת חיובי עבור הנקודה החשודה.

מספיק, אם כן, לבדוק את סימן המונה של $f'(x)$:

$g(x) = (-2x^2 - Rx + R^2)' = -4x - R$
סימון

$g(\frac{1}{2}R) = -2R - R < 0 \quad \Rightarrow \quad f''(\frac{1}{2}R) < 0 \quad \Rightarrow \quad max\ \ (\surd)$

$S_{max} = f(\frac{1}{2}R) = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}R^2}\cdot (R + \frac{1}{2}R) = \sqrt{\frac{3}{4}R^2}\cdot \frac{3}{2}R = \frac{\sqrt{3}}{2}R\cdot \frac{3}{2}R$

$\Rightarrow \ \ \mathbf{S_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2}$ **(יחידות ריבועיות)**

מספרים ערפדיים

מספרים ערפדיים הם מספרים שלהם $2n$ ספרות, כך שמכפלת n ספרות שלו (לאו דוקא לפי הסדר), כמספר n־ספרתי ב־ n הספרות האחרות (כנ"ל) , כמספר n־ספרתי שווה למספר עצמו:

$27 \times 81 = 2187\ \ ,\ \ 35 \times 41 = 1435\ \ ,\ \ 21 \times 60 = 1260$

$15 \times 93 = 1395\ \ ,\ \ 30 \times 51 = 1530\ \ ,\ \ 21 \times 87 = 1827\ \ ,\ \ 80 \times 86 = 6880$

ויש גם ערפדים מפלצתיים:

$1,234,554,321 \times 9,162,361,086 = 11,311,432,469,283,552,606$

מבחן 11 - קיץ התשע"ב - 2012 - מועד א

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 , שתי שאלות מהשאלות 4-6 , שתי שאלות מהשאלות 7-9

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. צינור הזרים לברֵכה 10 מ"ק מים בקצב קבוע.

לאחר הפסקה של $\frac{1}{3}$ שעה הוגבר קצב ההזרמה של הצינור ב־3 מ"ק לשעה.

בקצב המוגבר הזרים הצינור עוד 20 מ"ק מים.

הזמן שהצינור הזרים את המים, כולל ההפסקה, זהה לזמן שהיה נדרש לצינור,

לוּ היה מזרים 30 מ"ק מים בלי הפסקה בקצב שלפני ההגברה.

א. חשב כמה זמן הזרים הצינור את המים עד ההפסקה.

ב. נתון גם כי הצינור ממלא $\frac{1}{3}$ מנפח ברֵכה ריקה ב־18 שעות,

כאשר הוא מזרים מים בקצב שלפני ההגברה.

שני צינורות מזרימים יחד מים לברֵכה הריקה באותו קצב.

קצב זה קטן מהקצב המוגבר של הצינור הנתון וגדול מהקצב שלפני ההגברה.

באיזה תחום שעות יהיה הזמן שבו שני הצינורות ימלאו את הברֵכה?

3. א. מחלקים 2 כדורים לבנים וכדור 1 שחור בין שני כדים.

בכל כד חייב להיות לפחות כדור אחד. בוחרים באקראי כד ומוציאים ממנו כדור אחד.

מצא באיזה אופן צריך לחלק את הכדורים בין שני הכדים,

כדי שהסיכוי להוציא כדור לבן יהיה הגדול ביותר.

ב. בכד אחד יש 5 כדורים: 2 לבנים ו־3 שחורים.

(1) מוציאים באקראי 5 פעמים כדור מהכד עם החזרה

(בכל פעם מחזירים לכד את הכדור שהוצא).

מהי ההסתברות להוציא בדיוק פעמיים כדור לבן?

(2) מוציאים באקראי 6 פעמים כדור מהכד עם החזרה. מהי ההסתברות להוציא בדיוק

3 פעמים כדור לבן כך שהכדור הלבן השלישי יוצא בפעם השישית?

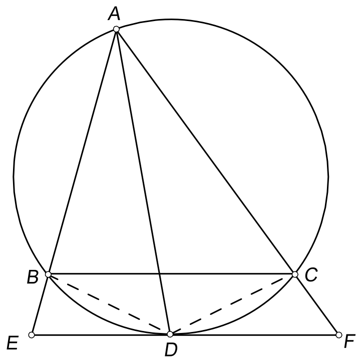
(אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.)

תשובות

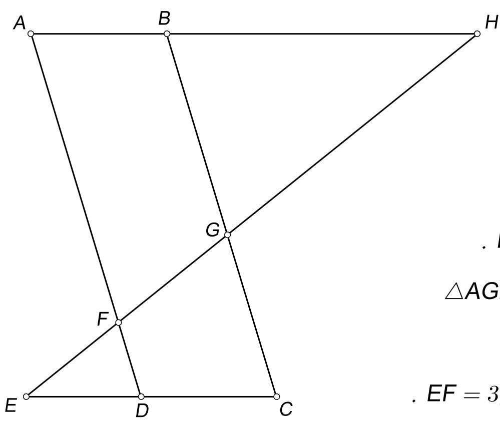
1. א. 50 (דקות) $= \frac{5}{6}$ (שעה) **ב.** $21.6 < time < 27$

3. א. לבן-שחור , לבן **ב. (1)** $P = \frac{216}{625} = 0.3456$ **(2)** $P = \frac{432}{3125} = 0.13824$

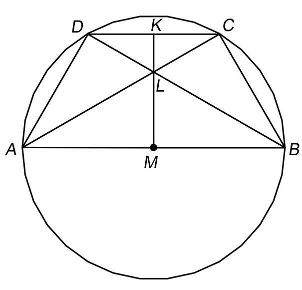
פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור



.4 נתון כי במשולש AEF חוצה־זווית EAF הוא AD .
D היא נקודת ההשקה של הצלע EF למעגל,
החותך את הצלעות AE ו־ AF
בנקודות B ו־ C בהתאמה.
המעגל עובר גם דרך הקדקוד A .
הוכח: **א.** $BC \parallel EF$
ב. $\triangle ABD \sim \triangle DCF$
ג. $AD \cdot BD = DF \cdot AB$



.5 נתונה מקבילית $ABCD$.
E ו־H הן נקודות על המשכי
הצלעות CD ו־ AB בהתאמה.
EH חותך את AD ואת BC
בנקודות F ו־ G בהתאמה. נתון: $ED = EF$.
א. הוכח: **(1)** $HG = HB$ **(2)** $\triangle AGH \cong \triangle FBH$
ב. נתון גם:
$BG = 7_{cm}$, $AB = 4_{cm}$, $FD = 2_{cm}$, $EF = 3_{cm}$.
(1) מצא את האורך של BH .
(2) מצא את היחס $\frac{AF}{GC}$.



.6 טרפז שווה־שוקיים $ABCD$ $(DC \parallel AB)$
חסום במעגל שמרכזו M .
הבסיס AB הוא קוטר במעגל זה.
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה L .
המשך ML חותך את DC בנקודה K .
נתון כי $\angle BAD = \alpha$. הבע באמצעות α את היחס $\frac{KL}{LM}$.

תשובות

.5 **ב.** **(1)** $BH = 10.5_{cm}$ **(2)** $\frac{AF}{GC} = \frac{29}{14}$

.6 $\frac{KL}{LM} = -\cos 2\alpha$

פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות שורש, פונ' רציונליות ופונ' טריגונומטריות

7. **א.** נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה רציונלית המקיימת:

- לפונקציה יש שלוש אסימפטוטות: $y=0$, $x=-1$, $x=4$.
- הפונקציה מוגדרת לכל $x \neq -1$ ו־ $x \neq 4$.
- $f(0)>0$.
- $f(1.5)=0$.
- $f'(x)<0$ רק עבור $-1<x<4$.
- $f(x)<0$ עבור $x>4$ ו־ $f(x)>0$ עבור $x<-1$.

(1) על פי הנתונים שבסעיף זה, סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) על פי הגרף שסרטטת, הראה כי לפונקצית הנגזרת $f'(x)$

יש נקודת קיצון בתחום $-1<x<4$, וקבע את סוגה. נמק.

אין צורך למצוא את השיעורים של נקודת הקיצון.

ב. נתון גם כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת $f(x)=\frac{3a-3bx}{(x^2-ax+c)^2}$. a , b ו־ c הם פרמטרים.

מצא את הפונקציה $f(x)$.

8. נתונה הפונקציה: $f(x)=4\sin^2 x\cdot\cos^2 x$ בתחום $0\le x\le\pi$.

בתחום הנתון:

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. הוכח כי לכל x מתקיים: $0\le 8\sin^2 x\cdot\cos^2 x\le 2$.

ה. **(1)** נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x$. הראה כי $g'(x)=f(x)$.

(2) בתחום הנתון מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר x .

> **העולם היום כל כך שונה ממה שהיה פעם**
>
> **אפילו הנוסטלגיה - זה לא מה שהיה פעם . . .**

תשובות

7. **א.** **(2)** max **ב.** $f(x)=\frac{9-6x}{(x^2-3x-4)^2}$

8. **א.** $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\pi,0)$

ב. $min_{ep.}(0,0)$, $max\,(\frac{\pi}{4},1)$, $min\,(\frac{\pi}{2},0)$, $max\,(\frac{3\pi}{4},1)$, $min_{ep.}(\pi,0)$

ה. **(2)** $S=\frac{\pi}{2}$ (יחידות ריבועיות)

9. ישר משיק לפרבולה $y = x^2$ בנקודה שבה $0 < x < 1$.

המשיק יוצר משולש עם ציר x ועם הישר $x = 1$.

מצא את השטח המקסימלי של המשולש הנוצר באופן שתואר.

בהצלחה

13 – מזל של שֵם

*לנֹחַ היו שלושה בנים: **שם, חם ויפת.***

היהודים (וגם הערבים) הם בני שם. מכאן המילה אנטישמיות (אנטי שֵם).

*הצאצא ה־13 של שֵם הוא יָקטן: **עילם, אשור, ארפכשד, לוד, ארם, עוץ, חול, גתר, מש, שלח, עבר, פלג, יקטן.***

*לִיָקטן היו 13 ילדים: **אלמודד, שלף, חצרמות, ירח, הדורם, אוזל, דקלה, עובל, אבימאל, שבא, אופִר, חוילה, יובב.***

הפרשיה המספרת לנו זאת היא בבראשית, פרק י', פסוקים כ"א-ל"ב.

יָקטן בגימטריה שווה $169 = 13^2$

סכום הגימטריות של כל 13 צאצאי שם מתחלק ב־13:

***עילם** (150) + **אשור** (507) + **ארפכשד** (605) + **לוד** (40) + **ארם** (241) + **עוץ** (166) + **חול** (44)*

*+ **גתר** (603) + **מש** (340) + **שלח** (338) + **עבר** (272) + **פלג** (113) + **יקטן** (169) = 3588. $3588 : 13 = 276$*

סכום הגימטריות של כל 13 צאצאי יקטן מתחלק ב־13:

***אלמודד** (85) + **שלף** (410) + **חצרמות** (744) + **ירח** (218) + **הדורם** (255) + **אוזל** (44) + **דקלה** (139)*

*+ **עובל** (108) + **אבימאל** (84) + **שבא** (303) + **אופִר** (287) + **חוילה** (59) + **יובב** (20) = 2756.*

$2756 : 13 = 212$

בחומש מתוחָמות פרשיות באותיות 'פ' (פתוחה) או 'ס' (סגורה).

הפרשיה שמספרת לנו את תולדות שם נמצאת בבראשית פרק י' פסוקים כ"א-כ"ט.

מספר המילים באותה פרשיה מתחלק ב־13, ומספר האותיות באותה פרשיה מתחלק ב־13.

הפרשיה מכילה 104 מילים ($104 : 13 = 8$), ו־390 אותיות ($390 : 13 = 10$)

והצימוק שבעוגה: המילה ה־169 (13^2) בספר דברי הימים היא: יָקטן !!!

(אוסקר גולדברג / הרב שמואל יניב)

תשובות

9. $S_{max} = \frac{8}{27}$ (יחידה ריבועית)

פתרון מבחן 11

1. א.

	הספק (מ"ק לשעה)	זמן (שעות)	עבודה (מ"ק)
קצב רגיל	x $\Leftarrow$	$\frac{10}{x}$ $\Rightarrow$	10
הפסקה	0	$\frac{1}{3}$	0
קצב מוגבר	$x+3$ $\Leftarrow$	$\frac{20}{x+3}$ $\Rightarrow$	20
קצב רגיל	x $\Leftarrow$	$\frac{30}{x}$ $\Rightarrow$	30

$$\frac{10}{x}+\frac{1}{3}+\frac{20}{x+3}=\frac{30}{x} \quad /-\frac{30}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}+\frac{20}{x+3}-\frac{20}{x}=0 \quad /\cdot 3x(x+3)$$

$$x(x+3)+60x-60(x+3)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+3x+60x-60x-180=0$$

$$x^2+3x-180=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-3\pm 27}{2} \quad , \quad x>0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{24}{2}=12$$

$$\Rightarrow \quad \frac{10}{x}=\frac{10}{12}=\mathbf{\frac{5}{6}_{hours}=50_{minutes}}$$

ב.

הספק הזרמה רגיל: 12 מ"ק/שעה. עבודה ב־18 שעות: 216 מ"ק $= 12\times 18$.

נפח זה הוא $\frac{1}{3}$ מנפח הברֵכה $\Leftarrow$ נפח הברֵכה: 648 מ"ק $= 216\times 3$.

הספק שני צינורות בקצב רגיל: 24 מ"ק/שעה $= 12\times 2$.

$\Leftarrow$ זמן עבודה: 27 שעות $=\frac{648}{24}$.

הספק שני צינורות בקצב מוגבר: 30 מ"ק/שעה $=(12+3)\times 2$.

$\Leftarrow$ זמן עבודה: 21.6 שעות $=\frac{648}{30}$.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{21.6_{hours} < time < 27_{hours}}$$

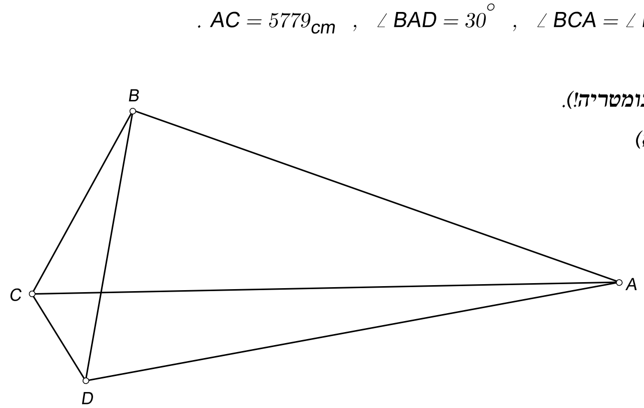
בעיית אתגר

במרובע $ABCD$ **נתון:** $\angle BCA=\angle DCA=60^\circ$, $\angle BAD=30^\circ$, $AC=5779_{cm}$.

מצא את היקף המשולש BCD .

הפתרון בכלים אוקלידיים (לא טריגונומטריה!).

(ד"ר פטר סמובול , בי"ס אשל הנשיא)



3. **א.** שתי אפשרויות חלוקה: (1) לבן-לבן , שחור   (2) לבן-שחור , לבן

$P_1(white) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$, $P_2(white) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ **לבן-שחור , לבן**

ב. **(1)**

$P(white) = \frac{2}{5} \Rightarrow P = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3 \Rightarrow \mathbf{P = \frac{216}{625} = 0.3456}$

(2) המאורע המתואר הוא חיתוך המאורעות הבאים:

הוצאת בדיוק 2 לבנים מתוך 5 נסיונות <u>וגם</u> הוצאת לבן בניסיון הששי.

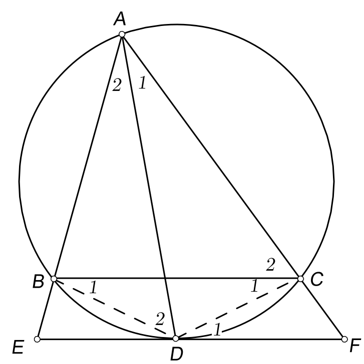
הסתברות המאורע הראשון נתונה מהסעיף הקודם ב(1).

הסתברות המאורע השני, גם היא ידועה: $\frac{2}{5}$. לכן:

$P = \frac{216}{625}\cdot\frac{2}{5} \Rightarrow \mathbf{P = \frac{432}{3125} = 0.13824}$

---

4. **א.**



(1) $\angle C_1 = \angle A_2 \overset{(2)}{=} \angle A_1 \overset{(3)}{=} \angle D_1$

(4) $\angle C_1 = \angle D_1 \overset{(5)}{\Rightarrow}$ $\mathbf{BC \parallel EF}$ (✓)

ב.

(6) $\underline{\angle D_1 = \angle A_2}$

(1) $\angle D_2 = \angle C_2 \overset{(7)}{=} \angle F$

(4) $\underline{\angle D_2 = \angle F} \overset{(8)}{\Rightarrow}$ $\mathbf{\triangle ABD \sim \triangle DCF}$ (✓)

ג.

(1) $\angle B_1 = \angle A_1 \overset{(2)}{=} \angle A_2 \overset{(1)}{=} \angle C_1 \overset{(4)}{\Rightarrow} \angle B_1 = \angle C_1 \overset{(9)}{\Rightarrow} DB = \underline{DC}$

$\triangle ABD \sim \triangle DCF \overset{(10)}{\Rightarrow} \frac{AD}{DF} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow AD\cdot \underline{DC} = AB\cdot DF \Rightarrow$ $\mathbf{AD\cdot BD = AB\cdot DF}$ (✓)

- - -

(1) זוויות היקפיות הנשענות אל אותה קשת שוות זו לזו   (2) נתון

(3) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו האחר

(4) כלל המעבר

(5) אם זוויות מתחלפות בין שני ישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי שוות זו לזו - הישרים מקבילים

(6) מסעיף קודם   (7) זוויות מתאימות בישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי - שוות זו לזו

(8) משפט דמיון זווית־זווית

(9) אם שתי זוויות במשולש שוות זו לזו - המשולש הוא שווה־שוקיים   (10) יחס הדמיון

מבחן 20 - סתו התשע"ה - 2014 - מועד ד

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 , שאלה אחת מהשאלות 4-5 , שתי שאלות מהשאלות 6-8

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. מכונית א יצאה מעיר A ומכונית ב יצאה מעיר B .

שתי המכוניות נסעו זו לקראת זו עד שנפגשו בנקודה C , ושם עצרו.

מכונית א יצאה לפני מכונית ב.

זמן הנסיעה של מכונית א היה גדול פי $2\frac{1}{4}$ מזמן הנסיעה של מכונית ב.

מכונית א עברה 150_{km} יותר ממכונית ב.

למחרת המשיכה מכונית א לנסוע מ־ C עד שהגיעה ל־ B

ומכונית ב המשיכה לנסוע מ־ C עד שהגיעה ל־ A .

ביום זה היה זמן הנסיעה של מכונית א שווה לזמן הנסיעה של מכונית ב.

לשתי המכוניות מהירות קבועה.

א. מצא את המרחק מ־ A ל־ B .

ב. ביום השלישי יצאו שוב שתי המכוניות זו לקראת זו. מכונית א מעיר B ומכונית ב מעיר A .

שתי המכוניות יצאו באותו זמן, ונסעו במהירות הקבועה שלהן.

הן נפגשו כעבור 6 שעות. מצא את המהירות של כל אחת מן המכוניות.

2. נתונה סדרה חשבונית $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n$.

נתון: $a_1 = 4 , a_n = 310$, הפרש הסדרה הוא 3 .

יצרו סדרה חדשה מכל האיברים של הסדרה הנתונה.

כל איבר בסדרה החדשה הוא סכום של שני איברים עוקבים בסדרה הנתונה.

הסדרה החדשה היא: $a_1 + a_2 , a_2 + a_3 , a_3 + a_4 , \ldots$.

א. מצא את מספר האיברים בסדרה החדשה.

ב. הוכח שהסדרה החדשה היא חשבונית וחשב את סכומה.

ג. בסדרה החדשה מחקו איברים על פי החוקיות הזאת:

את האיבר השני, האיבר הששי, האיבר העשירי וכן הלאה.

המקומות של האיברים שנמחקו יוצרים סדרה חשבונית: $2 , 6 , 10 , \ldots$.

כמה איברים נמחקו בסדרה החדשה?

תשובות

1. א. $AB = 750_{km}$ **ב.** $I: 50_{km/h}$, $II: 75_{km/h}$

2. א. 102 (איברים) **ב.** $S = 32,028$ **ג.** 26 (איברים)

.3 ההסתברות של תלמיד כלשהו לעבור מבחן נהיגה היא p $(p > 0)$.

תלמיד ניגש למבחן. אם הוא לא עובר את המבחן הוא ניגש שוב, עד שיצליח לעבור את המבחן.

לתלמיד יש אותו סיכוי לעבור את המבחן בכל פעם שהוא נבחן.

ידוע שההסתברות שתלמיד יעבור את המבחן בפעם הראשונה

גדולה פי $\frac{27}{8}$ מההסתברות שיעבור את המבחן רק בפעם הרביעית.

א. חשב את p.

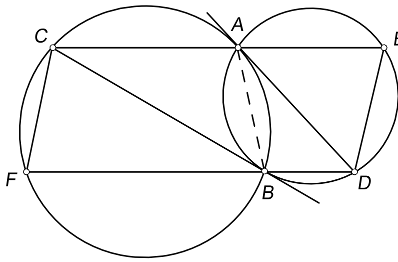
ב. אם ידוע שתלמיד יעבור את המבחן לאחר 2 מבחנים לכל היותר,

מהי ההסתברות שיעבור רק בפעם השניה?

ג. שני תלמידים ניגשים למבחן.

מהי ההסתברות ששני התלמידים יחד יזדקקו סך הכל ל־ 3 מבחנים בדיוק,

עד ששניהם יעברו את המבחן?



<u>פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור</u>

.4 שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו־ B.

המיתר AD משיק למעגל השמאלי בנקודה A.

המיתר CB משיק למעגל הימני בנקודה B.

המשך המיתר CA חותך את המעגל הימני בנקודה E

והמשך המיתר DB חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.

א. הוכח: $\angle AED + \angle FCA = 180^\circ$.

ב. הוכח: המרובע $CEDF$ הוא מקבילית.

ג. נתון: $AC = 9_{cm}$, $BD = 4_{cm}$.

מצא פי כמה גדול שטח $\triangle ABC$ משטח $\triangle BDA$.

Three Swiss witches watch three Swiss Swatch watches.
Which Swiss witch watches which Swiss Swatch watch.

(שלוש מכשפות שוויצריות מסתכלות על שלושה שעונים שוויצרים 'סווטש' (פירמה של שעון).

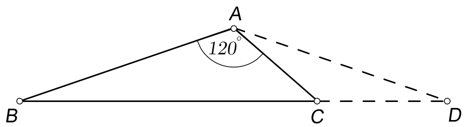
איזו מכשפה שוויצרית מסתכלת על איזה שעון שוויצרי 'סווטש'?)

תשובות

.3 **א.** $p = \frac{1}{3}$ **ב.** $P = \frac{2}{5}$ **ג.** $P = \frac{4}{27}$

.4 **ג.** $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle BDA} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

5. לפניך משולש ABC . נתון: $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = 2AC$.



h הוא הגובה לצלע BC .

א. הבע באמצעות h את שטח המשולש ABC.

המשיכו את BC עד לנקודה D .

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC שווה לרדיוס המעגל החוסם את המשולש ADC .

ב. חשב את $\angle ADC$.

ג. נתון גם: $AD = h + 6$. חשב את h .

פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות שורש, פונ' רציונליות ופונ' טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sin x} - a \sin x$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$, $a > 0$ הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. רשום את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לציר x .

ג. הוכח שהפונקציה היא אי־זוגית.

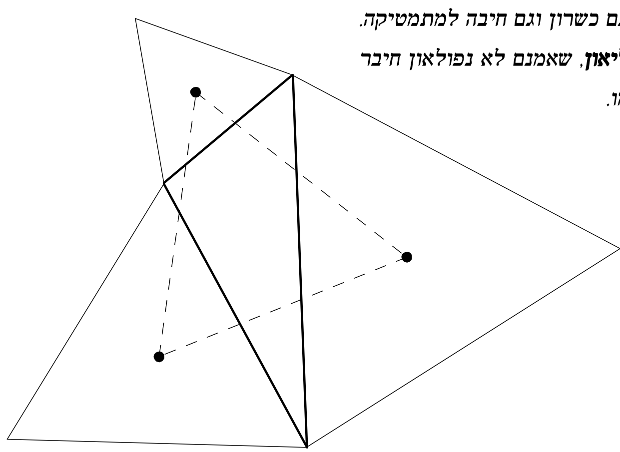
ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$ בתחום $0 < x < \pi$.

היעזר בסעיפים הקודמים והראה שהפונקציה $g(x)$ אינה שלילית.

*למצביא הצרפתי **נפוליאון בונפרטה** היה גם כשרון וגם חיבה למתמטיקה.*
*יש משפט בגאומטריה הנקרא **משפט נפוליאון**, שאמנם לא נפוליאון חיבר אותו, אבל כנראה שהוא נקרא כך על שמו.*
המשפט מגלה את התכונה הבאה:
על כל אחת מצלעות משולש כלשהו נבנה משולש שווה־צלעות. נקודות המרכז של אותם שלושת המשולשים שבנינו, הינם קודקודים של משולש שווה־צלעות נוסף.
המשפט אינו מסתיים בתכונה זאת.
קיימות לו הרחבות רבות נוספות.

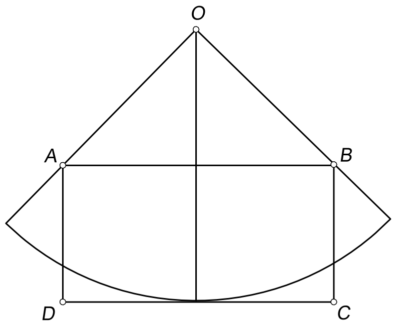


תשובות

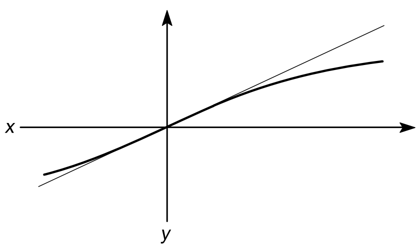
5. א. $S_{\triangle ABC} = \frac{7h^2}{2\sqrt{3}}$ (יחידות ריבועיות) **ב.** $\angle D = 19.12^\circ$ **ג.** $h = 2.92$ (יחידות אורך)

6. א. $(-\pi < x < 0) \cup (0 < x < \pi)$ **ב.** $x = 0$, $x = \pm\pi$ **ד.** $\min\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\max\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

7. נתונה גִזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו R.
בונים מלבן $ABCD$ כך שרבע המעגל משיק לצלע DC בנקודת האמצע שלה, והקדקודים A ו־ B נמצאים על הרדיוסים.
מבין כל האלכסונים של המלבנים $ABCD$ שנוצרים באופן זה, הבע באמצעות R את אורך האלכסון הקצר ביותר.



8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$. $a>0$ פרמטר.
העבירו משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=0$.
המשיק עובר בנקודה $(3,1)$.



א. מצא את a .
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
ג. חשב את השטח המוגבל על־ידי המשיק,
על־ידי גרף הפונקציה ועל־ידי הישר $x=4$.
ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת לכל x : $g''(x)=f(x)$, $g'(0)=5$.
האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

בהצלחה

ריבוע קסם בריבוע

ריבוע הקסם המוצג, מורכב כולו ממספרים ריבועיים,
חובר על־ידי **ליאונרד אוילר** ב־ 1770 .
קבוע הריבוע הוא $8,515$.

68^2	29^2	41^2	37^2
17^2	31^2	79^2	32^2
59^2	28^2	23^2	61^2
11^2	77^2	8^2	49^2

תשובות

7. $BD_{min}=\frac{2R}{\sqrt{5}}$ (יחידות אורך)

8. **א.** $a=9$ **ב.** $\forall x$ **ג.** $S=\frac{2}{3}$ (יחידה ריבועית) **ד.** לא

פתרון מבחן 20

1. א. סימון: I - א , II - ב.

ביום הראשון:

	t	v	s
$I:\ A \to C$	$\frac{9}{4}z$	x	$\frac{9}{4}xz$
$II:\ C \leftarrow B$	z	y	yz

$\Rightarrow \quad (1)\ \ \frac{9}{4}xz = yz + 150$

למחרת:

	t	v	s
$I:\ C \to B$	$\frac{yz}{x}$	x	yz
$II:\ A \leftarrow C$	$\frac{9}{4}\cdot\frac{xz}{y}$	y	$\frac{9}{4}xz$

$\Rightarrow \quad (2)\ \ \frac{yz}{x} = \frac{9xz}{4y} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4y^2}{9} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2y}{3}$

$(1)\ \ \frac{9}{4}\cdot\frac{2y}{3}\cdot z = yz + 150 \ \ /\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 3yz = 2yz + 300 \quad \Rightarrow \quad yz = 300$

$AB = AC + CB = \frac{9}{4}xz + yz = (yz + 150) + yz = 2yz + 150 = 2\cdot 300 + 150 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AB = 750_{km}}$

ב. ביום השלישי:

	t	v	s
$I:\ D \leftarrow B$	6	x	$6x$
$II:\ A \to D$	6	y	$6y$

$\Rightarrow \quad (3)\ \ 6x + 6y = 750 \quad \Rightarrow \quad x + y = 125 \quad \Rightarrow \quad \frac{2y}{3} + y = 125$

$(3)\ \ 2y + 3y = 375 \quad \Rightarrow \quad 5y = 375 \quad \Rightarrow \quad y = 75 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\cdot 75}{3} = 50$

$\Rightarrow \quad \mathbf{I:\ 50_{km/h}\ ,\ \ II:\ 75_{km/h}}$

---

2. א. המחובר הראשון באיבר הראשון הוא a_1 , המחובר הראשון באיבר השני הוא a_2 וכו׳
לכן האיבר האחרון הוא: $a_{n-1} + a_n$. ולכן בסדרה החדשה יש $n-1$ איברים.

$a_1 = 4\ ,\ \ d = 3\ ,\ \ a_n = 310 \quad \Rightarrow \quad 310 = 4 + 3(n-1) \quad \Rightarrow \quad n = 103 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n - 1 = 102}$

ב. סימון לסדרה החדשה: A_k - איבר כללי , D - הפרש הסדרה , S^* - סכום

$D = A_k - A_{k-1} = (a_k + a_{k+1}) - (a_{k-1} + a_k) = a_{k+1} - a_{k-1} = (a_1 + dk) - (a_1 + d(k-2))$

$D = a_1 + dk - a_1 - dk + 2d = 2d\ ,\ \ d = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D = A_k - A_{k-1} = 6}\ \ (\checkmark)$

$S^*_{102} = \frac{102}{2}(2A_1 + 6\cdot 101) = 51\cdot(2(4+7) + 606) = 51\cdot(22 + 606) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S^*_{102} = 32,028}$

ג. נסמן את איברי הסדרה של האינדקסים שנמחקו ב־ b_i .

$2\ ,\ 6\ ,\ 10 \ldots \quad \Rightarrow \quad b_n \le 102 \quad \Rightarrow \quad 2 + 4(n-1) \le 102 \quad \Rightarrow \quad 4(n-1) \le 100$

$n - 1 \le 25 \quad \Rightarrow \quad n \le 26 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{26}$ **(איברים)**

$7,352,537$ הוא המספר הראשוני הפלינדרומי הקטן ביותר המכיל את כל הספרות הראשוניות.

3. א. הסיכוי להיכשל: $1-p$ לכן הסיכוי לעבור רק בפעם הרביעית היא: $(1-p)^3\cdot p$

$$p=\frac{27}{8}(1-p)^3\cdot p \quad\Rightarrow\quad (1-p)^3=\frac{8}{27}=\left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad\Rightarrow\quad 1-p=\frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{p=\frac{1}{3}}$$

ב. הסתברות המאורע: "יעבור לאחר שני מבחנים לכל היותר" : $p+(1-p)\cdot p=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$

חיתוך המאורעות: "יעבור לאחר שני מבחנים לכל היותר" ו: "יעבור בדיוק בפעם השניה"

הוא המאורע: "יעבור בדיוק בפעם השניה". הסתברות זו שווה ל: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

ההסתברות המבוקשת היא מנת החילוק של הסתברות חיתוך שני המאורעות

בהסתברות של התנאי $\left(P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\right)$, ולכן ההסתברות המבוקשת היא:

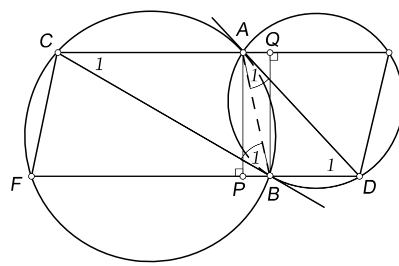
$$P=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P=\frac{2}{5}}$$

ג. ראשון עבר · שני עבר · ראשון כשל + שני עבר · שני כשל · ראשון עבר

$$P=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P=\frac{4}{27}}$$

---

4. א.



(1) $\angle AED+\angle ABD=180^\circ$

(2) $\angle ABF+\angle ABD=180^\circ \quad\Rightarrow^{(3)}\quad \angle AED=\angle ABF$

(1) $\angle ABF+\angle FCA=180^\circ$

$\Rightarrow^{(3)}\quad \mathbf{\angle AED+\angle FCA=180^\circ}$ (✓)

ב.

(4) $\angle B_1=\angle D_1$, $\angle A_1=\angle C_1$, (5) $\angle ABF=\angle D_1+\angle A_1$, $\angle BAE=\angle B_1+\angle C_1$

$\Rightarrow^{(3)}\quad \angle ABF=\angle BAE \quad\Rightarrow^{(6)}\quad \underline{CE\parallel FD}$

(7) $\angle AED+\angle FCA=180^\circ \quad\Rightarrow^{(8)}\quad \underline{FC\parallel DE} \quad\Rightarrow^{(9)}$ **CEDF מקבילית** (✓)

ג. הגובה לצלע BD ב־ $\triangle ABD$ הוא המרחק בין קדקוד A להמשך הצלע BD $(h=AP)$.

הגובה לצלע AC ב־ $\triangle ABC$ הוא המרחק בין קדקוד B להמשך הצלע AC $(h=BQ)$.

מרחק זה קבוע (צלעות מקבילות) ולכן היחס בין השטחים יהיה היחס שבין הבסיסים:

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle BDA}=\frac{AC}{BD} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S_{\triangle ABC}:S_{\triangle BDA}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}}$$

---

(1) זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל, משלימות ל־ 180° (2) זווית שטוחה (3) כלל המעבר

(4) זווית בין משיק למעגל לבין מיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על המיתר מצידו השני

(5) זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות האחרות במשולש שאינן צמודות לה

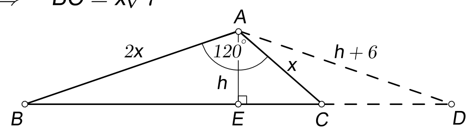
(6) אם זוויות מתחלפות בישרים הנחתכים ע"י ישר שלישי, שוות זו לזו - הישרים מקבילים זה לזה

(7) מסעיף א (8) כמו ב־(6) עבור זוויות חד־צדדיות המשלימות ל־ 180° (9) הגדרת מקבילית

5. א.

$(1)\ AC = x \quad \Rightarrow^{(2)} \quad AB = 2x$

$(3)\ BC^2 = x^2 + 4x^2 - 2\cdot x\cdot 2x\cdot \cos 120^\circ = 7x^2 \quad \Rightarrow \quad BC = x\sqrt{7}$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC\cdot h}{2} = \frac{x\sqrt{7}\cdot h}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB\cdot AC\cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{2x\cdot x\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x\sqrt{7}\cdot h}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7}h = x\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{7}{3}}\cdot h$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{x\sqrt{7}\cdot h}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}\, h\cdot\sqrt{7}\cdot h \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{\triangle ABC} = \frac{7h^2}{2\sqrt{3}}}$$ **(יחידות ריבועיות)**

ב.

$$(4)\ \frac{AC}{\sin\angle D} = 2R_{ACD} \ ,\ \frac{BC}{\sin 120^\circ} = 2R_{ABC} \ ,\ R_{ABC} = R_{ACD} \quad \Rightarrow \quad \frac{AC}{\sin\angle D} = \frac{BC}{\sin 120^\circ}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\sin\angle D} = \frac{x\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sin\angle D = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\angle D = 19.12^\circ}$$

ג.

$$\underline{\triangle AED:}\ \frac{h}{h+6} = \sin 19.12^\circ \quad \Rightarrow \quad h = 0.3273h + 1.9653$$

$$\Rightarrow \quad 0.6727h = 1.9653 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h = 2.92}$$ **(יחידות אורך)**

(1) סימון (2) נתון (3) משפט הקוסינוסים (4) משפט הסינוסים

---

6. א.

$$f(x) = \frac{a}{\sin x} - a\sin x \ ,\ -\pi \le x \le \pi \ ,\ \sin x \ne 0 \quad \Rightarrow \quad x \ne 0\ ,\ \pm\pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(-\pi < x < 0) \cup (0 < x < \pi)}$$

ב.

$$x = 0, \pm\pi \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{a}{\to 0} - a\cdot 0 = \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 0\ ,\ x = \pm\pi}$$

ג.

$$f(-x) = \frac{a}{\sin(-x)} - a\sin(-x) = \frac{a}{-\sin x} - (-a\sin x) = -(\frac{a}{\sin x} - a\sin x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f(-x) = -f(x)}\ (\checkmark)$$

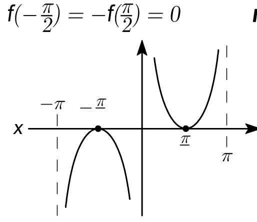
ד.

$$f'(x) = -\frac{a\cos x}{\sin^2 x} - a\cos x = \boxed{-a\cos x\left(\frac{1}{\sin^2 x} + 1\right)} \stackrel{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{2}$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'	$\emptyset$	$+$	0	$-$	$\emptyset$	$-$	0	$+$	$\emptyset$
f	asym.	↗	max	↘	asym.	↘	min	↗	asym.

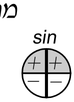
$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{a}{1} - a\cdot 1 = 0 \qquad\qquad \mathbf{max\ (-\tfrac{\pi}{2}, 0)}$$
$$\Rightarrow$$
$$f(-\tfrac{\pi}{2}) = -f(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \qquad\qquad \mathbf{min\ (\tfrac{\pi}{2}, 0)}$$

ה.



ו.

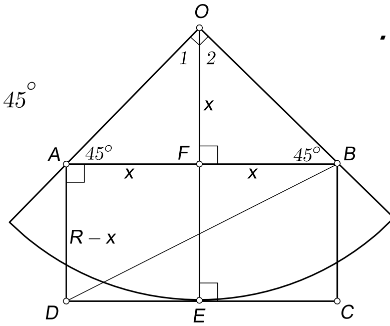
מהציור: $f(x) \ge 0 \ \ \forall x \in \{0 < x < \pi\}$



$$\sin x > 0 \ \ \forall x \in \{0 < x < \pi\} \quad \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{g(x) = \frac{f(x)}{\sin x} \ge 0 \ \ \forall x \in \{0 < x < \pi\}}\ (\checkmark)$$

.7



$(1)\ \ OE \perp DC \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \angle OFB = 90^\circ$

$(3)\ \ \angle AOB = 90^\circ \quad \overset{(4)}{\Rightarrow} \quad \angle OAB = \angle OBA = \angle O_1 = \angle O_2 = 45^\circ$

$(5)\ \ FA = FB = FO \overset{(6)}{=} x \quad \overset{(7)}{\Rightarrow} \quad AD = FE = R - x$

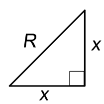
$\underline{\triangle BAD:}\ \ (8)\ \ BD = f(x) = \sqrt{(2x)^2 + (R-x)^2}$

$f(x) = \sqrt{5x^2 - 2Rx + R^2}$

$f'(x) = \frac{10x-2R}{2\sqrt{5x^2-2Rx+R^2}} = \boxed{\frac{5x-R}{\sqrt{5x^2-2Rx+R^2}}} \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{5}$

x	0		$\frac{R}{5}$		$R\sqrt{2}^{\,*}$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	min	↗	

$(*)$



$\Rightarrow \quad x^2 + x^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad x = R\sqrt{2}$

$BD_{min} = f(\frac{R}{5}) = \sqrt{5\cdot\frac{R^2}{25} - 2R\cdot\frac{R}{5} + R^2} = \sqrt{\frac{R^2}{5} - \frac{2R^2}{5} + R^2} = \sqrt{\frac{4}{5}R^2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{BD_{min} = \frac{2R}{\sqrt{5}}}$ **(יחידות אורך)**

---

(1) משיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה

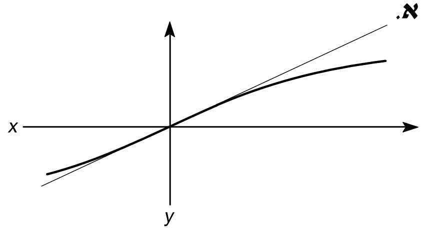
(2) זוויות מתאימות במקבילים הנחתכים ע״י ישר שלישי, שוות זו לזו   (3) רבע מעגל: $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

(4) $AF = DE = EC = FB \Leftarrow \triangle OFA \cong \triangle OFB \Leftarrow \angle O_1 = \angle O_2 = 45^\circ$. השלמה ל- 180° במשולש

(5) מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות   (6) סימון

(7) צלעות נגדיות במלבן (AFED) שוות זו לזו   (8) פיתגורס

.8 א.



$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\ ,\quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$

$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+a} - x\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+a}}}{x^2+a} = \frac{x^2+a-x^2}{(x^2+a)^{1.5}} = \frac{a}{(x^2+a)^{1.5}}$

$m = f'(0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{y = \frac{1}{\sqrt{a}}x}_{\text{משוואת המשיק}}\ ,\quad (3,1) \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot 3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = 9}$

ב.

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \quad \Rightarrow \quad \forall\, \boldsymbol{x}$

ג.

$S = \int_0^4 (\frac{1}{3}x - \frac{x}{\sqrt{x^2+9}})dx = (\frac{x^2}{6} - \sqrt{x^2+9})\Big|_0^4 = (\frac{16}{6} - 5) - (0-3) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S = \frac{2}{3}}$ **(יחידה ריבועית)**

ד.

$''(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \sqrt{x^2+9} + c$

$\Rightarrow \quad g'(0) = 3 + c \overset{\text{נתון}}{=} 5 \quad \Rightarrow \quad c = 2 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \sqrt{x^2+9} + 2 > 0 \ \ \forall\, x \quad \Rightarrow$ **<u>לא</u>**

מבחן 21 - חורף תשע"ה - 2015

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 , שאלה אחת מהשאלות 4-5 , שתי שאלות מהשאלות 6-8

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. צַבָּעִים ותיקים וצַבָּעִים מתלמדים צריכים לצבוע מספר מסוים של דלתות.

צַבָּע אחד ותיק ושני מתלמדים יסיימו את הצביעה בזמן הארוך ב־ 25% מהזמן שבו יסיימו את הצביעה שני צַבָּעִים ותיקים וצַבָּע אחד מתלמד.

צַבָּע ותיק עובד מהר יותר מצַבָּע מתלמד (כמובן).

לכל צַבָּע ותיק אותו קצב עבודה בלתי משתנה, ולכל צַבָּע מתלמד אותו קצב עבודה בלתי משתנה.

א. מצא את היחס בין הזמן שצַבָּע מתלמד יסיים לבדו את צביעת הדלתות לבין הזמן שצַבָּע ותיק יסיים לבדו את צביעת הדלתות.

ב. מצא כמה צַבָּעִים מתלמדים צריכים לעבוד עם צַבָּע אחד ותיק, כדי שהם יסיימו את צביעת הדלתות במשך אותו הזמן שבו יסיימו את הצביעה שני צַבָּעִים ותיקים וצַבָּע אחד מתלמד.

2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על־ידי הכלל: $a_n + a_{n+1} = 4n + 2$, $a_1 = 4$.

א. אם בסדרה יש 100 איברים,

מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות האמצעיים בסדרה.

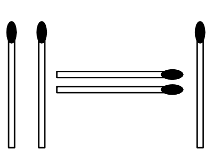
ב. הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות האי־זוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם איברי הסדרה העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה חשבונית.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ג. את האיבר העומד באמצע הסדרה.

ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.

הזז גפרור אחד בלבד (לא להוציא. להשאיר!) כך שהשוויון יהיה נכון.



פתרון (בצופן א"ת ב"ש): תסא שסעדא תסא בפפצ תסא.

תשובות

1. **א.** 2 **ב.** 3 (צַבָּעִים מתלמדים)

2. **א.** 202 **ב.** $a_{n+2} - a_n = 4$ $(\surd)$ **ג.** $a_{51} = 104$ **ד.** $S = 10,304$

3. בישוב גדול, שליש מהתושבים הם נשים, והשאר הם גברים.

מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות:

קבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לראיון ברדיו

וקבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לראיון בטלוויזיה.

א. מהי ההסתברות שבכל קבוצה יש בדיוק שני גברים?

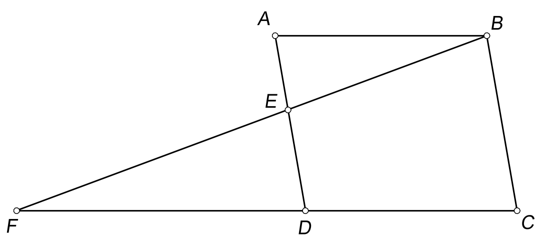
ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לראיון ברדיו היו לכל היותר שני גברים.

מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיוק שני גברים?

<u>פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור</u>

4. במקבילית $ABCD$ הנקודה E נמצאת על הצלע AD.

המשך BE חותך את המשך CD בנקודה F.



נתון:

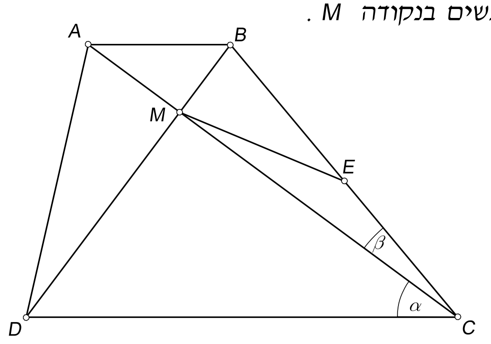
שטח המשולש ABE הוא 27_{cm^2}. שטח המשולש DFE הוא 48_{cm^2}.

א. מצא את שטח המשולש BED.

ב. נתון גם כי המרובע $BCDE$ הוא בר־חסימה במעגל. מצא את היחס $\frac{AB}{EF}$.

5. אלכסוני הטרפז $ABCD$ מאונכים זה לזה ונפגשים בנקודה M.

E היא אמצע השוק BC.



נתון: $\angle ACD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $DC = a$.

א. הבע באמצעות β , α ו־ a את האורך של ME.

נתון: $\frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha} = \frac{1}{3}$, $a = 6.6_{cm}$.

ב. מצא את האורך של AB.

ג. נתון גם: $BM = 1.3_{cm}$. מצא את הזווית DCB.

תשובות

3. **א.** $P = \frac{64}{729}$ **ב.** $P = \frac{8}{11}$

4. **א.** $S_{\triangle BED} = 36_{cm^2}$ **ב.** $\frac{AB}{EF} = \frac{3}{4}$

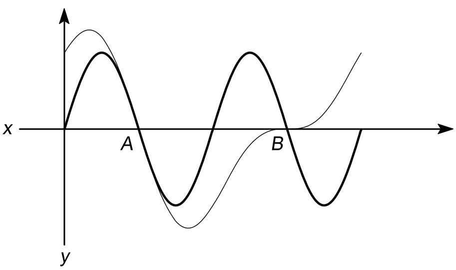
5. **א.** $ME = \frac{a\cos\alpha}{2\cos\beta}$ (יחידות אורך) **ב.** $AB = 2.2_{cm}$ **ג.** $\angle DCB = 49.94^{\circ}$

פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות שורש, פונ' רציונליות ופונ' טריגונומטריות

6. נתונות שתי פונקציות:

$f(x) = 0.5 \sin 2x + \cos x$ ו־ $g(x) = \sin 2x$

בתחום $0 \le x \le 2\pi$.



הגרפים של הפונקציות נפגשים בתחום הנתון

בשתי נקודות A ו־ B הנמצאות על ציר x .

א. דרך נקודה על ציר x

הנמצאת בין הנקודות A ו־ B , מעבירים אנך לציר x .

האנך חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ בנקודות M ו־ N .

מצא את האורך המקסימלי של הקטע MN .

ב. דרך נקודה על ציר x , הנמצאת בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, מעבירים אנך לציר x .

האנך חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ בנקודות K ו־ L .

מצא את האורך המקסימלי של הקטע KL .

7. נתונות הפונקציות $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$ ו־ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2+2}}$.

א. מצא עבור כל אחת מהפונקציות את:

(1) תחום ההגדרה

(2) האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה)

(3) השיעורים של נקודות הקיצון (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה אחת בלבד.

ג. נתונה הפונקציה $h(x) = g(x) - k$, $k > 0$.

עבור אילו ערכים של k אין לפונקציה $h(x)$ נקודות חיתוך עם הפונקציה $f(x)$? נמק.

תשובות

6. א. $MN_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (יחידות אורך) **ב.** $KL_{max} = 1$ (יחידת אורך)

7. א. (1) $f: x \ge 0$, $g: \forall x$

(2) $f: y = 0$, $g: y = 0$

(3) $f: min_{ep.}(0,0)$, $max\ (1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $g: max\ (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

ג. $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$

.8 נתון כי הפונקציה $f(x)$ ופונקצית הנגזרת שלה $f'(x)$

מקיימות: $\int_0^3 \frac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}dx = 3$.

נתון גם: $f'(x) = kx + 2$, $f(0) = 1$. k הוא פרמטר.

א. מצא את הערך המספרי של $f(3)$, ומצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

(1) הראה כי $g(x) = |x+1|$.

(2) סרטט במערכת צירים אחת את סקיצות הגרפים של $f(x)$ ושל $g(x)$.

בהצלחה

מעגל תשע הנקודות

בשנת 1765 גילה **אוילר** שתשע הנקודות הבאות במשולש: אמצעי הצלעות, עקבי גבהי המשולש, ונקודות האמצע שבין קדקודי המשולש לנקודת מפגש גבהיו - נמצאים על מעגל אחד.

ב־1822 גילה **קרל וילהלם פיירבך** שמעגל זה משיק גם לשלושת המעגלים המשיקים למשולש מבחוץ.

מעגל זה נקרא גם '**מעגל אוילר**' וגם '**מעגל פיינבך**'.

יש נקודות שמתלכדות בחלק מהמשולשים:

במשולש שווה־שוקיים יש שמונה נקודות (הגובה לבסיס הוא גם תיכון),

במשולש שווה־צלעות - שש נקודות, במשולש ישר־זווית - חמש נקודות

ובמשולש ישר־זווית ושווה־שוקיים - ארבע נקודות.

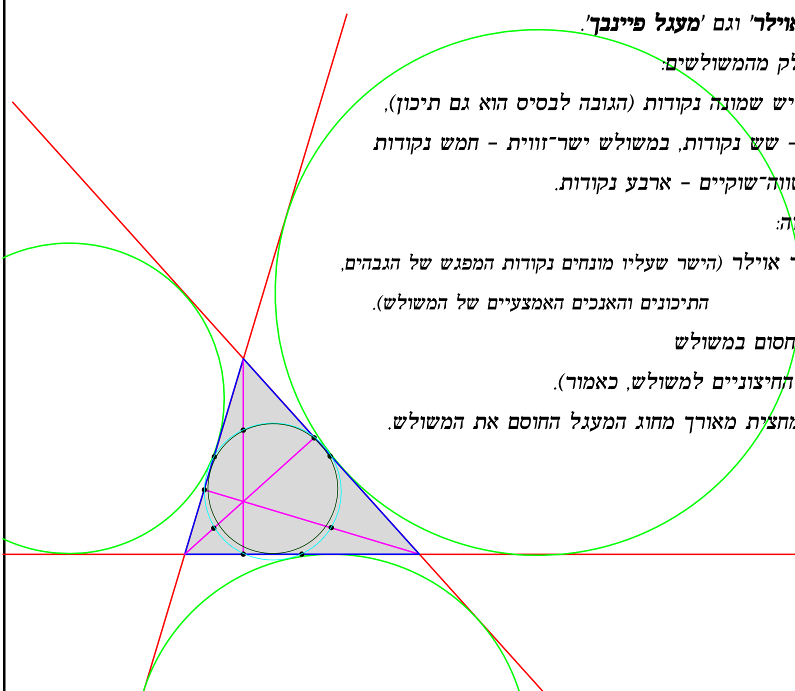
תכונות נוספות של מעגל זה:

מרכז המעגל נמצא על ישר אוילר (הישר שעליו מונחים נקודות המפגש של הגבהים, התיכונים והאנכים האמצעיים של המשולש).

המעגל משיק גם למעגל החסום במשולש

(בנוסף לשלושת המעגלים החיצוניים למשולש, כאמור).

אורך מחוג המעגל שווה למחצית מאורך מחוג המעגל החוסם את המשולש.



תשובות

.8 א. $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $f(3) = 16$

מבחן 30 - חורף תשע"ח - 2018

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 , שאלה אחת מהשאלות 4-5 , שתי שאלות מהשאלות 6-8

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. בכפר נופש יש שתי בריכות: בריכה א׳ ובריכה ב׳.

הנפח של בריכה א׳ הוא V_1 והנפח של בריכה ב׳ הוא V_2 .

את הבריכות ממלאים באמצעות 4 צינורות בעלי אותו הֶספק.

ביום כלשהו שתי הבריכות היו ריקות.

התחילו למלא את בריכה א׳ באמצעות ארבעת הציונורת.

כאשר התמלאה בריכה א׳ לכדי $\frac{1}{6}$ מנפחה,

העבירו אחד מן הצינורות לבריכה ב׳ והתחילו למלא אותה באמצעותו.

כאשר התמלאה בריכה א׳ עד מחציתה, העבירו עוד שני צינורות למילוי בריכה ב׳.

מילוי שתי הבריכות הסתיים באותה שעה.

כל הצינורות הזרימו מים ללא הפסקה עד שהתמלאו שתי הבריכות.

חשב את היחס $\frac{V_1}{V_2}$.

2. a_n היא סדרה חשבונית שההפרש שלה, d, שונה מ־ 0 . נתון: $a_7 = -a_{17}$.

א. מצא את a_{12} .

ב. **(1)** האם קיים בסדרה איבר שערכו שווה ל־ $-a_1$? נמק.

(2) מצא מספר טבעי n , שעבורו סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל־ 0 .

ג. האם קיים n טבעי שעבורו: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$? אם כן - מצא n כזה, אם לא - נמק.

ד. האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק (הבחן בין מקרים שונים).

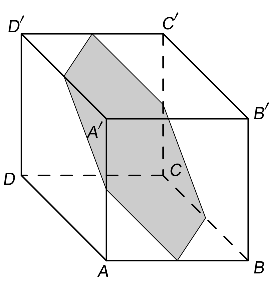
חתך משושה של קוביה

בקוביה $ABCDA'B'C'D'$,

נסמן את אמצעי המקצועות: AA' , AB , BC , CC' , $C'D'$, $A'D'$.

נעביר מישור דרך שש הנקודות שסימנו.

חתך המישור עם הקוביה הוא משושה משוכלל.



תשובות

1. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{18}{29}$

2. **א.** $a_{12} = 0$ **ב. (1)** $a_{23} = -a_1$ **(2)** $n = 23$ **ג.** לא **ד.** $a_1 > 0 \Rightarrow \infty$, $a_1 < 0 \Rightarrow 11$

3. למיכל יש קוביה מאוזנת.

על שלוש מפאות הקוביה כתוב המספר 2, ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4.

לגלית יש קוביה מאוזנת אחרת.

על כל אחת מפאות הקוביה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3 .

מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים.

המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק.

בכל סיבוב של המשחק כל אחת מטילה את הקוביה שלה פעם אחת.

המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקוביה שלה גבוה יותר.

נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.

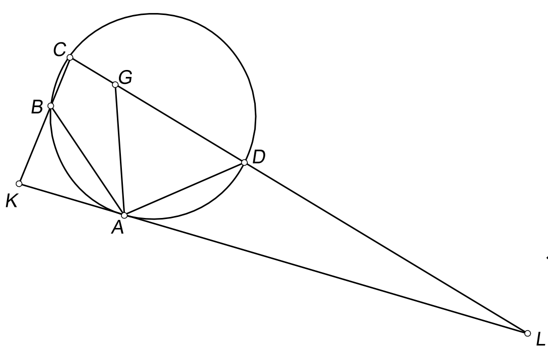
א. על כמה פאות בקוביה של גלית כתוב המספר 1 ? נמק.

ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?

ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. המרובע $ABCD$ חסום במעגל.



הנקודה G נמצאת על הצלע CD

כך ש־ $AB = AG$ וגם $CB = CG$.

המשיק למעגל בנקודה A חותך

את המשך הצלע CD בנקודה L

וחותך את המשך הצלע CB בנקודה K .

א. הוכח כי $AD = AG$.

ב. **(1)** הוכח כי $\triangle ABK \sim \triangle CDA$.

(2) הוכח כי $AD^2 = BK \cdot CD$.

ג. הראה כי $\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{LA}{AK}$.

יוסי גמזו כתב לשלישיית גשר הירקון את השיר 'סימן שאתה צעיר' (מי שזוכר - סימן שהוא כבר אינו צעיר . . .).
אחת השורות בשיר זה היא: 'אם יש לך זהב בלב וְלֹא בֵּין הַשִּׁינַיִים - סימן שאתה צעיר'.
כל פעם שאני שומע שורה זו, מזמם לי בראש: 'אם יש לך זהב בלב וְלֹבֶן בַּשִּׁינַיִים' . . .

תשובות

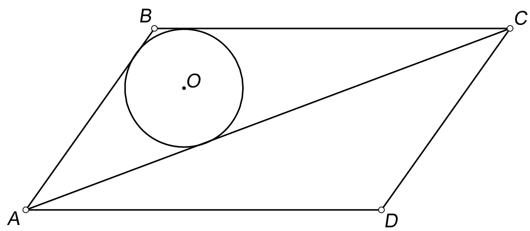
3. א. $1 , 3 , 3 , 3 , 3 , 3$ **ב.** $P = 0.3467$ **ג.** $P = 0.5534$

.5 נתונה מקבילית $ABCD$. AC הוא האלכסון הארוך.

במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו O .

הנקודה O נמצאת במרחקים 6 ו־ 3 יחידות אורך מן הישרים AD ו־ AC בהתאמה.

$OA = 10$ (יחידות אורך).



א. חשב את גודלי זוויות המקבילית.

ב. חשב את אורך האלכסון AC .

ג. חשב את שטח המקבילית.

<u>פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות שורש, פונ' רציונליות ופונ' טריגונומטריות</u>

.6 נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ ו־ $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

ענה על סעיף א עבור התחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר x .

(3) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה גם על סעיף ב עבור התחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$.

ב. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הוכח: $g(x) = -f(x - \frac{\pi}{2})$.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ג. מצא את ערך הביטוי $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$. נמק.

בגרות אפשר להשלים. ילדות אי אפשר להשלים.

תשובות

.5 **א.** $\angle B = \angle D = 125.67^\circ$, $\angle A = \angle C = 54.33^\circ$ **ב.** $AC = 27.08$ (יחידות אורך)

ג. $S_{ABCD} = 171.76$ (יחידות ריבועיות)

.6 **א.** **(1)** $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ **(2)** $x_{\rightarrow} = \pi$, $x_{\leftarrow} = -\frac{\pi}{2}$ **(3)** $\searrow: \emptyset$, $\nearrow: -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

ב. **(1)** $0 < x < \pi$ **ג.** $\int_{-0.25\pi}^{0.25\pi} f(x)\,dx = 0$

.7 נתונה משפחת הפונקציות: $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-a}$. $a \neq 0$ הוא פרמטר , $a \neq 4$.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a>0$ ובין $a<0$ במידת הצורך.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר x .

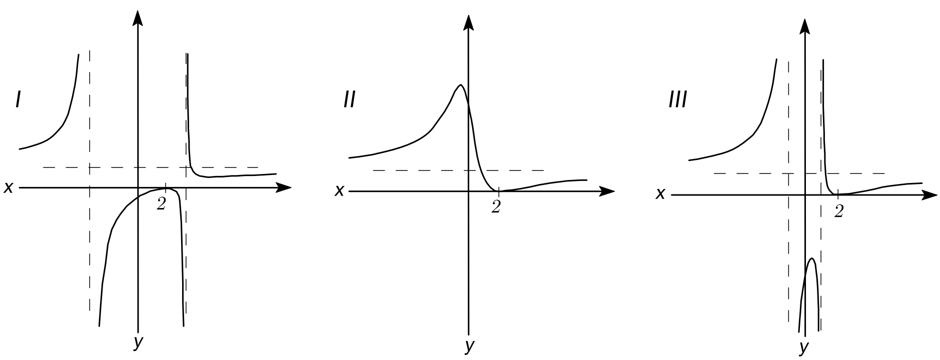
(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר x (אם יש כאלה).

ענה על סעיף ב. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a>4$ ובין $a<4$ במידת הצורך.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. לפניך שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה $f(x)$, כל אחד עבור ערך אחר של a .

כתוב מהו תחום הערכים של a המתאים לכל אחד מן הגרפים I-III . נמק.



.8 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=t$. $1 \le t \le 5$.

המשיק חותך את ציר x בנקודה A ואת ציר y בנקודה B . O היא ראשית הצירים.

א. מצא את שיעור x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

ב. מצא את שיעור x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.

בהצלחה

תשובות

.7 **א.** **(1)** $\underline{a>0:}\ x \neq \pm\sqrt{a}$, $\underline{a<0:}\ \forall x$ **(2)** $(2,0)$, $(0,-\frac{4}{a})$ **(3)** $y=1$

(4) $\underline{a>0:}\ x=\pm\sqrt{a}$, $\underline{a<0:}\ \emptyset$

ב. $\underline{a<4:}$ min $(2,0)$, max $(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a})$, $\underline{a>4:}$ min $(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a})$, max $(2,0)$

ג. $\underline{III:}\ 0<a<4$, $\underline{II:}\ a<0$, $\underline{I:}\ a>4$

.8 **א.-ב.** $x_{max}=5$, $x_{min}=\sqrt{3}$

פתרון מבחן 30

1. סימון: x - הספק צינור בבריכה א׳ (A) , y - הספק צינור בבריכה ב׳ (B)

היחס המבוקש בין הנפחים $\frac{V_1}{V_2}$ הוא גם היחס <u>ההפוך</u> בין ההספקים $\frac{y}{x}$.

דוגמה להמחשה: אם בריכה אחת היא 10 מ״ק ואחרת היא 20 מ״ק.

קצב צינור הוא 5 מ״ק/שעה, אזי הספקו לשעה בבריכה א׳ הוא $\frac{1}{2}$ ממנה, ובבריכה ב׳ - $\frac{1}{4}$ ממנה.

מתקיים: $\frac{10}{20}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$. סימונים: P - הספק ליחידת זמן , T - זמן , W - עבודה

	P	T	W
A	$4x$	$\frac{1}{6}:4x=\frac{1}{24x}$	$\frac{1}{6}$
A	$3x$	$\frac{1}{3}:3x=\frac{1}{9x}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$
B	y	$\frac{1}{9x}$	$\frac{y}{9x}$
A	x	$\frac{1}{2}:x=\frac{1}{2x}$	$\frac{1}{2}$
B	$3y$	$\frac{1-\frac{y}{9x}}{3y}$	$1-\frac{y}{9x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-\frac{y}{9x}}{3y}=\frac{1}{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{9x-y}{27xy}=\frac{1}{2x} \quad \Rightarrow \quad 18x-2y=27y$$

$$\Rightarrow \quad 18x=29y \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x}=\frac{18}{29} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{V_1}{V_2}=\frac{18}{29}}$$

---

2. א.

$$a_7=-a_{17} \quad \Rightarrow \quad a_1+6d=-(a_1+16d)=-a_1-16d$$

$$\Rightarrow \quad 2a_1=-22d \quad \Rightarrow \quad a_1=-11d \quad \Rightarrow \quad a_1+11d=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a_{12}=0}$$

ב. (1)

$$a_n=-a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1+d(n-1)=-a_1 \quad \Rightarrow \quad d(n-1)=-2a_1=-2\cdot(-11d) \quad /:d \ (\neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad n-1=22 \quad \Rightarrow \quad n=23 \ (\checkmark) \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{כן}}$$

(2)

$$S_n=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{2}(2a_1+d(n-1))=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{2}(-22d+d(n-1))=0 \quad /\cdot\frac{2}{d}$$

$$\Rightarrow \quad n(-22+n-1)=0 \quad \Rightarrow \quad n(n-23)=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n=23}$$

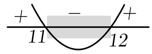
אפשר גם: על־פי ב(1):

$$a_{23}=-a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1+a_{23}=0 \quad \Rightarrow \quad S_{23}=\frac{23}{2}(a_1+a_{23})=11.5\cdot 0=0 \ (\checkmark)$$

ג.

$$a_n\cdot a_{n+1}<0 \iff (a_1+d(n-1))\cdot(a_1+dn)<0 \iff (-11d+d(n-1))\cdot(-11d+dn)<0 \quad /:d^2$$

$$\iff (-11+n-1)(-11+n)<0 \iff (n-12)(n-11)<0$$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow \quad 11<n<12 \quad \Rightarrow$ <u>**לא**</u>

אפשר גם: מכיון ש־ $a_{12}=0$ והסדרה חשבונית - אזי לכל 11 האיברים הראשונים יש

סימן זהה ($\pm$) ולשאר האיברים שאחרי a_{12} יש סימן זהה נגדי ($\mp$ בהתאמה).

מכפלה שלילית מחייבת סימנים נגדיים. לכן: <u>**לא**</u>.

ד. אם $a_1<0$ אז יש 11 איברים כאלה (עד $a_{12}=0$). אם $a_1>0$ - יש אינסוף איברים כאלה.

3. א. על x פאות הקוביה של גלית רשום 1 ועל $6-x$ פאות קוביתה רשום 3.

אם תוצאת ההטלה של מיכל היא 4 - היא מנצחת בסיבוב. הסיכוי: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

אם תוצאת ההטלה של מיכל היא 2 - היא תנצח רק אם התוצאה של גלית היא 1.

הסיכוי לכך הוא: $\frac{3}{6}\cdot\frac{x}{6}=\frac{x}{12}$ ומכאן:

הקוביה של גלית: 1 , 3 , 3 , 3 , 3 , 3 $\quad \frac{1}{2}+\frac{x}{12}=\frac{7}{12}\ \ /\cdot 12 \Rightarrow 6+x=7 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$

ב. $P(Galit)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12} \Rightarrow P=P_5(5)+P_5(4)+P_5(3)$

$$P=\left(\tfrac{5}{12}\right)^5+\binom{5}{4}\cdot\left(\tfrac{5}{12}\right)^4\cdot\left(\tfrac{7}{12}\right)^1+\binom{5}{3}\cdot\left(\tfrac{5}{12}\right)^3\cdot\left(\tfrac{7}{12}\right)^2=0.0126+0.0879+0.2462 \Rightarrow \mathbf{P=0.3467}$$

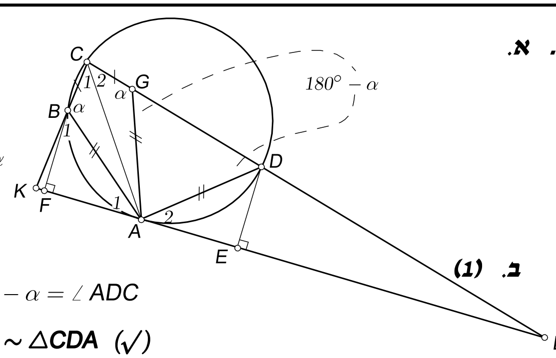
ג. לאחר שניצחה בראשון - מספיק שתנצח בלפחות שניים מארבעת הסיבובים שנותרו:

$$P=P_4(4)+P_4(3)+P_4(2)=\left(\tfrac{5}{12}\right)^4+\binom{4}{3}\cdot\left(\tfrac{5}{12}\right)^3\cdot\left(\tfrac{7}{12}\right)^1+\binom{4}{2}\cdot\left(\tfrac{5}{12}\right)^2\cdot\left(\tfrac{7}{12}\right)^2$$

$$=0.0301+0.1688+0.3545 \Rightarrow \mathbf{P=0.5534}$$

---

4. א.



$\triangle ABC \overset{(1)}{\cong} \triangle AGC$

$\angle ABC \overset{(2)}{=} \angle AGC \overset{(3)}{=} \alpha$

$\angle AGD \overset{(4)}{=} 180^\circ-\alpha\ ,\ \angle GDA \overset{(5)}{=} 180^\circ-\alpha$

$\angle AGD \overset{(6)}{=} \angle GDA \overset{(7)}{\Rightarrow} \mathbf{AD=AG}$ (✓)

ב. (1)

$\angle A_1 \overset{(8)}{=} \angle C_1 \overset{(9)}{=} \angle C_2\ ,\ \angle B_1 \overset{(4)}{=} 180^\circ-\alpha=\angle ADC$

$\overset{(10)}{\Rightarrow} \mathbf{\triangle ABK \sim \triangle CDA}$ (✓)

(2)

$AB \overset{(11)}{=} AG \overset{(12)}{=} AD \overset{(6)}{\Rightarrow} AB=AD$

$\frac{AB}{CD} \overset{(13)}{=} \frac{BK}{AD} \Rightarrow AB\cdot AD=BK\cdot CD \overset{(14)}{\Rightarrow} \mathbf{AD^2=BK\cdot CD}$ (✓)

ג.

(15) $DE\perp KL\ ,\ BF\perp KL \Rightarrow \angle BFA=\angle DEA=90^\circ\ ,\ AD \overset{(12)}{=} AB$

$\angle A_2 \overset{(8)}{=} \angle C_2 \overset{(6)}{=} \angle A_1 \Rightarrow \angle A_1 \overset{(6)}{=} \angle A_2 \overset{(16)}{\Rightarrow} \angle FBA=\angle EDA \overset{(17)}{\Rightarrow} \triangle BFA \cong \triangle DEA$

$\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}}=\frac{\frac{LA\cdot DE}{2}}{\frac{AK\cdot BF}{2}}\ ,\ BF \overset{(18)}{=} DE \Rightarrow \mathbf{\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}}=\frac{LA}{AK}}$ (✓)

---

(1) משפט חפיפה צלע־צלע־צלע (2) זוויות מתאימות במשולשים חופפים (3) סימון (4) השלמה לזווית שטוחה

(5) זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל־ 180° (6) כלל המעבר

(7) מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות

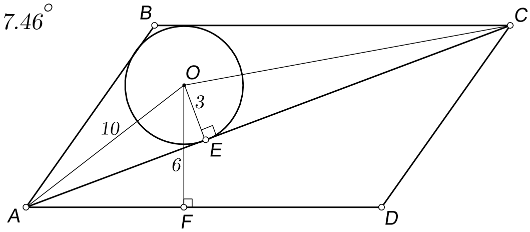
(8) זווית בין משיק למיתר במעגל שווה לזווית היקפית הנשענת על המיתר מצידו האחר

(9) אלכסון ראשי בדלתון (ABCG) חוצה את זוויות הראש (10) משפט דמיון זווית־זווית (11) נתון

(12) הוכח (13) יחס הדמיון (14) הצבה (15) בניית עזר (16) השלמה ל־ 180° במשולש

(17) משפט חפיפה זווית־צלע־זווית (18) צלעות מתאימות במשולשים חופפים

5. א.



$\underline{\triangle OEA:}\ \sin\angle OAE=\frac{3}{10}\ \Rightarrow\ \angle OAE=17.46^\circ$

$(1)\ \angle BAO=\angle OAE=17.46^\circ$

$\underline{\triangle OFA:}\ \sin\angle OAF=\frac{6}{10}$

$\Rightarrow\ \angle OAF=36.87^\circ$

$\angle BAD=\angle BAO+\angle FAO=17.46^\circ+36.87^\circ\ \Rightarrow^{(2)}\ \mathbf{\angle A=\angle C=54.33^\circ}$

$\angle B=^{(2)}\angle D=^{(3)}180^\circ-54.33^\circ\ \Rightarrow\ \mathbf{\angle B=\angle D=125.67^\circ}$

ב.

$\angle ACB=^{(4)}\angle CAD=36.87^\circ-17.46^\circ=19.41^\circ\ \Rightarrow^{(1)}\ \angle OCE=\frac{19.41^\circ}{2}=9.705^\circ$

$\underline{\triangle OEC:}\ tg\ 9.705^\circ=\frac{3}{EC}\ \Rightarrow\ EC=\frac{3}{tg\ 9.705^\circ}=17.54$

$\underline{\triangle OEA:}\ AE=^{(5)}\sqrt{10^2-3^2}=\sqrt{91}=9.54$

$AC=AE+EC=9.54+17.54\ \Rightarrow\ \mathbf{AC=27.08}$ **(יחידות אורך)**

ג.

$\underline{\triangle ABC:}\ (6)\ \frac{AB}{\sin 19.41^\circ}=\frac{27.08}{\sin 125.67^\circ}\ \Rightarrow\ AB=\frac{27.08\cdot\sin 19.41^\circ}{\sin 125.67^\circ}=11.08$

$(7)\ \triangle ABC\cong\triangle CDA\ \Rightarrow\ S_{ABCD}=2\,S_{\triangle ABC}=\cancel{2}\cdot\frac{AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC}{\cancel{2}}$

$S_{ABCD}=11.08\cdot 27.08\cdot\sin(2\cdot 17.46^\circ)\ \Rightarrow\ \mathbf{S_{ABCD}=171.76}$ **(יחידות ריבועיות)**

---

(1) מרכז מעגל חסום במשולש הוא מפגש חוצי־זוויותיו

(2) זוויות נגדיות במקבילית שוות זו לזו (3) זוויות סמוכות במקבילית משלימות ל־ 180°

(4) זוויות מתחלפות במקבילים הנחתכים על־ידי ישר שלישי, שוות זו לזו

(5) פיתגורס (6) משפט הסינוסים

(7) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו. משפט חפיפה צלע־צלע־צלע

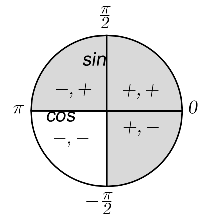
לקראת סוף 1944 דרשה ה'הגנה' מאצ"ל להפסיק מיידית את המרד בבריטים. הלחצים מצד ה'הגנה' גברו מפגישה לפגישה, עד הפגישה האחרונה שבה הוגש האולטימטום האחרון על ידי משה דיין: "אם לא תפסיקו מחר בבוקר – נפגע בכם". שלמה לב־עמי, איש האצ"ל, וחבריו לפגישה ענו לדיין: "בשום אופן לא נפסיק להילחם. בוז לכם. ההסטוריה תשפוט אתכם". על כך ענה משה דיין: "אין לנו ממה לחשוש. אנחנו נכתוב את ההסטוריה".

6. א. (1)

$f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\quad,\quad -\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$

$\sqrt{\cos x}\quad\Rightarrow\quad \cos x>0\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}}$

(ראה ציור)



(2)

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}=\dfrac{\to -1}{\to +0}=-\infty\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x_{\leftarrow}=-\frac{\pi}{2}}$

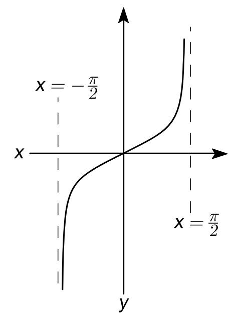
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}=\dfrac{\to 1}{\to +0}=+\infty\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x_{\to}=\frac{\pi}{2}}$

(3)

$f'(x)=\dfrac{\cos x\sqrt{\cos x}-\sin x\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}=\dfrac{2\cos^2 x+\sin^2 x}{2\cos x\sqrt{\cos x}}>0\ \ \forall\{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\}$

$\Rightarrow\quad \underline{\nearrow}:\ \boldsymbol{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}}\quad,\quad \underline{\searrow}:\ \boldsymbol{\emptyset}$

(4)



ב. (1)

$g(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\quad,\quad -\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$

$\sqrt{\sin x}\quad\Rightarrow\quad \sin x>0\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{0<x<\pi}$

(ראה ציור לעיל)

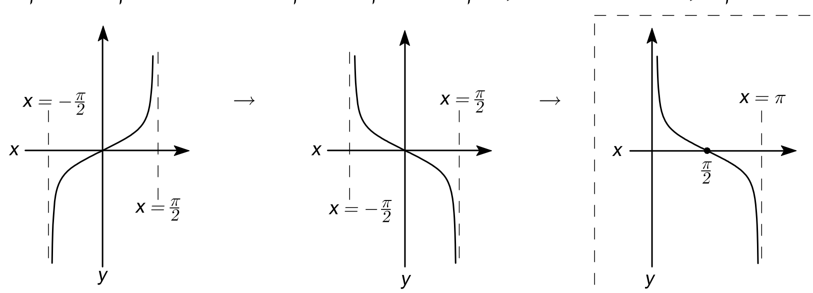
(2)

$-f(x-\frac{\pi}{2})=-\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\cos(x-\frac{\pi}{2})}}\overset{(1)}{=}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}}\overset{(2)}{=}\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}=g(x)\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{g(x)=-f(x-\frac{\pi}{2})}\ \ (\checkmark)$

(3)

שינוי סימן הפונקציה (הכפלה ב־ (-1)) משקפת את הגרף ביחס לציר x.

הורדת קבוע מהמשתנה x מעתיקה את גרף הפונקציה ימינה באורך אותו קבוע:



ג. $f(x)$ היא פונקציה אי־זוגית:

$f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\sqrt{\cos(-x)}}=\dfrac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}}=-\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}=-f(x)\quad,\quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(x)\,dx<0$

בגלל אי־הזוגיות מתקיים גם: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx=\left|\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(x)\,dx\right|$ ולכן: $\boldsymbol{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx=0}$

ואפשר גם (הרבה יותר קשה):

$\int\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx=-2\int\dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot(-\sin x)\,dx=-2\int\dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}\cdot u'(x)\,dx=-2\sqrt{u(x)}+c$

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx=-2\sqrt{\cos x}\,\Big|_{-0.25\pi}^{0.25\pi}=-2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\left(-2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx=0}$

---

(1) $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$; (2) $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

7. א. (1)

$f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-a}\ ,\ a\neq 0\ ,\ a\neq 4\ .\quad x^2-a\neq 0\ \Rightarrow\ x^2\neq a\ \Rightarrow$ $\underline{a<0:}\ \forall x$, $\underline{a>0:}\ x\neq\pm\sqrt{a}$

(2)

$x=0\ \Rightarrow\ y=\frac{4}{-a}\ \Rightarrow\ \mathbf{(0,-\frac{4}{a})}$

$y=0\ \Rightarrow\ (x-2)^2=0\ \Rightarrow\ x=2\ \Rightarrow\ \mathbf{(2,0)}$

(3)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2-a}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2})}{\cancel{x^2}(1-\frac{a}{x^2})}=\frac{\to 1-0+0}{\to 1-0}=1\ \Rightarrow\ \mathbf{y=1}$$

(4)

$\underline{a<0:}\ \emptyset$

$$\underline{a>0:}\ \lim_{x\to\pm\sqrt{a}}\frac{(x-2)^2}{x^2-a}=\frac{\to(\pm\sqrt{a}-2)^2}{\to 0}\underset{\substack{\uparrow\\ a\neq 4}}{=}\frac{\neq 0}{\to 0}=\infty\ \Rightarrow\ \mathbf{x=\pm\sqrt{a}}$$

ב.

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x^2-a)-2x(x-2)^2}{(x^2-a)^2}=\frac{2(x-2)(x^2-a-x(x-2))}{(x^2-a)^2}=\frac{2(x-2)(2x-a)}{(x^2-a)^2}\overset{?}{=}0\ \Rightarrow\ x_1=2\ ,\ x_2=\frac{a}{2}$$

כדי למצוא את סימן הנגזרת השניה, מספיק לגזור את מונה הנגזרת הראשונה,

מכיון שמכנה הנגזרת הראשונה חיובי עבור אותם שיעורי x חשודים.

$$((x-2)(2x-a))'=(2x^2-ax-4x+2a)'=4x-a-4$$

$x=2\ \Rightarrow\ 8-a-4=4-a\ \Rightarrow$ $\quad a>4\ \Rightarrow\ f''<0\ \Rightarrow\ max$; $\quad a<4\ \Rightarrow\ f''>0\ \Rightarrow\ min$

$x=\frac{a}{2}\ \Rightarrow\ 2a-a-4=a-4\ \Rightarrow$ $\quad a>4\ \Rightarrow\ f''>0\ \Rightarrow\ min$; $\quad a<4\ \Rightarrow\ f''<0\ \Rightarrow\ max$

$$f(\tfrac{a}{2})=\frac{(\frac{a}{2}-2)^2}{\frac{a^2}{4}-a}=\frac{(\frac{1}{2}(a-4))^2}{\frac{a^2}{4}-a}=\frac{\frac{1}{4}(a-4)^2}{\frac{a}{4}(a-4)}=\frac{a-4}{a}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\mathbf{a>4:}}$ **max $(2,0)$, min $(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a})$** , $\underline{\mathbf{a<4:}}$ **max $(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a})$, min $(2,0)$**

ג. גרף I מתאים ל־ $a>4$, על־פי נקודות הקיצון לעיל.

גרף II מתאים ל־ $a<0$, שזה המקרה שבו תחום ההגדרה הוא כל x .

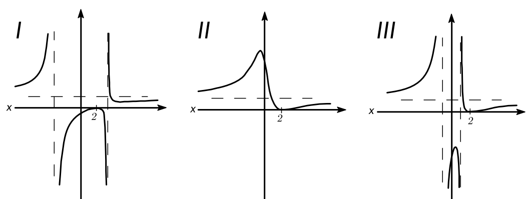
גרף III מתאים ל־ $0<a<4$, על־פי נקודות הקיצון לעיל.

סיכום:

I: $a>4$

II: $a<0$

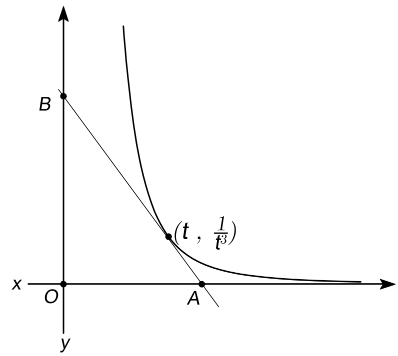
III: $0<a<4$



$a>4$ $\quad$ $a<0$ $\quad$ $0<a<4$

8. א.-ב.

$f(x)=\frac{1}{x^3}\ \ ,\ \ 1\le t\le 5 \quad\Rightarrow\quad f(t)=\frac{1}{t^3}>0$



$f'(x)=(x^{-3})'=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$

$\Rightarrow\quad f'(t)=-\frac{3}{t^4}$

$y-\frac{1}{t^3}=-\frac{3}{t^4}(x-t)\quad\Rightarrow\quad y-\frac{1}{t^3}=-\frac{3}{t^4}x+\frac{3}{t^3}$

$\Rightarrow\quad y=-\frac{3}{t^4}x+\frac{4}{t^3}$

$\underline{A:}\ \ y=0\quad\Rightarrow\quad -\frac{3}{t^4}x+\frac{4}{t^3}=0$

$\Rightarrow\quad \frac{3}{t^4}x=\frac{4}{t^3}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{4t}{3}\quad\Rightarrow\quad A(\frac{4t}{3},0)$

$\underline{B:}\ \ x=0\quad\Rightarrow\quad y=\frac{4}{t^3}\quad\Rightarrow\quad B(0,\frac{4}{t^3})$

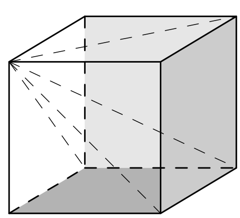
$S(t)=AO+BO=\frac{4t}{3}+\frac{4}{t^3}$

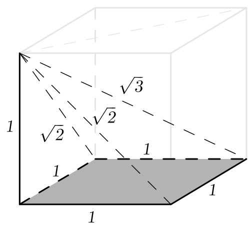
$S'(t)=\frac{4}{3}-3\cdot\frac{4}{t^4}\overset{?}{=}0\quad\Rightarrow\quad \frac{12}{t^4}=\frac{4}{3}\quad\Rightarrow\quad t^4=\frac{12\cdot 3}{4}=9\quad\Rightarrow\quad t=\sqrt{3}\quad\Leftarrow\quad 1\le t\le 5$

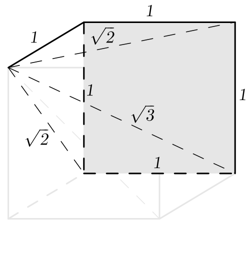
$$\left.\begin{aligned} &S(1)=\frac{4}{3}+4=5\frac{1}{3}\\ &S(\sqrt{3})=\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4\cdot 3+4}{3\sqrt{3}}=\frac{16}{3\sqrt{3}}=3.08\\ &S(5)=\frac{20}{3}+\frac{4}{125}=6.7\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x_{min}=\sqrt{3}\ \ ,\ \ x_{max}=5}$$

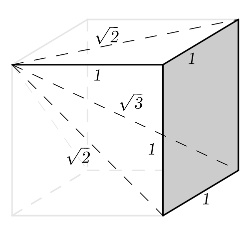
ניתן לחלק קוביה לשלוש פירמידות זהות.

בציור מודגמת החלוקה על קוביה שאורך צלעה הוא יחידת אורך אחת.







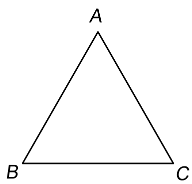


מבחן 35 - קיץ תשע"ט - 2019 - מועד ב

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 , שאלה אחת מהשאלות 4-5 , שתי שאלות מהשאלות 6-8

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. בציור מתואר מסלול לרכיבה באופניים בצורת משולש שווה־צלעות ABC ,



שאורך צלעו a מטר.

שני רוכבי אופניים יצאו באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B.

הם רכבו לאותו הכיוון לאורך המסלול המשולש.

כל אחד מהם רכב במהירות קבועה.

המהירות של רוכב א גדולה ב־ 2 מטרים לשניה מן המהירות של רוכב ב.

כאשר הגיע רוכב א אל הנקודה A לאחר שהשלים פעמיים את המסלול המשולש,

הגיע רוכב ב אל הנקודה B בפעם השניה.

א. מצא את המהירות של כל אחד מרוכבי האופניים.

ב. באיזו נקודה על המשולש יהיה רוכב ב,

כאשר יגיע רוכב א אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול המשולש?

כאשר הגיע רוכב א אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול,

הוא הסתובב והחל לרכוב לכיוון הנגדי - מן הנקודה A לכיוון הנקודה C, בלי לשנות את מהירותו.

רוכב ב המשיך לרכוב בכיוון הנסיעה המקורי, בלי לשנות את מהירותו. הרוכבים נפגשו בנקודה M.

ג. מצא על איזו צלע של המשולש נמצאת הנקודה M,

ומצא באיזה יחס הנקודה M מחלקת את הצלע שמצאת.

למחרת שוב יצאו הרוכבים מו הנקודה A, רכבו לכיוון הנקודה B והמשיכו לרכוב במסלול המשולש,

כל אחד מהם רכב באותה המהירות שרכב ביום שלפני כן.

רוכב א חלף על פני רוכב ב בפעם הראשונה 6 דקות אחרי שיצאו לדרך.

ד. מצא את היקף המשולש. נמק.

המילה הארוכה ביותר בתנ"ך היא בת 11 אותיות, ויש שלוש כאלה:

'וְהָאֲחַשְׁדַּרְפְּנִים' - אסתר ט' ג' , 'וּכְתוֹעֲבוֹתֵיהֶן' - יחזקאל ט"ז מ"ז , 'וְכַעֲלִילוֹתֵיכֶם' - יחזקאל כ' מ"ד

תשובות

1. **א.** $\underline{II:}\ 4_{m/sec}$, $\underline{I:}\ 6_{m/sec}$ **ב.** B **ג.** $BM : MC = 4 : 1$, BC **ד.** 720_m

2. נתונה סדרה a_n המקיימת לכל n טבעי את הכלל: $a_{n+1}+a_n=6n+5$.

א. הוכח כי מתקיים $a_{n+2}=a_n+c$ (c הוא מספר קבוע), ומצא את ערכו של c .

ב. רשום לפחות 4 איברים ראשונים של סדרה a_n המקיימת את הכלל והיא אינה סדרה חשבונית.

נתון כי הסדרה a_n כולה היא חשבונית.

ג. חשב את ערכו של a_1 .

בנו סדרה חדשה בת $2n+1$ איברים: $a_1-1\ ,\ a_2-2\ ,\ a_3-3\ ,\ ...\ ,\ a_{2n+1}-(2n+1)$.

האיבר האמצעי בסדרה החדשה הוא 43.

ד. חשב את סכום הסדרה החדשה.

3. בקופסה יש 12 כדורים כחולים, 20 כדורים אדומים ו־8 כדורים צהובים.

על 28 מן הכדורים רשומה הספרה 1, ועל השאר רשומה הספרה 0.

$\frac{1}{4}$ מן הכדורים שרשומה עליהם הספרה 1 הם צהובים.

מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה 1 גדול פי 4

ממספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה 0.

דני מוציא באקראי כדור מן הקופסה.

א. מהי ההסתברות שהכדור שדני הוציא הוא כדור כחול ושרשומה עליו הספרה 1 ?

ב. אם ידוע שדני הוציא באקראי כדור כחול <u>או</u> כדור שרשומה עליו הספרה 1,

מהי הסתברות שהוא הוציא כדור שרשומה עליו הספרה 0 ?

דני החזיר את הכדור לקופסה, וכעת הוא משחק במשחק:

הוא מוציא באקראי כדור מן הקופסה,

רושם לעצמו את הספרה שעליו ומחזיר את הכדור לקופסה.

בכל פעם שהוא מוציא כדור שרשומה עליו הספרה 1 הוא צובר נקודה.

הוא יפסיק לשחק כאשר הוא יצבור 5 נקודות.

ג. מהי ההסתברות שדני יצבור 5 נקודות אחרי 6 פעמים <u>בדיוק</u> ?

לעולם אל תפריע לאויב שלך כשהוא טועה (נפוליאון בונפרטה)

תשובות

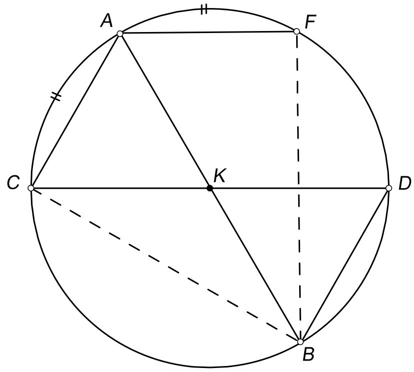
2. **א.** $c=6$ **ב.** $1\ ,\ 10\ ,\ 7\ ,\ 16\ ,\ ...$ **ג.** $a_1=4$ **ד.** $S_{41}=1763$

3. **א.** $P=\frac{9}{40}$ **ב.** $P=\frac{3}{31}$ **ג.** $P=0.252105$

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

.4 AB הוא קוטר במעגל. CD ו־ AF הם שני מיתרים במעגל המקבילים זה לזה.

AB ו־ CD נחתכים בנקודה K . $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{AF}$.



א. הוכח: **(1)** $\angle FAB = \angle CAB$.

(2) $BK = BD$.

ב. הוכח כי המרובע $AFKC$ הוא מעוין.

ג. נתון גם כי $BD \cdot AB = CD \cdot AC$.

הוכח: **(1)** $\triangle BDC \sim \triangle CAB$.

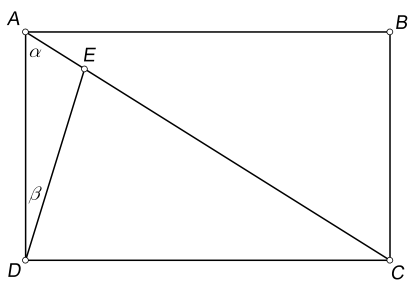
(2) CD הוא קוטר במעגל.

(שים לב: CD בציור הוא קוטר, אבל זה אינו נתון.
הציור מותאם לסוף השאלה. במקור CD אכן אינו מצויר כקוטר.)

.5 המרובע $ABCD$ הוא מלבן.

E היא נקודה על האלכסון AC.

$\angle ADE = \beta$, $\angle DAC = \alpha$.



R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן $ABCD$.

R_2 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE .

א. הבע את היחס $\frac{R_1}{R_2}$ באמצעות α ו־ β .

ב. הראה כי כאשר $\alpha = \beta$ מתקיים $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. נתון כי $\beta = 15^\circ$, $\alpha = 60^\circ$.

(1) הראה כי $\triangle DEC$ הוא שווה־שוקיים.

(2) הבע את BE^2 באמצעות R_1 .

היה לי פעם ידיד, אברהם יעקב ז"ל, בן למעלה מ־80.
כשנשאל לגילו, היה עונה שהוא יותר קרוב ל־70 שנה מאשר ל־60 שנה.

תשובות

.5 א. $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$ **ג. (2)** $BE^2 = (4-\sqrt{3})\,R_1^2$

פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות שורש, פונ' רציונליות ופונ' טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x) = a\cos 2x + \sin^2 x$ המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$. a הוא פרמטר.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא 'זוגית' או 'אי־זוגית' או אף לא אחת מהן? נמק.

ב. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (הבע בעזרת a, אם צריך),

אם נתון כי הפונקציה אינה קבועה?

קבע את סוגן בהתאם לערך של a (התייחס לשתי האפשרויות של a).

ג. מצא את הערך של a שעבורו הפונקציה $f(x)$ היא קבועה. נמק.

נתון: $a > 1$.

ד. **(1)** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$.

ה. השטח המוגבל על־ידי גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$ ועל־ידי ציר x שווה ל־12 יחידות ריבועיות.

מצא את ערכו של הפרמטר a .

7. נתון מעגל ובו קוטר AB . רדיוס המעגל הוא 10 .

הנקודה P נמצאת על הקוטר AB בין מרכז המעגל ובין הנקודה B .

דרך הנקודה P מעבירים אנך ל־ AB החותך את המעגל בנקודות C ו־ D .

מצא את השטח המקסימלי של המשולש ACD .

תשובות

6. א. זוגית **ב.** $a < \frac{1}{2}:\ min_{ep.}(\pm\pi, a)\ ,\ max\ (\pm\frac{\pi}{2}, 1-a)\ ,\ min\ (0, a)$

$a > \frac{1}{2}:\ max_{ep.}(\pm\pi, a)\ ,\ min\ (\pm\frac{\pi}{2}, 1-a)\ ,\ max\ (0, a)$

ג. $a = \frac{1}{2}$ **ה.** $a = 2$

7. $max\ S_{\triangle ACD} = 75\sqrt{3}$ (יחידות ריבועיות)

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+bx-c}{x^2-4}$. b ו־ c הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ זוגית.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר b .

נתון: לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר x

בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצא את תחום הערכים של c .

ד. **(1)** מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

הבע באמצעות c, אם צריך.

(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$,

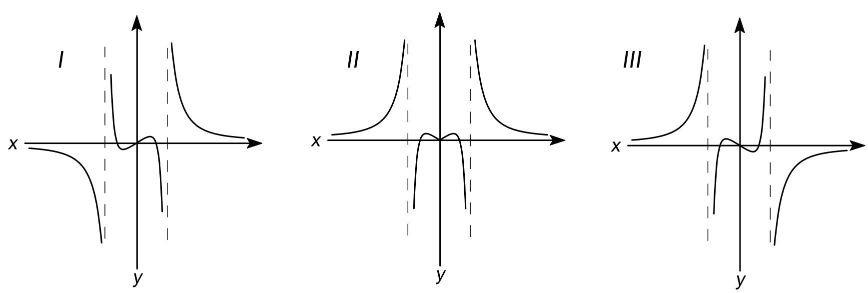
וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$

המוגדרות באותו תחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$.

(1) איזה מהגרפים שלפניך הוא גרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) הבע באמצעות c את השטח המוגבל על־ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל־ידי ציר x .



בהצלחה

שקרן – צריך שיהיה לו זכרון טוב (פתגם ערבי)

תשובות

8. **א.** $x \neq \pm 2$ **ב.** $b=0$ **ג.** $0<c<4$ **ד.** **(1)** max $(0,\frac{c}{4})$ **(2)** $y=1$

ה. **(1)** III **(2)** $S=\frac{c^2}{16}$ (יחידות ריבועיות)

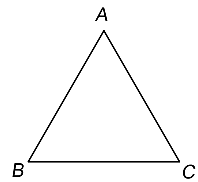
פתרון מבחן 35

1. א.

	V	S	T
I	$x+2$	$6a$	$\frac{6a}{x+2}$
II	x	$4a$	$\frac{4a}{x}$

$\Rightarrow \quad \frac{6a}{x+2} = \frac{4a}{x} \quad / \cdot \frac{x(x+2)}{2a}$

$3x = 2(x+2) \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{I:}\ \mathbf{6_{m/sec}} \ , \ \underline{II:}\ \mathbf{4_{m/sec}}$



ב.

$T_I = \frac{15a}{6} = \frac{5a}{2} = T_{II} \quad \Rightarrow \quad S_{II} = 4 \cdot \frac{5a}{2} = 10a = 3 \cdot 3a + a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}$

ג.

	V	T	S
$I:\ A \rightarrow C$	6	y	$6y$
$II:\ B \rightarrow C$	4	y	$4y$

$\Rightarrow \quad 6y + 4y = 2a \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{5} \quad \Rightarrow \quad 6y = a + \frac{1}{5}a$

$\Rightarrow \quad \mathbf{BC\ ,\ BM : MC = 4 : 1}$

ד. היקף המשולש הוא הפרש הדרכים ביניהם.

	V	T	S
I	6	$6 \cdot 60 = 360$	2160
II	4	360	1440

$\Rightarrow \quad 2160 - 1440 = 3a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{3a = 720_m}$

---

2. א.

$a_{n+1} + a_n = 6n + 5 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = -a_n + 6n + 5$

$a_{n+2} + a_{n+1} = 6(n+1) + 5 = 6n + 11 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} - a_n + 6n + 5 = 6n + 11 \quad / + a_n - 6n$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a_{n+2} = a_n + 6} \ \ (\checkmark) \ , \ \ \mathbf{c = 6}$

ב.

$a_{n+1} = -a_n + 6n + 5 \ , \ a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -1 + 6 \cdot 1 + 5 = 10$

$\Rightarrow \quad a_3 = -10 + 6 \cdot 2 + 5 = 7 \quad \Rightarrow \quad a_4 = -7 + 6 \cdot 3 + 5 = 16 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{1\ ,\ 10\ ,\ 7\ ,\ 16\ ,\ ...}$

ג.

$a_{n+2} - a_n = 6 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{6}{2} = 3$

$a_2 + a_1 = 6 \cdot 1 + 5 \quad \Rightarrow \quad a_1 + 3 + a_1 = 11 \quad \Rightarrow \quad 2a_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a_1 = 4}$

ד. b_n - סימון הסדרה החדשה.

$a_1 - 1\ ,\ a_2 - 2\ ,\ a_3 - 3\ ,\ ...\ ,\ a_{2n+1} - (2n+1)$

$2n + 1 = n + 1 + n \quad \Rightarrow \quad {}_{n+1} = a_{n+1} - (n+1) = 43 \quad \Rightarrow \quad 4 + 3 \cdot n - n - 1 = 43$

האיבר האמצעי

$\Rightarrow \quad 2n = 40 \quad \Rightarrow \quad n = 20 \quad \Rightarrow \quad 2n + 1 = 41$

$S_{2n+1} = S_{41} = \frac{41}{2}(2 \cdot 4 + 3 \cdot 40) + \frac{41}{2}(-1 - 41) = \frac{41}{2} \cdot 128 - \frac{41}{2} \cdot 42 = 2624 - 861$

$\Rightarrow \quad \mathbf{S_{41} = 1763}$

3. סימון מאורעות: B - כחול , R - אדום , Y - צהוב

	B	R	Y	$\sum$
1	$\frac{12}{40}-\frac{3}{40}=\frac{9}{40}$	$4x=\frac{12}{40}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{28}{40}=\frac{7}{40}$	$\frac{28}{40}$
0	$(*)\ \ x=\frac{3}{40}$		$\frac{8}{40}-\frac{7}{40}=\frac{1}{40}$	$1-\frac{28}{40}=\frac{12}{40}$
$\sum$	$\frac{12}{40}$	$\frac{20}{40}$	$\frac{8}{40}$	1

$$(*)\ \ \boxed{\frac{12}{40}-x=\frac{28}{40}-\frac{7}{40}-4x}\ /\cdot 40 \quad\Rightarrow\quad 12-40x=28-7-160x$$

$$\Rightarrow\quad 120x=9 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{9}{120}=\frac{3}{40}$$

א.

$$P=P(B\cap 1) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P=\frac{9}{40}}$$

ב.

$$P=P(0/(B\cup 1))=\frac{P(0\cap(B\cup 1))}{P(B\cup 1)}=\frac{P(0\cap B)}{P(B\cup 1)}=\frac{\frac{3}{40}}{\frac{12}{40}+\frac{28}{40}-\frac{9}{40}}=\frac{3}{12+28-9} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P=\frac{3}{31}}$$

ג. משמעות הנתון היא שבפעם ה־ 6 הוא צובר נקודה,

ובכל שאר 5 הפעמים הוא צובר 4 נקודות.

נפעיל את ברנולי על 5 הפעמים הראשונות והסברות רגילה על הפעם ה־ 6 :

$$P(1)=\frac{28}{40}=\frac{7}{10} \quad\Rightarrow\quad P=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^1\cdot\frac{7}{10}=5\cdot\frac{2401}{10000}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P=0.252105}$$

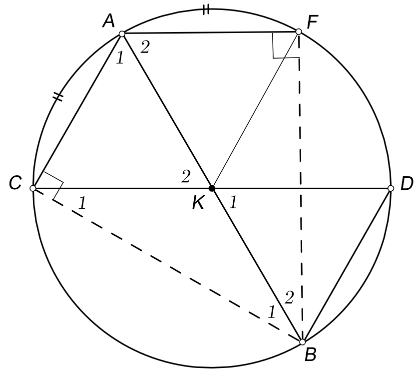
ביקורת עצמית

מרטין גרדנר (1914–2010), החידונאי האמריקאי הנודע בדור האחרון,

כתב פעם מאמר ביקורת בשם בדוי על ספרו: 'השאלות של הוגה פילוסופי'.

הוא סיפר פעם ששמע על אנשים שאכן לא רכשו את ספרו זה בעקבות אותה ביקורת . . .

4. א. (1)



$\angle B_1 \overset{(1)}{=} \angle B_2 \ , \ \angle ACB = \angle AFB \overset{(2)}{=} 90^\circ$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \ \mathbf{A_1 = \angle A_2} \ (\checkmark)$

(2)

$\angle K_1 \overset{(4)}{=} \angle A_2 \ , \ \angle D \overset{(5)}{=} \angle A_1$

$\angle K_1 \overset{(6)}{=} \angle D \quad \overset{(7)}{\Rightarrow} \mathbf{BK = BD} \ (\checkmark)$

ב.

$AF \overset{(8)}{=} AC \ , \ \angle K_1 \overset{(9)}{=} \angle K_2 \overset{(6)}{=} A_1 \quad \overset{(7)}{\Rightarrow} \ AC = CK$

$AF \overset{(6)}{=} CK \ , \ AF \overset{(10)}{\parallel} CK \quad \overset{(11)}{\Rightarrow} \underset{\text{מקבילית}}{AFKC} \quad \overset{(12)}{\Rightarrow} \underset{\text{מעוין}}{\mathbf{AFKC}} \ (\checkmark)$

ג. (1)

$BD \cdot AB \overset{(10)}{=} CD \cdot AC \quad \Rightarrow \quad \frac{BD}{AC} = \frac{CD}{AB}$

$\angle D = \angle A_1 \quad \overset{(13)}{\Rightarrow} \triangle \mathbf{BDC} \sim \triangle \mathbf{CAB} \ (\checkmark)$

(2)

$(14) \ \ \angle B_1 = \angle C_1 \ , \ \angle ABD \overset{(5)}{=} \angle ACD$

$\Rightarrow \quad \angle CBD = \angle C_1 + \angle ACD = \angle ACB = 90^\circ \quad \overset{(15)}{\Rightarrow} \mathbf{CD = 2R} \ (\checkmark)$

---

(1) זויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות (2) זווית היקפית הנשענת על קוטר

(3) השלמה ל- 180° במשולש (4) זוויות מתאימות במקבילים הנחתכים על-ידי ישר שלישי

(5) זוויות היקפיות הנשענות על אותו מיתר (6) כלל המעבר

(7) מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות (8) לקשתות שוות - מיתרים שווים

(9) זוויות קודקודיות (10) נתון

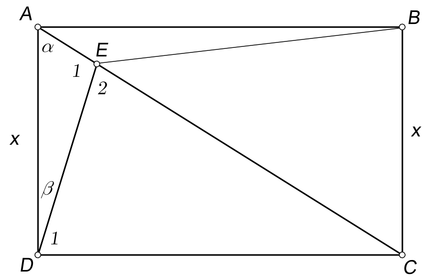
(11) מרובע שזוג צלעות בו שוות ומקבילות זו לזו - הוא מקבילית

(12) מקבילית ששתי צלעות סמוכות בה שוות היא מעוין (13) משפט דמיון צלע-זווית-צלע

(14) זוויות מתאימות במשולשים דומים (15) זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר

בתקופת רוסיה האדומה אנשים היו רוכשים נורות שרופות.
מדוע? אנשים הביאו את הנורה השרופה לעבודה. שם החליפו אותה בנורה תקינה.
את הנורה התקינה היו 'מאמצים' וקוראים לאיש התחזוקה להחליף את הנורה השרופה.
לאחר ההחלפה, הנורה השרופה היתה 'מאומצת' על-ידי איש האחזקה לשימוש זהה חוזר . . .

5. א.



$AD = BC \overset{(1)}{=} x \quad , \quad AC \overset{(2)}{=} 2R_1$

$\underline{\triangle ADC:}\quad \cos\alpha = \frac{x}{AC} = \frac{x}{2R_1}$

$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{x}{2\cos\alpha}$

$\underline{\triangle ADE:}\quad \frac{x}{\sin(180^\circ - (\alpha+\beta))} \overset{(3)}{=} 2R_2$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} \quad R_2 = \frac{x}{2\sin(\alpha+\beta)}$

$\frac{R_1}{R_2} = \frac{x}{2\cos\alpha} : \frac{x}{2\sin(\alpha+\beta)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}}$

ב.

$\alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha$

$\sin\alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad 2\sin\alpha < 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{R_1}{R_2} < 2} \ (\checkmark)$

ג. (1)

$\alpha = 60^\circ \quad , \quad \beta = 15^\circ \quad \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad \angle E_1 = 105^\circ \quad \overset{(6)}{\Rightarrow} \quad \angle E_2 = 75^\circ$

$\angle D_1 \overset{(7)}{=} 75^\circ \quad \overset{(8)}{\Rightarrow} \quad \boldsymbol{CD = CE} \ (\checkmark)$

(2)

$\underline{\triangle ADC:}\quad tg\ 60^\circ = \frac{CD}{x} \quad \Rightarrow \quad CD = x\sqrt{3}$

$CE = CD = x\sqrt{3}$

$\underline{\triangle BEC:}\quad BE^2 \overset{(9)}{=} x^2 + 3x^2 - 2\cdot x\cdot x\sqrt{3}\cdot\cos 60^\circ = 4x^2 - x^2\sqrt{3} = x^2(4-\sqrt{3})$

$= (2R_1\cos 60^\circ)^2(4-\sqrt{3}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{BE^2 = (4-\sqrt{3})R_1^2}$

$\uparrow$

$R_1 = \frac{x}{2\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad x = 2R_1\cos\alpha$

---

(1) סימון

(2) מרכז מעגל החוסם משולש ישר־זווית ACD הוא אמצע היתר. זה המעגל שחוסם גם את המלבן

(3) משפט הסינוסים (4) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ (5) השלמה ל־ 180° במשולש

(6) השלמה ל־ 180° של זווית שטוחה (7) השלמה ל־ 90°

(8) מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות (9) משפט הקוסינוסים

'נטול גלוטן' הוא פלינדרום . . .

6. א.

$f(x) = a\cos 2x + \sin^2 x \quad , \quad -\pi \le x \le \pi$

$f(-x) = a\cos(-2x) + \sin^2(-x) = a\cos 2x + (-\sin x)^2 = a\cos 2x + \sin^2 x = f(x) \quad \Rightarrow$ **זוגית**

ב.

$f'(x) = -2a\sin 2x + 2\sin x\cos x = -2a\sin 2x + \sin 2x = \boxed{(1-2a)\sin 2x} \overset{?}{=} 0$

$(1)\quad 1-2a=0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0 \ \forall x \quad \Rightarrow \quad f(x)=\text{constant} \quad \Rightarrow \quad \times$ נתון שהיא אינה קבועה

$(2)\quad \sin 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = k\pi \quad \Rightarrow \quad x=\frac{k\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\pi\ ,\ \pm\frac{\pi}{2}\ ,\ 0$

	x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$a<\frac{1}{2}$	f'	0	$++=+$	0	$+-=-$	0	$++=+$	0	$+-=-$	0
	f	$min_{ep.}$	↗	max	↘	min	↗	max	↘	$min_{ep.}$
$a>\frac{1}{2}$	f'	0	$-+=-$	0	$--=+$	0	$-+=-$	0	$--=+$	0
	f	$max_{ep.}$	↘	min	↗	max	↘	min	↗	$max_{ep.}$

$f(\pm\pi) = a\cdot 1 + 0 = a \quad , \quad f(\pm\frac{\pi}{2}) = a\cdot(-1)+1 = 1-a \quad , \quad f(0) = a\cdot 1 + 0 = a$

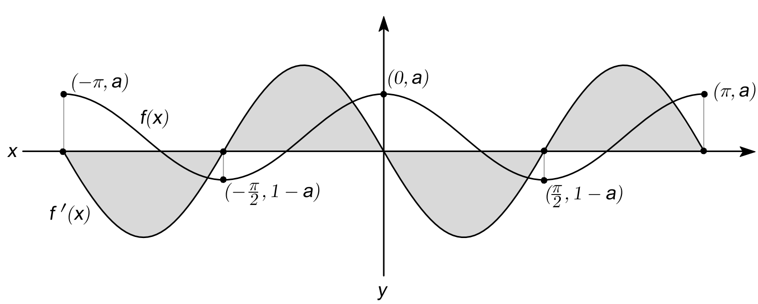
$\Rightarrow$
$\underline{a<\frac{1}{2}:}\ \ min_{ep.}(\pm\pi, a)\ \ ,\ \ max\ (\pm\frac{\pi}{2}, 1-a)\ \ ,\ \ min\ (0,a)$

$\underline{a>\frac{1}{2}:}\ \ max_{ep.}(\pm\pi, a)\ \ ,\ \ min\ (\pm\frac{\pi}{2}, 1-a)\ \ ,\ \ max\ (0,a)$

ג.

טופל בסעיף הקודם: $a=\frac{1}{2}$.

ד. (1)-(2)



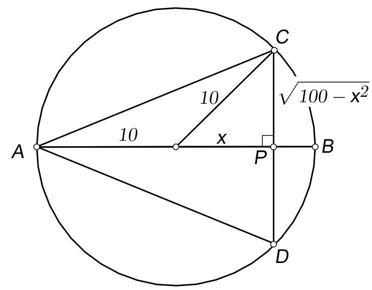
ה. הנגזרת 'אי־זוגית' (להלן), לכן השטחים משמאל לציר y ומימין לציר y שווים.

$f'(-x) = (1-2a)\sin(-2x) = (1-2a)(-\sin 2x) = -(1-2a)\sin 2x = -f'(x)$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -f'(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(x)\,dx \underset{\text{נתון}}{=} \frac{12}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad -f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + f(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -((1-a)-a) + (a-(1-a)) = 6$

$\Rightarrow \quad -1+a+a+a-1+a=6 \quad \Rightarrow \quad 4a-2=6 \quad \Rightarrow \quad 4a=8 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a=2}$

.7



רדיוס המאונך למיתר - חוצה את המיתר.

לפי משפט חפיפה צלע־זווית־צלע: $\triangle APC \cong \triangle APD$

לכן:

$$S_{\triangle ACD} = 2\,S_{\triangle APC} = S(x) = (10+x)\cdot\sqrt{100-x^2}$$

$$S'(x) = 1\cdot\sqrt{100-x^2} + (10+x)\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}$$

$$= \frac{100-x^2-10x-x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{-2x^2-10x+100}{\sqrt{100-x^2}} \overset{?}{=} 0$$

$$x_{1,2} = \frac{10\pm30}{-4} \quad , \quad x>0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-20}{-4} = 5$$

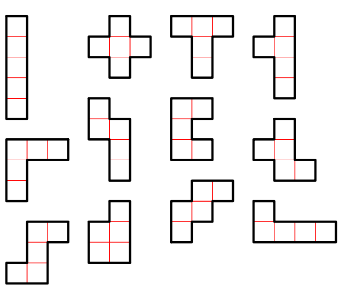
מכנה הנגזרת חיובי. נגזור רק את המונה:

$$(-2x^2-10x+100)' = -4x-10 \quad , \quad -4\cdot5-10<0 \quad \Rightarrow \quad S''(5)<0 \quad \Rightarrow \quad max \ (\surd)$$

$$max\ S_{\triangle ACD} = S(5) = 15\cdot\sqrt{75} = 15\cdot5\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{max\ S_{\triangle ACD} = 75\sqrt{3}}$$ **(יחידות ריבועיות)**

זו היתה ממש שאלת מתנה . . .

Pentomino



Pentomino הוא משחק הרכבה הכולל 12 חלקים.

כל חלק מורכב מ־5 ריבועים.

ישנם 12 צירופים אפשריים של 5 ריבועים עם צלע משותפת,

ואלו הם 12 חלקי ההרכבה.

Pent – מיוונית 5 , ו־ omino – על משקל משחק Domino .

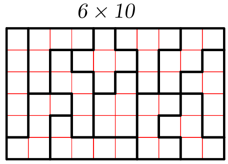
בסך הכל שטח כל החלקים הוא $12\times5=60$ יחידות ריבועיות.

ניתן להרכיב מהן מלבנים בגדלים 3×20 , 4×15 , 5×12 , 6×10 .

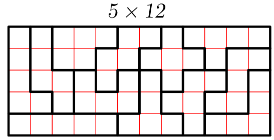
ישנם 2339 פתרונות למלבן 6×10 , 1010 פתרונות למלבן 5×12 ,

368 פתרונות ל־ 4×15 ושני פתרונות בלבד ל־ 3×20 .

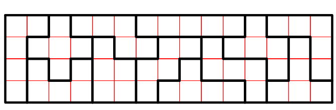
6×10



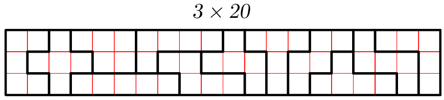
5×12



4×15



3×20



8. א.

$$f(x)=\frac{x^2+bx-c}{x^2-4}\quad,\quad x^2-4\neq 0\quad\Rightarrow\quad \mathbf{x\neq \pm 2}$$

ב.

$$f(-x)=f(x)\quad\Rightarrow\quad \frac{(-x)^2+b(-x)-c}{(-x)^2-4}=\frac{x^2+bx-c}{x^2-4}\quad\Rightarrow\quad -bx=bx\ \ \forall\{x\neq\pm 2\}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{b=0}$$

ג.

$$y=0\quad\Rightarrow\quad x^2-c=0\quad\Rightarrow\quad x^2=c\quad\Rightarrow\quad c>0\ ,\ x=\pm\sqrt{c}$$

$$\Rightarrow\quad 0<\sqrt{c}<2\quad\Rightarrow\quad \mathbf{0<c<4}$$

ד. (1)

$$f(x)=\frac{x^2-c}{x^2-4}\quad,\quad f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2-c)}{(x^2-4)^2}=\frac{-8x+2cx}{(x^2-4)^2}=\boxed{\frac{2x(c-4)}{(x^2-4)^2}}\overset{?}{=}0\quad\Rightarrow\quad x=0$$

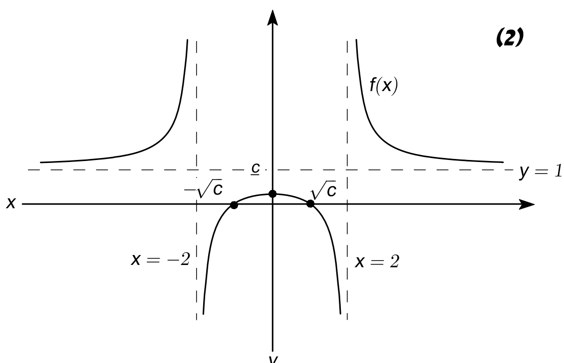
x		-2		0		2	
f'	$\frac{--}{+}=+$	$\emptyset$	$\frac{--}{+}=+$	0	$\frac{+-}{+}=-$	0	$\frac{+-}{+}=-$
f	↗	asym.	↗	max	↘	asym.	↘

$$f(0)=\frac{c}{4}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{max\ (0,\frac{c}{4})}$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-c}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(1-\frac{c}{x^2})}{\cancel{x^2}(1-\frac{4}{x^2})}$$

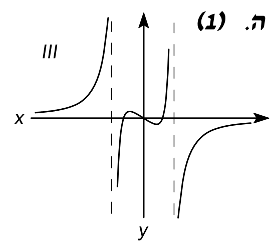
$$=\frac{\to(1-0)}{\to(1-0)}=1\quad\Rightarrow\quad \mathbf{y=1}$$

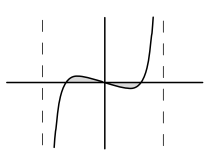


ה. (1)

x		-2		$-\sqrt{c}$		0		$\sqrt{c}$		2	
f	$+$	$\emptyset$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$\emptyset$	$+$
f'	$+$	$\emptyset$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$	$-$
	$+$	$\emptyset$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\emptyset$	$-$

$\Rightarrow$





(2) $f(x)$ זוגית. $f'(x)$ אי־זוגי. לכן $g(x)$ אי־זוגית.

לכן השטח בין $-\sqrt{c}$ ל־ 0 שווה לשטח שבין 0 ל־ $\sqrt{c}$:

$$S=2\int_{-\sqrt{c}}^{0} f(x)\cdot f'(x)\,dx\overset{(*)}{=}2\cdot\frac{1}{2}\,(f(x))^2\Big|_{-\sqrt{c}}^{0}=\frac{c^2}{16}-0\quad\Rightarrow\quad \mathbf{S=\frac{c^2}{16}}\ \ \textbf{(יחידות ריבועיות)}$$

$$(*)\ \ f(x)=u\quad\Rightarrow\quad f'(x)\,dx=du\quad\Rightarrow\quad \int f(x)\cdot f'(x)\,dx=\int u\,du=\frac{1}{2}u^2+c=\frac{1}{2}\,(f(x))^2+c$$

דוגמאות שאלות - משרד החינוך

בעקבות בקשות הבהרה של מורים, פִּרסם משרד החינוך דוגמאות שאלות למבחני בגרות, שאמורות לייצג את רמת הידע הנדרשת ואת רמת המורכבות של השאלות במבחן עצמו.

סדרות

1. הסדרה $a_1 , a_2 , a_3 , \dots$ מוגדרת על־ידי כלל הנסיגה: $S_1 = 9 \, , \; S_{n+1} = S_n - 7n + 9$.

כאשר $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ (n טבעי).

א. הוכח שהסדרה $a_1 , a_2 , a_3 , \dots$ היא חשבונית.

סדרה נוספת מקיימת את הכלל: $b_{n+1} - b_n = a_n$.

ב. חשב את הסכום: $\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2} + \frac{b_3-b_2}{a_2-a_3} + \frac{b_4-b_3}{a_3-a_4} + \dots + \frac{b_{20}-b_{19}}{a_{19}-a_{20}}$.

הסתברות

2. בסקר שנערך בקבוצה כלשהי (גברים ונשים), נמצא כי 20% מהנשים קוראות עיתון בוקר.

מספר הגברים גדול פי a ממספר הנשים שקוראות עיתון בוקר.

א. בטא באמצעות a את ההסתברות לבחור גבר מבין אותה קבוצה.

ב. מהי ההסתברות לבחור פרט מהקבוצה שקורא/ת עיתון בוקר,

אם ידוע שהמאורעות: 'נבחרה אִשה' ו־ 'נבחר/ה קורא עיתון בוקר' אינם תלויים. הסבר.

ג. נתון כי $a = 6$. נבחר באקראי פרט מהקבוצה. ידוע שהוא קורא עיתון בוקר.

מה סביר יותר: שהוא גבר או שהוא אישה?

ד. הנח כי מספר הפרטים בקבוצה גדול מאוד. בוחרים באקראי 6 פרטים מהקבוצה.

מהי ההסתברות לבחור לפחות 5 נשים שקוראות עיתון בוקר? ($a = 6$ גם כאן.)

רשום על צג המחשבון מספר תלת־ספרתי. זכור אותו. רשום אותו שוב.

קיבלת מספר שש־ספרתי ששלוש ספרותיו הראשונות זהות לשלוש ספרותיו האחרונות. ברור.

חלק את המספר הזה ב־ 7 . קיבלת מנה שלמה, ללא שארית? יופי.

חלק את התוצאה ב־ 11 . קיבלת מנה שלמה ללא שארית? יופי.

חלק את התוצאה ב־ 13 .

מה קיבלת?

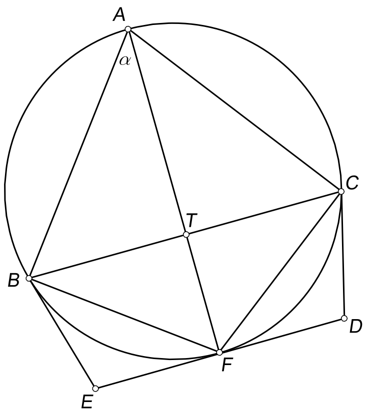
עכשו תחשוב מדוע זה עובד.

תשובות

1. **ב.** $S = -146\frac{4}{7}$

2. **א.** $P = \frac{a}{a+5}$ **ב.** $P = \frac{1}{5}$ **ג.** גבר **ד.** $P = \frac{61}{1,771,561} = 0.00003443$

<u>טריגונומטריה</u>



3. במעגל שאורך מחוגו (רדיוס) R חסום משולש ABC.

AF הוא קוטר במעגל.

המשיק למעגל בנקודה F מקביל למיתר BC.

E היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל בנקודה F עם המשיק למעגל בנקודה B.

D היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל בנקודה F עם המשיק למעגל בנקודה C.

AF ו- BC נפגשים בנקודה T. $\angle BAF = \alpha$.

א. בטא באמצעות α את $\angle BEF$.

הסבר שיקוליך בקצרה. אין צורך לפרט כהוכחה גיאומטרית.

ב. הוכח: $BE = R\ tg\ \alpha$.

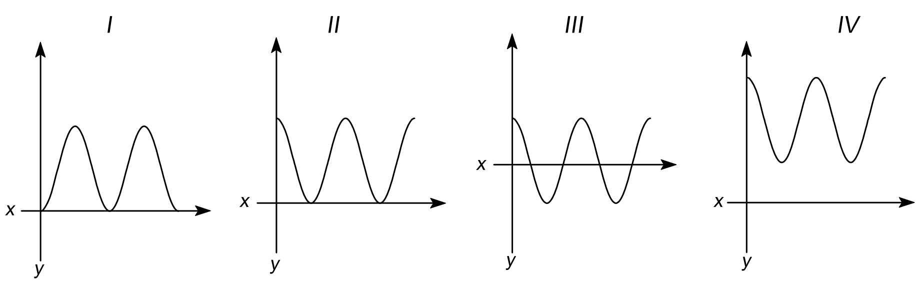
ג. חשב את גודל הזווית α שעבורה שטח המשולש BFC גדול פי 3 משטח המשולש BEF.

ד. עבור $\alpha = 30^\circ$, בטא באמצעות R את אורכו של הקטע BD.

<u>אנליזה</u>

4. נתונות הפונקציות: $f(x) = 2\cos^2 2x$ ו- $g(x) = \cos 4x + 2$.

א. התאם לכל אחת מהפונקציות הנתונות את הגרף המתאים לה מבין הגרפים להלן:



ב. הוכח: $g(x) = f(x) + c$, ומצא את ערכו של c.

ג. בכמה גדול $\int_0^\pi g(x)\,dx$ מ- $\int_0^\pi f(x)\,dx$? נמק. (אין צורך לחשב את ערכי שני האינטגרלים.)

ד. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר מסיבוב סביב ציר x של גרף הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

תשובות

3. א. $\angle BEF = 180^\circ - 2\alpha$ **ג.** $\alpha = 30^\circ$ **ד.** $BD = R\sqrt{\frac{7}{3}} = 1.53\ R$ (יחידות אורך)

4. א. $II \longleftrightarrow f$, $IV \longleftrightarrow g$ **ב.** $c = 1$ **ג.** ב- π **ד.** $V = \pi^2$ (יחידות קוב)

5. נתונות הפונקציות $g(x) = 1 + \cos ax \quad (a > 0)$, ו־ $f(x) = \frac{\sin x}{g(x)}$.

המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות של $g(x)$ עם ציר x הוא π .

א. מצא את ערכו של a .

הצב את הערך של a שמצאת וחקור את הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\pi \le x \le 3\pi$.

ב. ציין את: - נקודות חיתוך עם הצירים.

- אסימפטוטות מקבילות לצירים (אם יש).

- תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון (אם יש).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. הוסף לאותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $h(x) = \sqrt{f(x)}$.

התייחס לתחום ההגדרה של $h(x)$.

6. (**דומה לשאלה** 5.) נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{\sin x}{(1+\cos ax)^2} \quad (a > 0)$, ו־ $g(x) = 1 + \cos ax$.

המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות של $g(x)$ עם ציר x הוא π .

א. מצא את ערכו של a .

הצב את הערך של a שמצאת וחקור את הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\pi \le x \le 3\pi$:

ב. הוכח כי $f'(x) = \frac{1+3\sin^2 x}{4\cos^5 x}$.

ג. ציין את: - נקודות חיתוך עם הצירים.

- אסימפטוטות מקבילות לצירים (אם יש).

- תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון (אם יש).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. חשב את השטח המוגבל על־ידי גרף הפונקציה $f(x)$, ציר x והישר $x = \frac{\pi}{4}$.

תשובות

5. א. $a = 2$

ב. חיתוך: $(3\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, אסימפטוטות: $x = \frac{5\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{2}$

$\nearrow$: $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2})$, $\searrow$: $(-\pi < x < -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi)$

קיצון: $min_{ep.}(3\pi, 0)$, $max_{ep.}(-\pi, 0)$

6. א. $a = 2$

ג. חיתוך: $(3\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$ אסימפטוטות: $x = \frac{5\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{2}$

$\nearrow$: $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2})$, $\searrow$: $(-\pi < x < -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi)$

קיצון: $min_{ep.}(3\pi, 0)$, $max_{ep.}(-\pi, 0)$ **ה.** $S = \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{12} = 0.1524$ (יחידה ריבועית)

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x}$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(2) קבע האם הפונקציה זוגית או אי־זוגית או אחרת. נמק.

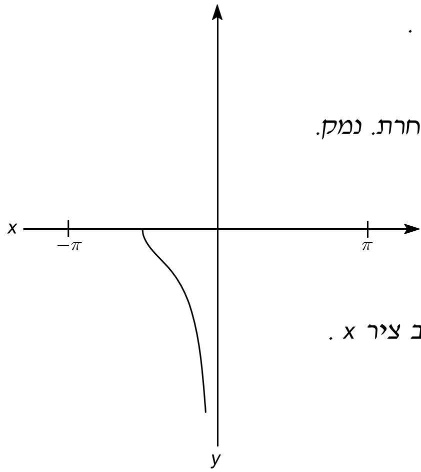
ב. בציור מתואר גרף הפונקציה בחלק מהתחום.

השלם את ציור הגרף לכל התחום הנתון.

ג. השטח המוגבל על־ידי גרף הפונקציה,

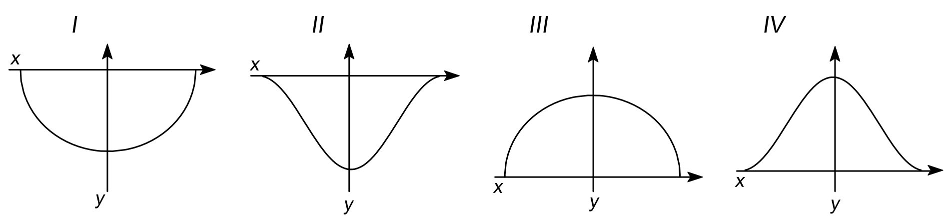
על־ידי ציר x ועל־ידי הישר $x=\frac{\pi}{4}$ מסתובב סביב ציר x .

חשב את נפח גוף הסיבוב הנוצר באופן זה.



8. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{k^2-x^2}$, $k>0$.

א. איזה מבין הגרפים שלהלן מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$? נמק.



ב. מנקודה A , מימין לציר y שעל גרף הפונקציה $f(x)$, מעבירים אנכים לצירים.

האנך לציר x חותך את הציר בנקודה B . האנך לציר y חותך את הציר בנקודה C .

הנקודה O היא ראשית הצירים.

(1) מצא את שיעורי A שעבורה שטח המרובע $ABOC$ שנוצר באופן זה הינו מקסימלי.

בטא באמצעות k.

(2) נתון כי השטח המקסימלי של המרובע $ABOC$ הוא 2 יח׳ ריבועיות.

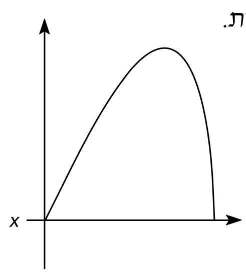
מצא את ערכו של k.

(3) הגרף הנתון מתאר את פונקצית השטח של המרובעים $ABOC$

כש־ A מימין לציר y.

סרטט גרף שיתאר את פונקצית השטח של המרובעים $ABOC$,

כאשר A משמאל לציר y . נמק.

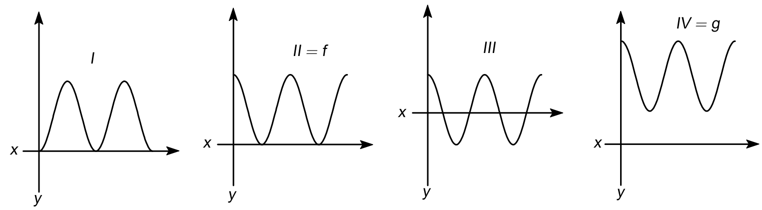


תשובות

7. **א.** **(1)** $(-\frac{\pi}{2} \le x < 0) \cup (0 < x \le \frac{\pi}{2})$ **(2)** אי־זוגית **ג.** $V=(\sqrt{2}-1)\pi=1.3013$ (יחידות קוב)

8. **א.** III **ב.** **(1)** $A\,(\frac{k}{\sqrt{2}},\frac{k}{\sqrt{2}})$ **(2)** $k=2$

4. א. $f(x) = 2\cos^2 2x \;\;,\;\; g(x) = \cos 4x + 2$



עבור $f(x)$: - גרף I נפסל, כי עבור $x = 0$ הוא מציג ערך $y = 0$ במקום $y = 2$.

- גרף III נפסל כי הוא מציג פונקציה שמקבלת גם ערכים שליליים.
- גרף IV נפסל כי הוא אינו מציג נקודות בהן הפונקציה מתאפסת.
- **גרף II** מציג את כל הממצאים הנכונים:

איפוס, אי־שליליות, ערך חיובי עבור $x = 0$.

עבור $g(x)$:

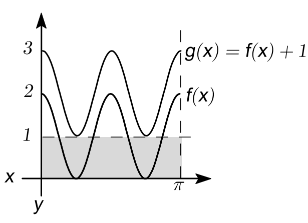
$\cos 4x + 2$ מכווצת את $\cos x$ פי ארבעה ומעלה את הגרף שתי שְׁנָתוֹת מעלה.

$$-1 \le \cos 4x \le 1 \;/+2 \quad \Rightarrow \quad 1 \le \cos 4x + 2 \le 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{גרף IV}}$$

ב.

$$g(x) = \cos 4x + 2 = \underline{\cos(2\cdot 2x)} + 2 = \underline{2\cos^2 2x - 1} + 2 = 2\cos^2 2x + 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{g(x) = f(x) + 1 \;\;,\;\; c = 1}$$



ג. שתי הפונקציות בתחום הנתון אינן שליליות.

לכן, שני האינטגרלים מייצגים שטחים.

מהקשר שהוכח בסעיף הקודם,

הרי שהשטח של $f(x)$ בתחום הנתון,

שווה לשטח של $g(x)$ בתחום הנתון המוגבל מלמטה על־ידי $y = 1$ במקום ציר x .

לכן השטח הנוסף הוא המלבן האפור המסומן בציור, ששטחו π יחידות ריבועיות.

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} g(x)\,dx - \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \pi$$

ד.

$$V = \pi\int_0^{\pi} \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 dx = \pi\int_0^{\pi} f(x)\,dx \overset{(*)}{=} \pi\int_0^{\pi} (\cos 4x + 1)\,dx = \pi\left(\tfrac{1}{4}\sin 4x + x\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \pi\left(\left(\tfrac{1}{4}\cdot 0 + \pi\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0 + 0\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V = \pi^2} \text{ (יחידות קוב)}$$

$(*)\;\; g(x) = f(x) + 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) - 1 = \cos 4x + 2 - 1 = \cos 4x + 1$

5. א.

$g(x) = 1 + \cos ax \ , \ a > 0 \ , \ f(x) = \frac{\sin x}{g(x)}$

$g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos ax = -1 \quad \Rightarrow \quad ax = \pi + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi+2k\pi}{a}$

$x_{k=1} - x_{k=0} = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi}{a} - \frac{\pi}{a} = \pi \ \ / \cdot \frac{a}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a = 2}$

ב.

$\mathbf{f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos 2x}} \ , \ -\pi \le x \le 3\pi$

$1 + \cos 2x \ne 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x \ne -1 \quad \Rightarrow \quad 2x \ne \pi + 2k\pi$

תחום הגדרה: $\Rightarrow \quad x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{-\pi \le x \le 3\pi \ , \ x \ne \pm\frac{\pi}{2} \ , \ x \ne \frac{3\pi}{2} \ , \ x \ne \frac{5\pi}{2}}$

נקודות חיתוך: $y = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k\pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(\pm\pi, 0) \ , \ (0,0) \ , \ (2\pi, 0) \ , \ (3\pi, 0)}$

אסימפטוטות: $\lim\limits_{x \to \pm\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}} f(x) = \frac{\to \ne 0}{\to 0} = \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = \pm\frac{\pi}{2} \ , \ x = \frac{3\pi}{2} \ , \ x = \frac{5\pi}{2}}$

$f'(x) = \frac{\cos x\,(1+\cos 2x) - (-2\sin 2x)\cdot\sin x}{(1+\cos 2x)^2} = \frac{\cos x\,(1+2\cos^2 x - 1) + 4\sin^2 x \cos x}{(1+\cos 2x)^2}$

$= \frac{2\cos x\,(\cos^2 x + 2\sin^2 x)}{(1+\cos 2x)^2} = \frac{2\,\boxed{\cos x}\,(1+\sin^2 x)}{(1+\cos 2x)^2} \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sign } f'(x) = \text{sign } \cos x$

x	$-\pi$		$-\pi$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$		3π
f'		$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$	
f	$max_{ep.}$	↘	asym.	↗	asym.	↘	asym.	↗	asym.	↘	$min_{ep.}$

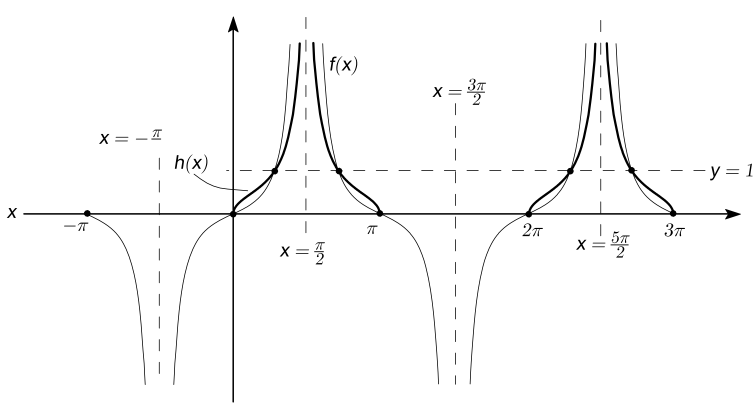
↘: $\mathbf{(-\pi < x < -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi)}$, $\mathbf{max_{ep.}\ (-\pi, 0)}$

↗: $\mathbf{(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2})}$, $\mathbf{min_{ep.}\ (3\pi, 0)}$

ג.-ד. הפונקציה $h(x) = \sqrt{f(x)}$ מוגדרת עבור התחום שבו $f(x) \ge 0$.

עבור $0 < f(x) < 1$ מתקיים: $\sqrt{f(x)} > f(x)$ ועבור $f(x) > 1$ מתקיים: $f(x) > \sqrt{f(x)}$.

עבור $f(x) = 0$ או $f(x) = 1$ מתקיים: $h(x) = f(x)$.



6. א.

$f(x)=\frac{\sin x}{(1+\cos ax)^2}\ ,\ a>0\ ,\ g(x)=1+\cos ax$

$g(x)=0 \Rightarrow \cos ax=-1 \Rightarrow ax=\pi+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi+2k\pi}{a}$

$x_{k=1}-x_{k=0}=\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{a}-\frac{\pi}{a}=\pi\ \ /\cdot\frac{a}{\pi} \Rightarrow \mathbf{a=2}$

ב.

$f(x)=\frac{\sin x}{(1+\cos 2x)^2}=\frac{\sin x}{(1+2\cos^2 x-1)^2} \Rightarrow \mathbf{f(x)=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}}\ ,\ -\pi\le x\le 3\pi$

$f'(x)=\frac{\cos x\cdot 4\cos^4 x-16\cos^3 x\,(-\sin x)\cdot\sin x}{16\cos^8 x}\underset{\uparrow}{=}\frac{\cos^2 x+4\sin^2 x}{4\cos^5 x} \Rightarrow \mathbf{f'(x)=\frac{1+3\sin^2 x}{4\cos^5 x}}\ \ (\surd)$

צמצום ב- $4\cos^3 x$

ג.

$4\cos^4 x\neq 0 \Rightarrow \cos 2x\neq -1 \Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

תחום הגדרה: $\Rightarrow\ \mathbf{-\pi\le x\le 3\pi\ ,\ x\neq\pm\frac{\pi}{2}\ ,\ x\neq\frac{3\pi}{2}\ ,\ x\neq\frac{5\pi}{2}}$

נקודות חיתוך: $y=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \Rightarrow \mathbf{(\pm\pi,0)\ ,\ (0,0)\ ,\ (2\pi,0)\ ,\ (3\pi,0)}$

אסימפטוטות: $\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}} f(x)=\frac{\to\neq 0}{\to 0}=\infty \Rightarrow \mathbf{x=\pm\frac{\pi}{2}\ ,\ x=\frac{3\pi}{2}\ ,\ x=\frac{5\pi}{2}}$

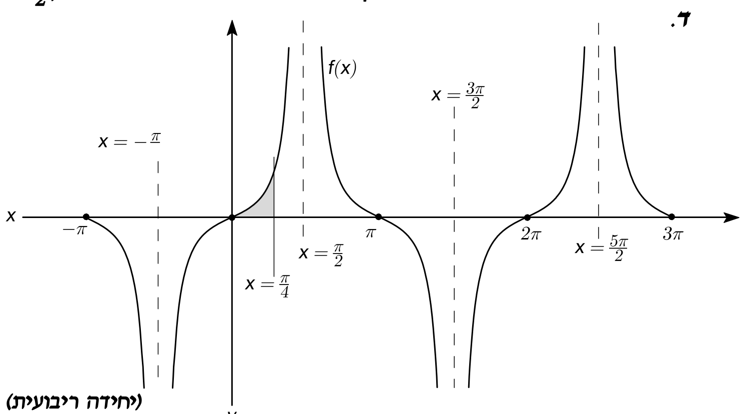
$f'(x)=\frac{1+3\sin^2 x}{4\boxed{\cos^5 x}} \Rightarrow \text{sign}\,(f'(x))=\text{sign}\,(\cos x)$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$		3π
f'		$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$	
f	$max_{ep.}$	↘	asym.	↗	asym.	↘	asym.	↗	asym.	↘	$min_{ep.}$

$\searrow$: $\mathbf{(-\pi<x<-\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2})\cup(\frac{5\pi}{2}<x<3\pi)}$, $\mathbf{max_{ep.}\ (-\pi,0)}$

$\nearrow$: $\mathbf{(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2})}$, $\mathbf{min_{ep.}\ (3\pi,0)}$

ד.



ה.

$S=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{4\cos^4 x}\,dx$

$\overset{(*)}{=}\ \frac{1}{12\cos^3 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\left(\frac{1}{12\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}}-\frac{1}{12}\right)$

$\Rightarrow\ \mathbf{S=\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{1}{12}=0.1524}$ **(יחידה ריבועית)**

$(*)\ \ \cos x=u \Rightarrow -\sin x\,dx=du$

$\Rightarrow \int\frac{\sin x}{4\cos^4 x}\,dx=-\frac{1}{4}\int\frac{-\sin x}{\cos^4 x}\,dx=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{u^4}\,du=-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3u^3}\right)+c=\frac{1}{12u^3}+c=\frac{1}{12\cos^3 x}+c$

סימנים מתמטיים המופיעים בספר

$\cup$ - איחוד, היחס 'או'. דוגמה: התחום $x<2$ או $x>9$ ייכתב כך: $(x<2)\cup(x>9)$

$\cap$ - חיתוך, היחס 'וגם'. דוגמה: התחום $x<8$ וגם $x>1$ הוא התחום: $1<x<8$.
נרשום זאת כך: $\underline{1<x<8}$ $\Rightarrow$ $(x>1)\cap(x<8)$.

$(\surd)$ - מופיע בדרך כלל בסוף הוכחה כאישור למש"ל (מה שהיה להוכיח), או כאישור לבדיקת נתון.

$\in$ - שייכות. דוגמה: $x\in[1,9]$ כלומר: x שייך לקטע הסגור $[1,9]$ או: $1\le x\le 9$
דוגמה: $(1,2)\notin y_{CD}$ כלומר: הנקודה $(1,2)$ אינה על הישר העובר דרך C ו־ D .

$\forall$ - לכל. דוגמה: תחום הגדרה: $\forall x$. כלומר: תחום ההגדרה הינו עבור כל x ממשי.

דוגמה: $\frac{(x-1)^2}{x^6}>0\ \ \forall\{x\neq 0\ ,\ x\neq 1\}$

משמעות הסימון: הביטוי $\frac{(x-1)^2}{x^6}$ גדול מ־ 0 לכל x השונה מ־ 0 ושונה מ־ 1 .

פתרון משוואה ריבועית מוצג בקיצור באופן הבא (לדוגמה): $6x^2-x-15=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{1\pm19}{12}=\ ...$
זאת - מתוך הנחה שהתלמיד בשאלון זה שולט בביצוע $\sqrt{\triangle}$ ובבדיקת החישוב.

'ללא הגבלת הכלליות' - קביעת ערך מייצג, במקום פרמטר (שאמור להצטמצם בהמשך). למשל, אם יש למצוא גודל זווית לפי יחסי צלעות, ניתן לקבוע אורך אחת מהן כ־1 (יחידת אורך אחת, או כל ערך אחר).

$\emptyset$ - קבוצה ריקה. למשל: $x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-5}}{3}=\emptyset$ כלומר: למשוואה הריבועית הנתונה אין פתרון

ep. - end point נקודות קצה של תחום סגור הן נקודות קיצון חד־צדדיות (אלא אם כן הפונקציה בסביבה החד־צדדית של הנקודה היא קבועה). למשל: $(5,6)$: min_{ep}.

ab. - absolute סימון של נקודת קיצון מוחלטת בתחום סגור. למשל: $(-7,11)$: max_{ab}.

cm^2 - סמ"ר , **cm^3** - סמ"ק , **asym.** - אסימפטוטה , **infl.** - פיתול (inflection)

$\nearrow$ - עליה , $\searrow$ - ירידה , למשל: $f\ \nearrow\ \forall x>6$ - המשמעות: הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x>6$

$\smile$ - קעירות (קעירות כלפי מעלה) , $\frown$ - קמירות (קעירות כלפי מטה).

$x\to a+$ - שאיפה ל־ a מימין , למשל: '$x\to 0+$' הכוונה היא לשאיפה $...\ 0.1, 0.01, 0.001$
$x\to a-$ - שאיפה ל־ a משמאל , למשל: '$x\to 0-$' הכוונה היא לשאיפה $...\ 0.9, 0.99, 0.999$

lim - קיצור של limit, גבול.
למשל: $\lim\limits_{x\to\infty}(x)=5$: הגבול של $f(x)$ כאשר x 'שואף' ל־ ∞ הוא 5 (אסימפטוטה אופקית: $y=5$).

$y_{\rightarrow}=k$ - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית בכיוון $+\infty$ בלבד.
$y_{\leftarrow}=k$ - אסימפטוטה אופקית חד־צדדית בכיוון $-\infty$ בלבד.

<u>ללא הגבלת הכלליות</u> - הסבר

כשצריך למצא יחסים בין חלקים שונים ללא נתוני גודלם, מסמנים בדרך כלל, את גודל אחד החלקים בפרמטר, נניח a, ואת החלקים האחרים בהתאם ליחס שלהם לפרמטר שקבענו.

במקרים כאלה ניתן לקבוע מספר (במקום פרמטר) שנח לנו לעבוד איתו ולציין: 'ללא הגבלת הכלליות', שזה אומר שאותו גודל שקבענו הוא מקרה פרטי המתאים גם לכל גודל אחר.

<u>דוגמה:</u> אורך אחד הניצבים במשולש ישר־זווית גדול פי שלושה מאורך הניצב האחר.

פי כמה גדול אורך היתר מאורך הניצב הקטן?

<u>פתרון:</u> ברור מנוסח השאלה שלא משנה מהם אורכי צלעות המשולש אלא רק היחס ביניהם.

נסמן את אורך הניצב הקטן ב־a . מכאן שאורך הניצב הגדול הוא $3a$.

נפעיל את משפט פיתגורס ואז אורך היתר הוא:

$$\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10a^2}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{a^2}=a\sqrt{10}$$

ולכן היתר גדול מהניצב הקטן פי $\frac{\cancel{a}\sqrt{10}}{\cancel{a}}=\sqrt{10}$.

בפתרון זה היינו רשאים לקבוע את אורך הניצב הקטן כ־1 (ולציין: 'ללא הגבלת הכלליות').

לכן אורך הניצב הגדול היה 3 ואורך היתר היה $\sqrt{10}$. היחס שהיה מתקבל הוא בדיוק אותו יחס.

אם היינו קובעים את אורך הניצב הקטן כ־ 8. אורך הניצב הגדול היה 24. אורך היתר היה $24\sqrt{10}$, והיחס המבוקש היה בדיוק אותו יחס - $\frac{24\sqrt{10}}{24}=\sqrt{10}$.

מכאן שניתן לבחור במקרים כאלה את אורך אחד הגדלים לנוחותנו ומשם להמשיך בפתרון.

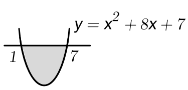
'פטנט' זה מאושר לשימוש בפתרון מבחני הבגרות על־ידי משרד החינוך.

<u>שינוי גבולות אינטגרציה בחישוב שטח</u> - הסבר

חישוב שטח בין גרף פונקציה לבין ציר x הנמצא מתחת לציר x נותן ערך שלילי.

השטח הינו הערך המוחלט של אותו ערך שקיבלנו.

ישנן מספר אפשרויות כדי לקבל את הערך הנכון.



1. סימון כל הביטוי בערך מוחלט:

$$S=\left|\int_1^7(x^2+8x+7)\,dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}+4x^2+7x\right)\Bigg|_7^1\right|=$$

$$\left|\left(\frac{1}{3}+4+7\right)-\left(\frac{343}{3}+98+49\right)\right|=\left|\,11\frac{1}{3}-261\frac{1}{3}\,\right|=|-250|=250$$

2. הצמדת מינוס לביטוי:

$$S=-\int_1^7(x^2+8x+7)\,dx=\;...\;=-(-250)=250$$

3. הפיכת גבולות האינטגרציה (לשם כך התכנסנו . . .):

$$S=\int_7^1(x^2+8x+7)\,dx=\;...\;=261\frac{1}{3}-11\frac{1}{3}=250$$

סיווג שאלות המבחנים

פענוח הרישום: שאלה/מבחן. דוגמה: 38/4 – מבחן 38 שאלה 4. את הסיווג הכין **שרון חיים**.

בעיות מילוליות

בעיות תנועה

- רכב/הלך אחד בהלוך וחזור
7/1
- שני רכבים/הלכים הנעים באותו כיוון
1/1, 13/1, 17/1, 25/1, 28/1
- שני רכבים/הלכים הנעים אחד מול השני
4/1, 9/1, 10/1, 12/1, 20/1, 24/1, 31/1
- שני רכבים/הלכים הנעים באותו כיוון וגם אחד מול השני
23/1
- שלושה רכבים/הלכים
6/1, 18/1, 22/1
- מסלול משולש
35/1
- שייט עם/נגד כיוון הזרם
5/1, 16/1, 29/1
- אי-שוויון
1/1, 6/1, 12/1, 13/1
- הבעה באמצעות פרמטר
1/1, 6/1, 9/1, 13/1, 31/1
- משפט פיתגורס
2/1

בעיות הספק

- כללי
8/1, 11/1, 15/1, 26/1, 30/1, 34/1
- עם אחוזים
3/1, 14/1, 19/1, 21/1
- אי-שוויון
11/1
- הבעה באמצעות פרמטר
3/1, 27/1, 33/1

סדרות

סדרה חשבונית

- נוסחה האיבר הכללי ונוסחת סכום הסדרה
13/2b
- הוכחת סדרה חשבונית
19/2, 20/2
- סדרה יורדת/עולה
33/2
- איברים עוקבים
18/2, 20/2, 26/2, 30/2
- איבר אמצעי
33/2
- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
33/2
- איברים/סכומים חיוביים/שליליים
30/2
- בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה
4/2, 18/2, 19/2, 20/2, 26/2, 33/2
- מחיקת איברים
20/2
- סדרה בת 3n איברים
17/2
- סכום איברים אחרונים
17/2
- סדרת סכומים חלקיים
25/2
- הפרש ריבועי האיברים
18/2, 19/2
- אי-שוויון
19/2, 30/2
- הבעה באמצעות פרמטר
4/2, 5/2, 13/2b, 19/2, 26/2, 33/2

סדרה הנדסית

- הוכחת סדרה הנדסית
15/2, 24/2
- סדרה עולה
24/2
- איברים/סכומים חיוביים/שליליים
28/2
- בניית סדרה חדשה מסדרה נתונה
24/2
- סכום ריבועי האיברים
29/2
- אי-שוויון
28/2

סדרה הנדסית אינסופית יורדת

- הוכחת סדרה הנדסית אינסופית יורדת
16/2, 22/2
- סדרה יורדת/עולה
31/2
- איברים/סכומים חיוביים/שליליים
22/2
- סימנים מתחלפים/היפוך סימנים
15/2, 16/2
- סכום איברים אחרונים
16/2
- סכום כל האיברים שאחרי איבר נתון
8/2
- שתי סדרות (a_n,b_n)
22/2
- הבעה באמצעות פרמטר
15/2, 31/2, 34/2

סדרה כללית

- כסדרה חשבונית
14/2
- כסדרה הנדסית
15/2, 28/2, 29/2
- סדרת סכומים
15/2
- סכום ריבועי האיברים
29/2
- אי-שוויון
15/2
- הבעה באמצעות פרמטר
29/2

סדרות נסיגה

10/2b, 25/2d
- כסדרה חשבונית
6/2, 21/2, 35/2
- כסדרה הנדסית
23/2, 27/2
- סדרה יורדת
6/2
- איבר אמצעי
21/2, 35/2
- איברים במקומות זוגיים/אי-זוגיים
21/2, 23/2
- שתי סדרות (a_n,b_n)
25/2
- אי-שוויון
6/2, 10/2b

הסתברות

עקרונות בסיסיים של חיתוך ואיחוד מאורעות, הסתברות מותנית ללא טבלה
9/3, 11/3a, 14/3, 17/3, 34/3

- עם פרמטר

13/3, 20/3, 22/3

מאורעות תלויים/בלתי-תלויים
9/3, 18/3

טבלה דו-ממדית
1/3, 2/3, 10/3, 12/3, 16/3, 18/3, 25/3, 31/3, 33/3

טבלה דו-ממדית עם נעלמים וחישוב בשני שלבים
3/3, 8/3, 15/3

- טבלה 2X3

6/3

התפלגות בינומית (נוסחת ברנולי)
- שימוש בנוסחת ברנולי בלבד, כולל הסתברות מותנית

7/3, 19/3a-b, 21/3, 23/3a

- חישוב מדויק

3/3, 5/3, 7/3, 11/3b, 17/3, 19/3, 21/3, 23/3, 34/3

- חישוב לכל הפחות

8/3, 16/3, 18/3, 23/3, 25/3, 28/3, 30/3, 34/3

- חישוב לכל היותר

12/3, 23/3

- עם פרמטר

18/3c, 19/3, 23/3, 24/3, 26/3, 27/3, 28/3

- הבעה באמצעות פרמטר

5/3

תרשים עץ (ניתן לפתור גם ללא שימוש בתרשים)
4/3, 29/3, 35/3

- הבעה באמצעות פרמטר

4/3c

נושאים שונים בשאלות הסתברות
- כדורים וכדים

11, 29, 35

- הטלת קוביה

5, 13, 30

טריגונומטריה במישור

חלוקה ראשית
- ללא מעגל

1/6, 2/6, 4/6, 5/6, 6/6, 9/5, 12/6, 13/6, 19/5, 21/5, 22/5, 25/5

- עם מעגל

3/6, 7/5, 7/6, 8/5, 8/6, 9/6, 10/5, 10/6, 11/6, 12/5, 14/6, 15/5, 15/6, 16/5, 16/6, 17/5, 18/5, 20/5, 23/5, 24/5, 26/5, 27/5, 28/5, 29/5, 30/5, 31/5, 32/5, 33/5, 34/5, 35/5

חלוקה משנית

משולשים
- משולש ישר-זווית

9/5, 10/6, 18/5, 31/5

- משולש שווה-שוקיים

6/6, 17/5, 19/5, 24/5, 25/5, 28/5, 35/5

- משולש שווה-צלעות

13/6

נקודות וקווים מיוחדים במשולש
- מפגש תיכונים במשולש

9/5, 28/5

- מפגש חוצי זוויות במשולש

24/5

מרובעים
- דלתון

31/5

- מקבילית

30/5

- מלבן

6/6

- מעוין

12/6, 33/5, 34/5

- טרפז

4/6, 21/5, 22/5

- טרפז שווה-שוקיים

1/6, 2/6, 5/6, 8/5, 15/6

מעגל
- מעגל

3/6

- משיק למעגל

8/6, 10/5, 12/5, 15/6, 16/6, 28/5

- קטע מרכזים

16/6

- שני מעגלים

8/6, 16/6

- משולש שווה-שוקיים חסום במעגל

17/5, 24/5

- מעגל חוסם משולש

7/6, 10/6, 14/6, 18/5, 20/5, 24/5, 27/5, 31/5, 33/5, 34/5, 35/5

- מעגל חסום במשולש

7/5, 14/6, 16/5, 24/5, 30/5

- מרובע חסום במעגל

12/5, 15/5

- מלבן חסום במעגל

35/5

- מעוין חוסם מעגל

33/5

- טרפז שווה-שוקיים חוסם מעגל

9/6, 23/5, 29/5

- טרפז שווה-שוקיים חסום במעגל

11/6

- טרפז חסום במעגל

23/5, 26/5, 27/5, 29/5

חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי נושאים

חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר

- פונקציית שורש
7/8a-b, 9/8a-b, 16/9, 18/6, 19/7
- פונקציה טריגונומטרית
1/8a-b, 4/8a-b, 8/8a-b, 11/8a-d, 12/7, 13/8, 14/7a-b, 15/7, 17/6, 23/6, 25/6, 31/7, 33/7a-b, 34/7

חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות

- פונקציה רציונאלית
2/8, 3/7, 5/7, 7/7, 12/9a-b, 13/7a-c, 16/7a, 18/7, 22/7a-b, 25/8, 27/6a-d, 29/6, 30/7, 35/8
- פונקציית שורש
4/9a-d, 5/9a-c, 6/8a-e, 8/7, 10/7, 12/8a-b, 17/7, 21/7, 23/7, 24/7a-b, 27/7a-e, 28/6a-b, 31/6a-b
- פונקציה טריגונומטרית
3/8a-c, 7/9a, 9/7a-c+e, 19/6, 20/6, 22/6a-b, 26/6a-b, 28/7a-b,30/6a-b, 32/7

חקירת פונקציה, עם פרמטר

- פונקציה פולינומיאלית
6/7a-d, 14/8a-c, 15/8, 22/8, 29/7
- פונקציה רציונאלית
3/7, 7/7, 8/7, 11/7, 13/7a-c, 16/7a, 29/6, 30/7, 35/8
- פונקציית שורש
14/9, 17/7a-b, 20/8a-b, 25/7a-b, 27/7, 31/6a-b
- פונקציה טריגונומטרית
4/8d, 10/8a, 20/6, 24/6a-c, 35/6

הבעה באמצעות פרמטר

- פונקציה פולינומיאלית
6/7, 14/8, 22/8
- פונקציה רציונאלית
2/8, 3/7, 7/7, 12/9, 13/7, 16/7, 29/6, 30/7, 31/6
- פונקציית שורש
8/7, 16/9, 17/7, 27/7
- פונקציה טריגונומטרית
24/6

הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה

- על סמך גרף הפונקציה
1/7, 16/9, 23/8, 26/7
- פונקציה פולינומיאלית
15/8, 32/6
- פונקציה רציונאלית
3/7, 5/7, 11/7, 12/9, 13/7, 17/8, 25/8
- פונקציית שורש
4/9, 9/8, 10/7, 18/7, 23/7, 27/7
- פונקציה טריגונומטרית
4/8, 8/8, 22/6, 24/6, 25/6, 34/7, 35/6

התאמת פונקציה לגרף(קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)

- על סמך גרף הפונקציה
1/7
- פונקציה פולינומיאלית
29/7, 32/6
- פונקציה רציונאלית
25/8, 30/7, 35/8
- פונקציית שורש
9/8, 18/6

בעיות ערך קיצון

תנועה
- פונקציית שורש
15/9

גאומטריה
- פונקציה רציונאלית
31/8
- פונקציית שורש
1/9, 8/9, 10/9, 13/9, 20/7, 26/8, 35/7
- פונקציה טריגונומטרית
16/8, 18/8, 27/8, 33/8

גרפים
- פונקציה פולינומיאלית
11/9, 28/8, 29/7
- פונקציה רציונאלית
24/8, 30/8, 32/8
- פונקציית שורש
2/9, 3/9
- פונקציה טריגונומטרית
6/9, 14/7, 18/6, 19/6, 21/6

חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי סוג הפונקציה

פונקציה פולינומיאלית

- חקירת פונקציה, עם פרמטר
6/7a-d, 14/8a-c, 15/8, 22/8, 29/7
- הבעה באמצעות פרמטר
6/7, 14/8, 22/8
- הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה
15/8, 32/6
- התאמת פונקציה לגרף(קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
29/7, 32/6
- בעיות ערך קיצון
גרפים
11/9, 28/8, 29/7

פונקציה רציונאלית

- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות
2/8, 3/7, 5/7, 7/7, 12/9a-b, 13/7a-c, 16/7a, 18/7, 22/7a-b, 25/8, 27/6a-d, 29/6, 30/7, 35/8
- חקירת פונקציה, עם פרמטר
3/7, 7/7, 8/7, 11/7, 13/7a-c, 16/7a, 29/6, 30/7, 35/8
- הבעה באמצעות פרמטר
2/8, 3/7, 7/7, 12/9, 13/7, 16/7, 29/6, 30/7, 31/6
- הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה
3/7, 5/7, 11/7, 12/9, 13/7, 17/8, 25/8
- התאמת פונקציה לגרף(קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
25/8, 30/7, 35/8
- בעיות ערך קיצון
גאומטריה
31/8
גרפים
24/8, 30/8, 32/8

פונקציה שורש

- חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
7/8a-b, 9/8a-b, 16/9, 18/6, 19/7
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות
4/9a-d, 5/9a-c, 6/8a-e, 8/7, 10/7, 12/8a-b, 17/7, 21/7, 23/7, 24/7a-b, 27/7a-e, 28/6a-b, 31/6a-b
- חקירת פונקציה, עם פרמטר
14/9, 17/7a-b, 20/8a-b, 25/7a-b, 27/7, 31/6a-b
- הבעה באמצעות פרמטר
8/7, 16/9, 17/7, 27/7
- הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה
4/9, 9/8, 10/7, 18/7, 23/7, 27/7
- התאמת פונקציה לגרף(קו תחתי-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)
9/8, 18/6
- בעיות ערך קיצון
תנועה
15/9
גאומטריה
1/9, 8/9, 10/9, 13/9, 20/7, 26/8, 35/7
גרפים
2/9, 3/9

פונקציה טריגונומטרית

- חקירת פונקציה, ללא אסימפטוטות וללא פרמטר
1/8a-b, 4/8a-b, 8/8a-b, 11/8a-d, 12/7, 13/8, 14/7a-b, 15/7, 17/6, 23/6, 25/6, 31/7, 33/7a-b, 34/7
- חקירת פונקציה, עם אסימפטוטות
3/8a-c, 7/9a, 9/7a-c+e, 19/6, 20/6, 22/6a-b, 26/6a-b, 28/7a-b, 30/6a-b, 32/7
- חקירת פונקציה, עם פרמטר
4/8d, 10/8a, 20/6, 24/6a-c, 35/6
- הבעה באמצעות פרמטר
24/6
- הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה
4/8, 8/8, 22/6, 24/6, 25/6, 34/7, 35/6
- בעיות ערך קיצון
גאומטריה
16/8, 18/8, 27/8, 33/8
גרפים
6/9, 14/7, 18/6, 19/6, 21/6

חשבון דיפרנציאלי - נושאי חקירה נוספים

תחומי קמירות/קעירות

- על סמך גרף הפונקציה: 23/8
- פונקציה רציונאלית: 2/8, 12/9
- פונקציית שורש: 9/8
- פונקציה טריגונומטרית: 25/6

נקודות פיתול

- על סמך גרף הפונקציה: 1/7, 32/6
- פונקציה פולינומיאלית: 29/7
- פונקציה רציונאלית: 3/7, 7/7, 13/7, 22/7, 25/8
- פונקציית שורש: 17/7
- פונקציה טריגונומטרית: 1/8, 34/7

נושאים שונים

- נקודות קיצון מוחלט: 4/8, 18/6
- פונקציה זוגית/אי-זוגית: 2/9, 3/8, 9/7, 12/7, 20/6, 23/6, 25/7, 26/6, 28/6, 33/7, 34/7, 35/6, 35/8
- פונקציית ערך מוחלט: 4/7, 21/8, 27/6, 29/6
- פונקציה רציפה: 4/9, 31/6
- חילוק פולינומים: 4/7
- פונקציה עם שני פרמטרים: 2/8, 17/8, 24/6, 27/6
- פונקציה עם שלושה פרמטרים: 11/7, 14/9
- פונקציה עם ארבעה פרמטרים: 12/9
- תחומי שליליות וחיוביות: 3/7, 10/8, 13/7, 15/7, 16/9, 18/7, 20/6

חשבון אינטגרלי

חישובי אינטגרלים ושטחים

- מציאת פונקציה קדומה: 11/7, 15/8, 17/8, 21/8, 23/7, 29/8, 33/6
- פונקציה פולינומיאלית: 6/7, 14/8, 15/8, 19/8
- פונקציה רציונאלית: 4/7, 22/7, 35/8
- פונקציית שורש: 5/9, 6/8, 12/8, 14/9, 18/6, 20/8, 24/7, 25/7, 28/6, 31/6
- פונקציה טריגונומטרית: 1/8, 2/7, 3/8, 5/7, 5/8, 7/9, 10/8, 11/8, 17/6, 26/6, 28/7, 29/8, 30/6, 33/7

שטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת

- על סמך גרף הפונקציה: 1/7, 26/7
- פונקציה רציונאלית: 12/9, 13/7, 16/7, 27/6
- פונקציית שורש: 4/9, 9/8, 17/7
- פונקציה טריגונומטרית: 4/8, 8/8, 15/7, 22/6, 24/6, 35/6

אינטגרל, עם פרמטר

- פונקציה פולינומיאלית: 14/8, 32/5
- פונקציה רציונאלית: 13/7, 33/6
- פונקציית שורש: 4/9, 12/8, 27/7, 28/6, 31/6
- פונקציה טריגונומטרית: 5/8, 28/7

בעיות ערך קיצון

אינטגרל

- פונקציה פולינומיאלית: 9/9
- פונקציה טריגונומטרית: 5/8

נפח גוף סיבוב

- פונקציית שורש: 34/8

נפח גוף סיבוב

- פונקציית שורש: 7/8
- פונקציה טריגונומטרית: 9/7

המשפטים בגאומטריה

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- 180°.
2. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

---

3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
4. במשולש שווה־שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה־שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה־שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה־צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה־זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא 180°.
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה צלע־זווית־צלע.
18. משפט חפיפה זווית־צלע־זווית.
19. משפט חפיפה צלע־צלע־צלע.
20. משפט חפיפה רביעי: שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות.

---

21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זווית הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

---

22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180° אז שני הישרים מקבילים.
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז: א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
ג. סכום כל זוג זוויות חד־צדדיות הוא 180°.

---

26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

---

33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

---

37. אלכסוני מלבן שווים זה לזה.

38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

39. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.

40. טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא שווה שוקיים.

41. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

42. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

43. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

44. בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השניה.

45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ (החלק הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהחלק האחר).

47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.

48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.

49. שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.

50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל.

51. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.

52. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.

53. כל משולש ניתן לחסום במעגל.

54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.

55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

56. ניתן לחסום מרובע במעגל, אם ורק אם, סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180°.

57. מרובע קמור חוסם מעגל, אם ורק אם, סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.

58. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.

59. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.

60. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.

61. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.

62. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.

63. במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.

64. מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.

65. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.

66. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.

67. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר, וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.

68. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.

69. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

70. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.

71. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.

72. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר, שוות זו לזו.

73. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).

74. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.

75. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.

79. זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.

80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.

81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצא על קטע המרכזים או על המשכו.

---

84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.

86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

87. משולש, בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר זווית.

88. אם במשולש ישר־זווית, זווית חדה של 30°, אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.

89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה 30°.

---

90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

91. משפט תאלס המורחב:

ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש, חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.

92. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים.

93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.

95. משפט דמיון צלע־זווית־צלע.

96. משפט דמיון זווית־זווית.

97. משפט דמיון צלע־צלע־צלע.

98. במשולשים דומים: א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.

ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.

ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.

ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.

ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

---

99. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. **(99–101 לחמש יחידות בלבד)**

100. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

101. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

---

102. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.

103. הגובה ליתר במשולש ישר זווית, הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

104. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $(n-2)\,180^\circ$.

נוסחאון הבגרות לחמש יחידות

אלגברה

- נוסחאות הכפל המקוצר: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \;,\; a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \;,\; a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0 \;,\; a \neq 0$, השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה	$a_1 = a \;,\; a_{n+1} = a_n + d$	$a_1 = a \;,\; a_{n+1} = a_n \cdot q$
האיבר ה־n־י	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

- לוגריתמים $(a, b, c > 0 \;;\; a, b \neq 1)$: $\log_a(a^b) = b \;,\; a^{\log_a b} = b \;,\; \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \;,\; \log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c \;,\; \log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

- גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q : $M_t = M_0 \cdot q^t$

- מספרים מרוכבים: משפט דה־מואבר: $[R(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

פתרונות המשוואה: $z^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ הם:

$z_k = \sqrt[n]{R}\,[\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})] \;,\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

- וקטורים: אורך של וקטור: $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מישור דרך קצוות הוקטורים $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$: $\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) + s(\underline{c} - \underline{a})$

מכפלה סקלרית: $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cos\alpha$

מרחק בין נקודה $\underline{p}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\frac{|\underline{v} \cdot \underline{p} + e|}{|\underline{v}|}$

מציאת זווית בין הישר $\underline{a} + t\underline{b}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\sin\beta = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{b}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{b}|}$

מציאת זווית בין המישורים $\underline{v_1} \cdot \underline{x} + e_1 = 0 \;,\; \underline{v_2} \cdot \underline{x} + e_2 = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\underline{v_1} \cdot \underline{v_2}|}{|\underline{v_1}| \cdot |\underline{v_2}|}$

גאומטריה אנליטית

קו ישר - שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו־(x_2, y_2) :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

משוואת ישר $y = mx + b$ עם שיפוע m העובר בנקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

הנקודה C המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע שקצותיו

הם $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$ ביחס $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{l}$ היא: $\left(\frac{lx_1 + kx_2}{k+l} , \frac{ly_1 + ky_2}{k+l} \right)$

שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו־m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם: $m_1 \cdot m_2 = -1$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $Ax + By + C = 0$:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

מעגל - משוואת משיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

בנקודה (x_0, y_0) שעל המעגל היא:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$$

פרבולה - משוואת משיק לפרבולה $y^2 = 2px$

בנקודה (x_0, y_0) שעל הפרבולה היא: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל־k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית,

כאשר ההסתברות להצלחה היא p :

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad , \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

מי שהאמת עִמו - הוא הרבים, ואפילו הוא לבדו (שמואל יוסף עגנון)

טריגונומטריה

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

- משפט הסינוסים: (R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
- משפט הקוסינוסים: (γ היא הזווית הכלואה בין a ל-b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$
- אורך קשת של α רדיאנים: $l = \alpha R$, שטח גִזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$
- שטח משולש: $S = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin\alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל-c)
- גופים במרחב: פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B\cdot h}{3}$ (B - שטח הבסיס , h - גובה הגוף)

  חרוט: שטח מעטפת: $M = \pi R l$ (R - רדיוס העיגול , l - הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות: $(x^t)' = tx^{t-1}$ (t ממשי) , $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$

  $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$

  נגזרת של מכפלת פונקציות: $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

  נגזרת של מנת פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

  נגזרת של פונקציה מורכבת: $[f(u(x))]' = f'(u)\cdot u'(x)$ כאשר: $u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית) ו-$f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

- אינטגרלים: $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c$ ($t \neq -1$ ממשי)

  אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז:

  $\int f[u(x)]\cdot u'(x)\,dx = F[u(x)] + c$, $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + c$