

## מספר מילים לפני

בעקבות תפירתו עם השנים, של ספר הבגרויות לשאלון זה, עד כדי אי-נוחות, חלקתי אותו לשני חלקים: החלק הראשון מכיל את רב שאלות הבגרות מהשנים 2004-2013 שנערכו במתכונת ה'צבירה', המתאימות לשאלון זה, בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. ספר זה, חלקו השני של ספר הבגרויות, מכיל את כל מבחני הבגרות, 39 מבחנים, שנערכו במתכונת הנוכחית בין השנים 2009-2019.

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:  $\forall$  - לכל,  $\in$  - שייך,  $\nearrow$  - עליה,  $\searrow$  - ירידה,  $\cup$  - איחוד: היחס 'או',  $\cap$  - חיתוך: היחס 'וגם',  $\emptyset$  - קבוצה ריקה (אין פתרון)  $\checkmark$  - אישור למה שבקשנו לברוק או להוכיח,  $ab$  - מוחלט,  $ep.$  - נקודת קצה (end point) 'ללא הגבלת הכלליות' - קביעה ערך מייצג, במקום פרמטר (שאמור ל'היעלם' בהמשך).

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוטי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוטי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו כבוונה. ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעיתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ-2012 עד 2017 (מועד א), כפי שהם בספר, נמצאים באתר ההוצאה במְרְשֶׁת (internet), בעלות שנתית מגוחכת של 20 (עשרים) ש' בלבד. ראו בגב הכריכה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורה שריף אמארה מכפר זלפה.

לאחר כל מבחן בגרות שיערך בשנה הקרובה (התש"פ - 2020), אינן בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את החללים שבין השאלות והפתרונות לחלקתי בהבוקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקדורות לאומיות או יהודיות.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על-ידי חברת 'קל-ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

## ב ה צ ל ח ה א/י איטב

בגרויות עם פתרונות מלאים יצאו גם לשאלונים 382-482-581-582

בגרויות עם תשובות סופיות יצאו לשאלונים 481-482-581-582

© כל הזכויות על השאלות שמורות למדינת ישראל - משרד החינוך, התרבות והספורט

כל הזכויות על הקדר ועל הפתרונות שמורות למחבר

**מבנה מבחן הבגרות לשאלון 481 (804)**

שאלון ד' (35804) מהווה 65% מהציון הסופי.

שאלון ה' (35805) מהווה 35% מהציון הסופי.

משך זמן המבחן: שלוש שעות וחצי.

**פרק א - אלגברה, גאומטריה אנליטית והסתברות.**

בחירה: שתי שאלות מתוך שלוש שאלות.

שאלה 1: שאלה מילוליות

שאלה 2: גאומטריה אנליטית

שאלה 3: הסתברות.

**פרק ב - גאומטריה וטריגונומטריה במישור.**

בחירה: שאלה אחת מתוך שתיים:

שאלה 4: גיאומטריה.

שאלה 5: טריגונומטריה.

**פרק ג - בחירה: שתי שאלות מתוך שלוש שאלות (שאלות 6-8).**

חדו"א של פולינומים, שורש ריבועי ופונקציות רציונליות.

**נקומחוס (Nicomachus)** היה מתמטיקאי מהעיר גֶרֶש שבבעבר הירדן. הוא פעל בסביבות שנת 100 לספירה. התעסק בעיקר בחשבון ובאלגברה. הנה משהו נחמד שהוא גילה: אם ניקח את המספרים הלא זוגיים באופן הבא: פעם ראשונה ניקח את 1, אח"כ את שני הבאים אחרי 1, אח"כ את שלושת הבאים אחריהם וכו' - אזי סכום כל סדרת מספרים כזאת הינה חזקה שלישית לפי הסדר, כפי שמתואר להלן:

$$\begin{aligned}1 &= 1^3 \\3 + 5 &= 8 = 2^3 \\7 + 9 + 11 &= 27 = 3^3 \\13 + 15 + 17 + 19 &= 64 = 4^3 \\21 + 23 + 25 + 27 + 29 &= 125 = 5^3 \\31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 &= 216 = 6^3 \\43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 &= 343 = 7^3 \\57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 &= 512 = 8^3 \\73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 &= 729 = 9^3 \\91 + 93 + 95 + 97 + 99 + 101 + 103 + 105 + 107 + 109 &= 1000 = 10^3 \\&\vdots\end{aligned}$$

**מבחן 1 - קיץ ס"ט - 2009 - מועד א**

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3, שתי שאלות מהשאלות 4-6, שתי שאלות מהשאלות 7-9.

**פרק ראשון - אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות**

1. נתון משולש ישר-זווית  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ), שבו הצלע  $BC$  מקבילה לציר  $x$ .

משוואת הצלע  $AB$  היא  $y = \frac{1}{3}x$ . שיעור  $x$  של קודקוד  $B$  הוא 3.

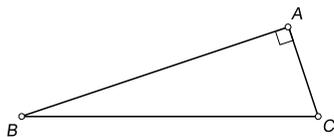
שיעור  $x$  של קודקוד  $C$  גדול ב-1 משיעור  $x$  של קודקוד  $A$ .

א. מצא את שיעורי הקדקודים של המשולש  $ABC$ .

ב. חשב את השטח של המשולש  $ABC$ .

ג. העבירו מעגל החוסם את המשולש  $ABC$ .

מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה  $A$ .



2. בנו קופסה סגורה בצורת תיבה שבסיסה ריבוע. גובה התיבה גדול פי 1.4 מצלע הבסיס.

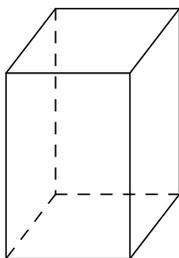
שטח הפנים של התיבה (השטח של שש פאות התיבה) הוא 1710 סמ"ר.

א. מצא את צלע הבסיס, ואת גובה התיבה.

ב. רוצים למלא את התיבה בקוביות, שאורך הצלע של כל אחת מהן

הוא  $\frac{1}{5}$  מאורך צלע הבסיס של התיבה.

בכמה קוביות כאלה אפשר למלא את התיבה?



3. מהתלמידים בכיתה אוהבים שוקולד או גלידה (כולל תלמידים האוהבים שוקולד וגם גלידה).

9 תלמידים אינם אוהבים שוקולד וגם אינם אוהבים גלידה.

א. (1) בוחרים באקראי תלמיד אחד מהכיתה.

מהי ההסתברות שהוא אינו אוהב שוקולד וגם אינו אוהב גלידה?

(2) מצא כמה תלמידים יש בכיתה.

ב. כל תלמיד בכיתה שאוהב שוקולד כתב על פתק: 'כן',

וכל תלמיד שאינו אוהב שוקולד כתב על פתק: 'לא'.

ערבבו את כל הפתקים, ובחרו מביניהם באקראי 5 פתקים עם החזרה.

נתון כי ההסתברות שעל 3 מהם כתוב 'כן' שווה להסתברות שעל 2 מהם כתוב: 'לא'.

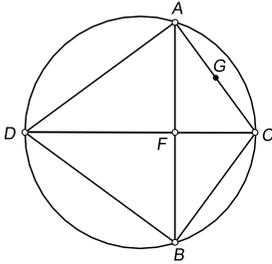
מצא כמה תלמידים בכיתה אוהבים שוקולד.



1. א.  $A(12, 4)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(13, 1)$  ב.  $S_{\Delta} = 15$  (יחידות ריבועיות) ג.  $y = -\frac{4}{3}x + 20$

2. א.  $x = 15\text{cm}$ ,  $h = 21\text{cm}$  ב. 175 (קוביות) 3. א. (1)  $\frac{1}{4}$  (2) 36 (תלמידים) ב. 18 (תלמידים)

**פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור**



4.  $A, B, C$  ו-  $D$  הן נקודות על מעגל.

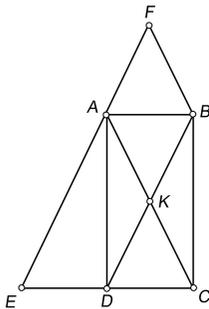
המיתרים  $AB$  ו-  $CD$  נחתכים בנקודה  $F$ .

נתון:  $\angle DAC = \angle DBC$ .

א. הוכח כי  $DC$  הוא קוטר.

ב. נתון גם כי  $\angle ACD = \angle BCD$ . הוכח:  $AB \perp CD$ .

ג. נקודה  $G$  נמצאת על  $AC$  כך ש-  $GF = AG$ . הוכח:  $GF = GC$ .



5. אלכסוני המלבן  $ABCD$  נפגשים בנקודה  $K$ .

דרך הקדקודים  $A$  ו-  $B$  העבירו ישרים המקבילים לאלכסוני המלבן.

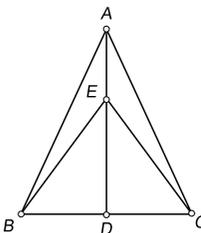
הישרים המקבילים נפגשים בנקודה  $F$ .

המקביל דרך קדקוד  $A$  נפגש עם המשך הצלע  $DC$  בנקודה  $E$ .

א. הוכח כי  $ED = DC$ .

ב. הוכח כי המרובע  $FBKA$  הוא מעוין.

ג. נתון:  $AE = 12\text{cm}$ . חשב את היקף המעוין  $FBKA$ .



6.  $AD$  הוא גובה במשולש שווה-צלעות  $ABC$ .

$E$  נקודה על  $AD$ . נתון:  $\angle BEC = \beta$ .

א. הבע באמצעות  $\beta$  את היחס בין שטח המשולש  $ABC$

$$\text{לבין שטח המשולש } EBC \left( \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBC}} \right)$$

ב. נתון:  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBC}} = \sqrt{3}$ . חשב את  $\beta$ , והראה כי  $ED = DC$ .

בכל התנ"ך כולו, יש רק פסוק אחד, המכיל את כל אותיות הא"ב, כולל כל האותיות הסופיות (מנצפ"ך).

הפסוק הוא בצפניה (מתרי עשר הנביאים) בפרק ג' פסוק ח'.

הפסוק אינו מובא כאן מפאת קדושתו, והקורא מוזמן לעיין שם.

שני פסוקים בתורה המכילים את כל אותיות הא"ב (לא כולל מנצפ"ך)

הם בספר דברים ד' ל"ד ובספר שמות: ט"ז ט"ז

**השאלות**

5. ג.  $24\text{cm}$

6. א.  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBC}} = \sqrt{3} \text{tg } \frac{\beta}{2}$  ב.  $\beta = 90^\circ$

**פרק שלישי - חדר"א של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש**

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$ ,  $a \neq 0$  פרמטר.

א. (1) מצא את שיעורי הנקודות שבהן נגזרת הפונקציה שווה ל-0 (הבע באמצעות a במידת הצורך).

(2) נתון כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על הישר  $y = x + 4$ .

מצא את ערך הפרמטר a.

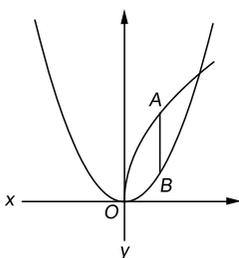
ב. הצב את ערך הפרמטר a שמצאת, וקבע את סוג נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

8. נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{1}{8}x^2$  ו-  $g(x) = \sqrt{2x}$ .

הנקודות A ו- B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך ש- AB מקביל לציר y,

והנקודות נמצאות בין שתי נקודות החיתוך של הגרפים של הפונקציות.



א. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B

שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

ב. עבור האורך המקסימלי של הקטע AB,

חשב את שטח המשולש ABO (ראשית הצירים).

9. שאלה זו עסקה בחדר"א של פונקציות טריגונומטריות. חומר זה הועבר לשאלון 482 (805).

**בהצלחה**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

בחר מספר תלת-ספרתי שבו ספרת המאות נבדלת לפחות ב-2 מספרת היחידות.

הפוך כעת את ספר הספרות. החסר את המספר הקטן מהמספר הגדול.

הפוך כעת את הספרות בהפרש שקיבלת, וחבר את המספר החדש עם ההפרש הקודם. קיבלת: 1089. נכון?

נראה דוגמה: נבחר למשל 823. נהפוך את המספר: 328. נחסיר את הקטן מהגדול:  $823 - 328 = 495$ .

נהפוך את ההפרש: 594. נחבר את המספר החדש להפרש שקיבלנו:  $495 + 594 = 1089$  (✓)

הפלא ופלא ...



7. א. (1)  $(0, 0)$ ,  $(2a, 4a)$  (2)  $a = 2$  ב.  $\max : (0, 0)$ ,  $\min : (4, 8)$

ג.  $\nearrow : (x < 0) \cup (x > 4)$ ,  $\searrow : (0 < x < 2) \cup (2 < x < 4)$

8. א.  $A(2, 2)$ ,  $B(2, \frac{1}{2})$  ב.  $S_{\Delta} = 1\frac{1}{2}$  (יחידות ריבועיות)

**פתרון מבחן 1**

$$x_B = 3 \Rightarrow y_B = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \Rightarrow B(3, 1)$$

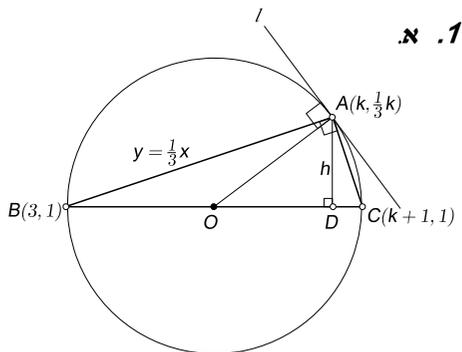
$$BC \parallel (y=0) \Rightarrow y_C = y_B = 1$$

ציר x

$$A(k, \frac{1}{3}k) \Rightarrow x_C = k + 1$$

$$AB \perp AC, m_{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow m_{AC} = -3$$

$$m_{AC} = \frac{\frac{1}{3}k - 1}{k - (k+1)} = \frac{\frac{1}{3}k - 1}{-1} = 1 - \frac{1}{3}k = -3 \Rightarrow \frac{1}{3}k = 4 \Rightarrow k = 12 \Rightarrow A(12, 4), C(13, 1)$$



**א. 1.**

$$S_{\Delta} = \frac{BC \cdot h_a}{2} = \frac{(x_C - x_B) \cdot (y_A - y_D)}{2} = \frac{(13-3) \cdot (4-1)}{2} \Rightarrow S_{\Delta} = 15 \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

**ב.**

ג. נסמן את הישר המשיק ב- l. הפתרון מסתמך על: מרכז המעגל החוסם משולש ישר-זווית הוא אמצע היתר. משיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה.

$$O(\frac{3+13}{2}, 1) \Rightarrow O(8, 1) \Rightarrow m_{OA} = \frac{4-1}{12-8} = \frac{3}{4} \Rightarrow m_l = -\frac{4}{3}$$

$$A(12, 4) \Rightarrow y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 12) \Rightarrow y - 4 = -\frac{4}{3}x + 16 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 20$$

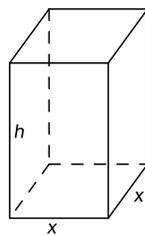
**א. 2.** נסמן: x - אורך צלע הבסיס  $\Leftrightarrow$  גובה התיבה:  $h = 1.4x$  - S - שטח פני התיבה

$$S = 2x^2 + 4x \cdot 1.4x = 1710 \Rightarrow 7.6x^2 = 1710 \Rightarrow x^2 = 225$$

$$\Rightarrow x = 15 \text{ cm} \Rightarrow h = 1.4 \cdot 15 \Rightarrow h = 21 \text{ cm}$$

אורך צלע הקובייה:  $\frac{15}{5} = 3 \text{ cm}$ . הבסיס מכיל שכבה של  $5 \times 5 = 25$  קוביות

ניתן לבנות  $\frac{21}{3} = 7$  שכבות כאלה לגובה. ובסה"כ:  $7 \times 25 = 175$  קוביות



**ב.**

**א. 3.** 1-2 נסמן: A - שיעור התלמידים שאוהבים שוקולד, B - שיעור התלמידים שאוהבים גלידה

x - מספר התלמידים בכיתה

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}x = 9 \Rightarrow x = 36 \text{ (תלמידים)}$$

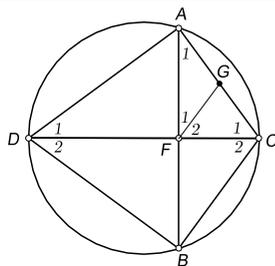
**ב.**

$$P(\text{yes}) = \frac{N(A)}{36} = k, P_5^3 = P_5^2 \Rightarrow \binom{5}{3} \cdot k^3 \cdot (1-k)^2 = \binom{5}{2} \cdot k^2 \cdot (1-k)^3$$

$$\Rightarrow k = 1 - k \Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2} = \frac{N(A)}{36} \Rightarrow N(A) = 18 \text{ (תלמידים)}$$

(1)  $\angle A = \angle B$  , (2)  $\angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \angle A = 90^\circ$

$\angle A = 90^\circ \Rightarrow^{(3)} DC = 2R$  (✓)



$\triangle ACD \cong \triangle BCD$ : (1)  $\angle C_1 = \angle C_2$  , (4)  $DC = DC$  , (1)  $\angle A = \angle B$

$\Rightarrow^{(5)} \angle D_1 = \angle D_2 \Rightarrow^{(6)} \triangle ACD \cong \triangle BCD$

$\triangle ACB$ : (7)  $CA = CB \Rightarrow^{(8)} CF \perp AB$  (✓)

(9)  $\angle A_1 = \angle F_1$  , (10)  $\angle F_2 = 90^\circ - \angle F_1 = 90^\circ - \angle A_1$

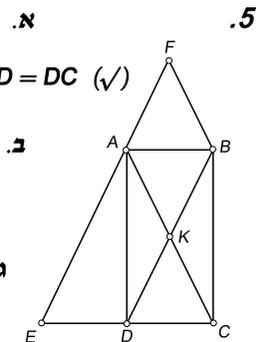
(5)  $\angle C_1 = 90^\circ - \angle A_1 \Rightarrow \angle C_1 = \angle F_2 \Rightarrow^{(11)} GF = GC$  (✓)

(12)  $AK = KC$  , (1)  $DK \parallel AE \Rightarrow \triangle ACE$  ב"ז קטע אמצעים  $DK \Rightarrow ED = DC$  (✓)

$FBKA$  מקבילית , (12)  $AK = KB \Rightarrow^{(13)}$  מעוין  $FBKA$  (✓)

$AE = 12_{cm} \Rightarrow^{(14)} BD = 12 \Rightarrow^{(12)} KB = \frac{12}{2} = 6$

$\Rightarrow BK + KA + AF + FB = 4 \cdot 6 = 24_{cm}$



(1) נתון (2) סכום זוויות נגדיות של מרובע החסום במעגל הוא  $180^\circ$

(3) זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר (4) צלע משותפת

(5) השלמה ל-  $180^\circ$  במשולש (6) משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (7) צמב"ח

(8) חוצה זווית הראש במשולש שווה-שוקיים הוא גם גובה לבסיס

(9) זוויות הבסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו (10) השלמה ל-  $90^\circ$

(11) משולש ששתי זוויות שלו שוות זו לזו הוא משולש שווה-שוקיים

(12) אלכסוני מלבן שווים זה לזה וחוצים זה את זה

(13) מקבילית ששתי צלעות סמוכות שלה שוות זו לזו - היא מעוין

(14) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו

6. א. נסמן את אורך BC ב-  $a$  :  $BC = a$ .

גובה במשולש שווה-צלעות הוא גם אנך אמצעי, וגם חוצה-זווית, לכן:  $BD = DC = \frac{a}{2}$

ED הוא גם גובה וגם תיכון במשולש  $\triangle EBC \leftarrow EBC$  שווה-שוקיים

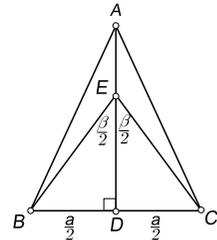
$$\Rightarrow \angle BED = \angle CED = \frac{\beta}{2}$$

$$\triangle EDB: \angle BED = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{DB}{ED} = \frac{\frac{a}{2}}{ED} \Rightarrow ED = \frac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$$

$$\triangle ADB: \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{\frac{a}{2}} = \frac{2AD}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBC}} = \frac{BC \cdot AD}{\frac{BC}{2} \cdot ED} = \frac{BC \cdot AD}{\frac{BC \cdot ED}{2}} = \frac{2AD}{ED}$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{a} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBC}} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$



ב.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBC}} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\beta}{2} = 45^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ \Rightarrow \triangle EDC: \frac{\beta}{2} = 45^\circ \Rightarrow \angle ECD = 45^\circ \Rightarrow ED = DC \quad (\checkmark)$$

7. א. (1)

$$f(x) = \frac{x^2}{x-a}, \quad f'(x) = \frac{2x(x-a) - 1 \cdot x^2}{(x-a)^2} = \frac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2} = \frac{x(x-2a)}{(x-a)^2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$x(x-2a) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2a$$

$$f(0) = \frac{0}{0-a} = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$f(2a) = \frac{4a^2}{2a-a} = \frac{4a^2}{a} = 4a \Rightarrow (2a, 4a)$$

(2)

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x = 2a$$

$$\Rightarrow 2a + 4 = 4a \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

ב.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}, \quad f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}, \quad (x^2 - 4x)' = 2x - 4$$

$$\underline{2 \cdot 0 - 4} < 0 \Rightarrow f''(0) < 0 \Rightarrow \max: (0, 0)$$

$$\underline{2 \cdot 4 - 4} > 0 \Rightarrow f''(4) > 0 \Rightarrow \min: (4, 8)$$

ג.

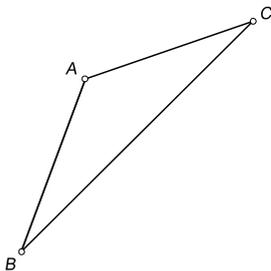
$$x_{\max} = 0, \quad x \neq 2, \quad x_{\min} = 4 \Rightarrow \underline{\text{ז}}: (x < 0) \cup (x > 4)$$

$$\underline{\text{ב}}: (0 < x < 2) \cup (2 < x < 4)$$

**מבחן 2 - קיץ ס"ט - 2009 - מועד ב**

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3, שתי שאלות מהשאלות 4-6, שתי שאלות מהשאלות 7-9.

**פרק ראשון - אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות**



1. נתון משולש שווה-שוקיים ABC שבו  $AB = AC$ .

שיעורי הקדקוד B הם  $(1, 0)$ .

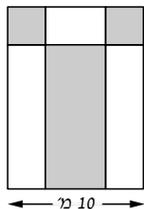
שיפוע הישר BC הוא 1.

משוואת הישר AC היא  $x - 3y + 9 = 0$ .

א. מצא את השיעורים של: (1) הקדקוד C (2) הקדקוד A

ב. הישר AC חותך את ציר y בנקודה D. הצלע BC היא קוטר במעגל.

קבע אם הנקודה D נמצאת על מעגל זה. נמק.



2. בגינה בצורת מלבן רוצים לשתול דשא בשטחים האפורים בציור:

שני השטחים בפינות הגינה הם בצורת ריבועים,

והשטח האמצעי הוא בצורת מלבן.

רוחב הגינה הוא 10 מטר, ואורכה גדול ב- 20% מרוחבה.

מחיר מ"ר של הדשא הוא 60 ש"ח והמחיר הכולל של הדשא ששותלים הוא 3240 ש"ח.

מצא את סכום השטחים של הדשא שבפינות הגינה.

3. בבית ספר מסוים 60% מכלל המורים (גברים ונשים) מתנגדים ללעיסת מסטיק בשיעור.

מספר המורים (גברים) בבית הספר גדול פי 4 ממספר המורות (נשים).

0.57 מכלל המורים (גברים ונשים) הם גברים המתנגדים ללעיסת מסטיק בשיעור.

בוחרים באקראי מורה (גבר או אישה).

א. חשב את ההסתברות שהמורה שנבחר הוא אישה המתנגדת ללעיסת מסטיק בשיעור.

ב. (1) ידוע שהמורה שנבחר הוא אישה.

חשב את ההסתברות שהיא מתנגדת ללעיסת מסטיק בשיעור.

(2) מבין 5 מורות בבית הספר, מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מורות מתנגדות

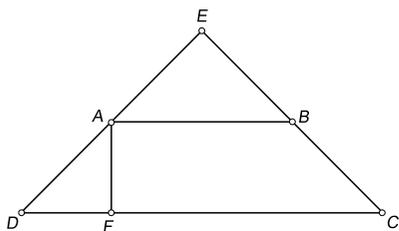
ללעיסת מסטיק בשיעור? (דייק עד ארבע ספרות מימין לנקודה העשרונית).

**תשובות**

2.  $18 \text{ m}^2$

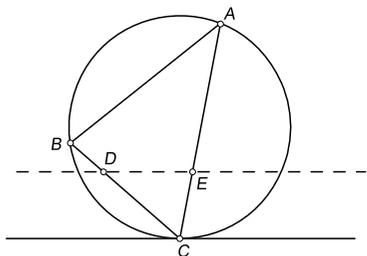
1. א. (1)  $C(6,5)$  (2)  $A(2\frac{1}{4}, 3\frac{3}{4})$  ב. כן

3. א. 0.03 ב. 0.15 (1) 0.9999 (2)

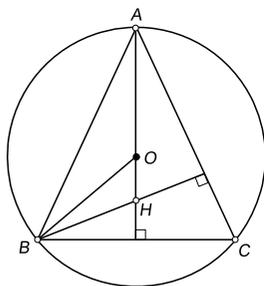


**פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור**

4. טרפז ABCD הוא שווה-שוקיים ( $AD = BC$ ).  
 AF הוא גובה הטרפז.  
 המשכי השוקיים של הטרפז נפגשים בנקודה E.  
 נתון:  $DA = AE$ ,  $DC = 4 AF$ .  
 א. הוכח כי המשולש DAF הוא שווה-שוקיים.  
 ב. נתון:  $AE = 5 \text{ cm}$ . חשב את אורך הצלע AB. נמק.  
 ג. היכן נמצא מרכז המעגל החוסם המשולש DEC:  
 על אחת מצלעות משולש זה, בתוך משולש זה או מחוץ למשולש זה? נמק.



5. משולש ABC חסום במעגל.  
 דרך קדקוד C מעבירים משיק למעגל.  
 ישר המקביל למשיק חותך את הצלע AC בנקודה E  
 ואת הצלע BC בנקודה D.  
 א. הוכח:  $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ .  
 ב. נתון:  $AE = 2 EC$ ,  $DC = 6 \text{ cm}$ ,  $BD = 2 \text{ cm}$ .  
 מצא את היחס בין שטח המשולש ABC לבין שטח המשולש DEC. נמק.



6. משולש שווה-שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) חסום במעגל שמרכזו O.  
 הגבהים של המשולש נפגשים בנקודה H.  
 זווית הראש של המשולש היא  $\alpha$  ורדיוס המעגל הוא R.  
 א. הבע באמצעות  $\alpha$  את זווית המשולש ABH.  
 ב. הבע באמצעות  $\alpha$  ו-R את אורך הקטע AH.  
 ג. הבע באמצעות  $\alpha$  ו-R את שטח המשולש OBH.

למספר הראשוני 23, 333, 333, 333, 333, 333, 333 יש 23 ספרות!

**תשובות**

4. א.  $AB = 5\sqrt{2} \text{ cm}$  ג. על (אמצע DC - היתר)  
 5. א. 4  
 6. א.  $\angle A = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\angle B = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle H = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$  ב.  $AH = 2R \cos \alpha$  ג.  $S_{\triangle OBH} = R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}$  (יחידות ריבועיות)

3. א. (1) נסמן: W - לבן (white)

$$P = P(A \cap W) + P(B \cap W) + P(C \cap W) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow P = \frac{2}{5}$$

(2)

$$P = P(B|W) = \frac{P(B \cap W)}{P(W)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} \Rightarrow P = \frac{1}{3}$$

ג. בקופסה C לא יישאר כדור לבן אם:

בפעם הראשונה יצא לבן ( $W_1$ ) או בפעם השנייה יצא לבן (ואז בפעם הראשונה יצא שחור):

$$P = P(W_1) + P(\overline{W_1} \cap W_2) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow P = \frac{2}{5}$$

4. א.  $\angle ABD$  היא זווית בין משיק למיתר.

ככזו, היא שווה לזווית היקפית הנשענת על המיתר BD מצידו השני.

זווית מרכזית ( $\angle BOD$  במקרה שלנו) שווה לפעמיים הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת:

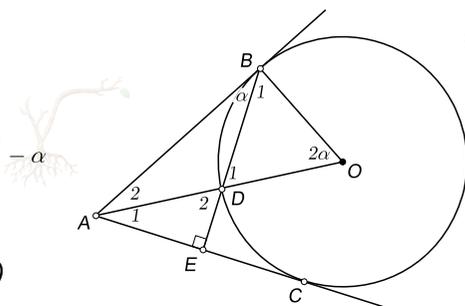
$$\angle BOD = 2 \cdot \angle ABD \quad (\checkmark)$$

$$(1) \angle ABD = \alpha \Rightarrow^{(2)} \angle BOD = 2\alpha$$

$$OB = OD = R \Rightarrow^{(3,4)} \angle B_1 = \angle D_1 = 90^\circ - \alpha$$

$$(5) \angle D_2 = \angle D_1 = 90^\circ - \alpha$$

$$(3) \angle A_1 = \alpha \Rightarrow \angle BOD = 2 \angle DAE \quad (\checkmark)$$



ג. (1)

(2)

$$(6) \angle A_2 = \angle A_1 = \alpha = \angle ABD \Rightarrow^{(7)} BD = AD \quad (\checkmark)$$

(1) סימון (2) מסעיף קודם (3) השלמה ל- $180^\circ$  במשולש

(4) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו (5) זוויות קדקודיות שוות זו לזו

(6) קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל,

חוצה את הזווית שבין המשיקים

(7) מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות

#### סדרה חשבונית

בפסוק ג' במזמור קכ"ט בתהילים יש 6 מילים.

מספר האותיות שלהם הוא סדרה חשבונית: המילה הראשונה בת שתי אותיות, השנייה בת שלוש אותיות,

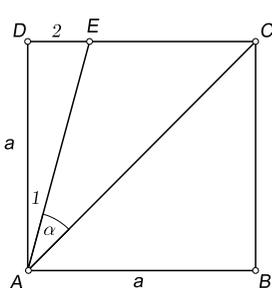
השלישית בת ארבע אותיות, וכך הלאה עד המילה השישית שלה שבע אותיות.

(1)  $\angle A_1 = 45^\circ - \alpha$

$\triangle ADE$ :  $\frac{2}{a} = \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) \Rightarrow a = \frac{2}{\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)} \text{cm}$

(2)  $\alpha = 30^\circ \Rightarrow a = \frac{2}{\operatorname{tg} 15^\circ} = 7.46 \text{cm}$

$S_{\triangle ACE} = \frac{EC \cdot DA}{2} = \frac{(a-2) \cdot a}{2} = \frac{5.46 \cdot 7.46}{2} \Rightarrow S_{\triangle ACE} = 20.37 \text{cm}^2$



א. 5

ב.

ג.

$DE = EC = 2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 4 = \frac{2}{\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)} \Rightarrow \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 45^\circ - \alpha = 26.57^\circ \Rightarrow \alpha = 18.43^\circ$

(1) אלכסוני ריבוע חוצים את זוויתיו (2) נתון

א. 6

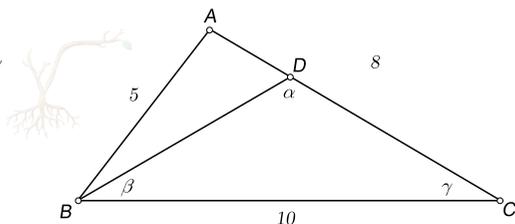
$\triangle ABC$ : (1)  $5^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \gamma$

$25 = 64 + 100 - 160 \cos \gamma$

$\cos \gamma = \frac{-139}{-160} \Rightarrow \gamma = 29.69^\circ$

(2)  $DB = DC \Rightarrow^{(3)} \beta = \gamma = 29.69^\circ$

$\Rightarrow \alpha = 180^\circ - 2 \cdot 29.69^\circ \Rightarrow \alpha = 120.62^\circ$



ב.

$\triangle DBC$ : (4)  $\frac{10}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow R_{DBC} = \frac{5}{\sin \alpha}$

$\triangle ADB$ : (5)  $\angle D = 180^\circ - \alpha \Rightarrow^{(4)} 2R = \frac{5}{\sin(180^\circ - \alpha)} =^{(6)} \frac{5}{\sin \alpha} \Rightarrow R_{ADB} = \frac{2.5}{\sin \alpha}$

$R_{ABD} : R_{BDC} = \frac{2.5}{\sin \alpha} : \frac{5}{\sin \alpha} = \frac{2.5}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{5} \Rightarrow R_{ABD} : R_{BDC} = 1 : 2$

(1) משפט הקוסינוסים (2) נתון (3) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו

(4) משפט הסינוסים (5) השלמה ל-180° של זווית שטוחה (6)  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

את המספר הראשוני 2083 ניתן להציג באופן הבא:

$$2083 = \frac{7! - 6! - 5! - 4! - 3! - 2! - 1! - 0!}{2}$$

7. א.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}, \quad (1) \ x \neq 0, \quad (2) \ x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} + \\ - \\ - \\ + \end{array} \Rightarrow (x \leq -2) \cup (x \geq 2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow (x \leq -2) \cup (x \geq 2)$$

ב.

$$x = 0 \notin \{(x \leq -2) \cup (x \geq 2)\}$$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow (\pm 2, 0)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} \cdot x^2 - 2x \cdot \sqrt{x^2-4}}{x^4} = \frac{x^3 - 2x(x^2-4)}{x^4 \sqrt{x^2-4}} = \frac{-x^3 + 8x}{x^4 \sqrt{x^2-4}} = \frac{x(-x^2+8)}{x^4 \sqrt{x^2-4}} \stackrel{?}{=} 0$$

$$(1) \ x = 0 \notin \{(x \leq -2) \cup (x \geq 2)\}$$

$$(2) \ -x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

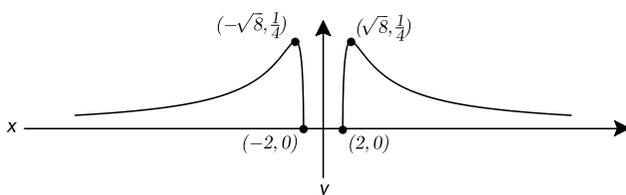
כדי לזהות את סימן הנגזרת השנייה בנקודות החשודות, מספיק לגזור את המונה של  $f'(x)$ , מכיון שהמכנה של  $f'(x)$  חיובי בנקודות החשודות.

$$(-x^3 + 8x)' = -3x^2 + 8, \quad -3(\pm\sqrt{8})^2 + 8 = -3 \cdot 8 + 8 < 0 \Rightarrow x_{\max} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$f(\pm\sqrt{8}) = \frac{\sqrt{8-4}}{8} = \frac{\sqrt{4}}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

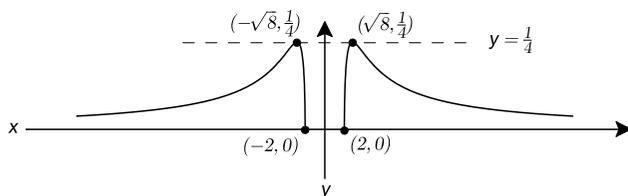
$$f(\pm 2) = \frac{\sqrt{4-4}}{4} = 0, \quad f(x) \geq 0 \ \forall x \Rightarrow \min_{ab}(\pm 2, 0), \quad \max_{ab}(\pm\sqrt{8}, \frac{1}{4})$$

7. (1)



(2) ישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות הוא הישר העובר דרך נקודות המקסימום.

$$\text{ראה ציור. משוואת ישר זה: } y = \frac{1}{4}$$



מי שמדבר איתך על אחרים - מדבר עם אחרים עליך

8. א. (1)

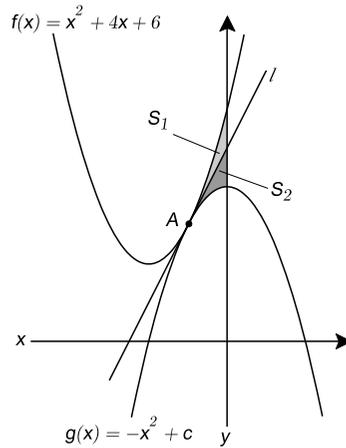
$$f'(x) = 2x + 4 \Rightarrow m = 2t + 4$$

$$g'(x) = -2x \Rightarrow m = -2t$$

$$f'(t) = g'(t) \Rightarrow 2t + 4 = -2t$$

$$\Rightarrow 4t = -4 \Rightarrow t = -1$$

$$f(-1) = 1 - 4 + 6 = 3 \Rightarrow A(-1, 3)$$



(2)

(3)

$$g(-1) = f(-1) = 3 \Rightarrow g(-1) = -1 + c = 3 \Rightarrow c = 4$$

ב.

$$\therefore m = -2t = -2 \cdot (-1) = 2, A(-1, 3) \Rightarrow y - 3 = 2(x + 1) = 2x + 2 \Rightarrow y = 2x + 5$$

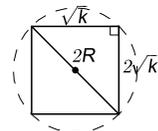
$$S_1 = \int_{-1}^0 ((x^2 + 4x + 6) - (2x + 5)) dx = \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx$$

$$S_2 = \int_{-1}^0 ((2x + 5) - (-x^2 + 4)) dx = \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx = S_1 \Rightarrow S_1 = S_2 (\checkmark)$$

9. א. x, y - מימדי המלבן

$$S = x \cdot y = k \Rightarrow y = \frac{k}{x} \Rightarrow f(x) = 2(x + \frac{k}{x}) \text{ פונקציית ההיקף:}$$

$$f'(x) = 2(1 - \frac{k}{x^2}) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{k}{x^2} = 1, x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{k}$$



$$f''(x) = -2k \cdot (-\frac{2}{x^3}) = \frac{4k}{x^3} \Rightarrow f''(\sqrt{k}) = \frac{4k}{k^{1.5}} > 0 \Rightarrow \min(\checkmark) \text{ אישור מינימום:}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{k}, y = \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k} \Rightarrow \sqrt{k}_{cm} \times \sqrt{k}_{cm}$$

ב. על סמך: זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר ומשפט פיתגורס:

$$(\sqrt{k})^2 + (\sqrt{k})^2 = (2R)^2 = 8^2 \Rightarrow k + k = 64 \Rightarrow 2k = 64 \Rightarrow k = 32$$

למה לעשות את החיים קלים?

את הזהות הפשוטה והמשעממת  $1 + 1 = 2$  ניתן להמיר בזהות שקולה,

$$\ln \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x \right] + \sin^2 x + \cos^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\cos x| \cdot \sqrt{1 + t g^2 x}}{2^n} \text{ אבל הרבה יותר מעניינת.}$$

**מבחן 14 - חורף תשע"ג - 2013 - לוחמים**

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3, שתי שאלות מהשאלות 4-6, שתי שאלות מהשאלות 7-9.

**פרק ראשון - אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות**

1. שני הולכי רגל, I ו II, יצאו זה לקראת זה בשעה 8:00 בבוקר.

הולך רגל I יצא מנקודה A לנקודה B, והולך רגל II יצא מנקודה B לנקודה A.

הולך רגל I הלך כל הדרך במהירות קבועה של  $v$  קמ"ש.

הולך רגל II הלך כל הדרך במהירות קבועה שהיתה גדולה ב- 20% מהמהירות של הולך רגל I.

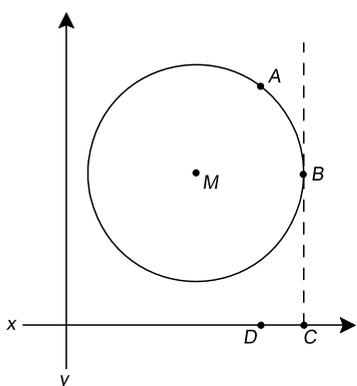
הולכי הרגל נפגשו כעבור שעתיים בנקודה C, והמשיכו כל אחד לדרכו.

א. הבע באמצעות  $v$  את המרחק שעבר כל אחד מהולכי הרגל עד לנקודת המפגש ב- C.

ב. הולך הרגל II עבר עד הפגישה 2 ק"מ יותר מהולך רגל I.

(1) מצא את המהירות של הולך רגל I.

(2) מצא באיזו שעה הגיע הולך רגל I לנקודה B.



2. נתון המעגל  $(x-6)^2 + (y-7)^2 = R^2$  שמרכזו M.

הנקודה A(9, 11) נמצאת על המעגל.

א. מצא את משוואת המעגל.

ב. העבירו משיק למעגל בנקודה B.

המשיק מקביל לציר y וחותך את ציר x בנקודה C.

D היא נקודה על ציר x כך שהנקודה (7.5, 3.5)

(שאינה מסומנת בציור) היא אמצע הקטע MD.

מצא את שיעורי הנקודות B, C ו D.

ג. מצא את שטח הטרפז MBCD.

**טעויות נכונות**

לפעמים טעויות יכולות להיות נכונות:

$$\frac{16'}{64} = \frac{1}{4} \quad (\checkmark) \quad \frac{1616'}{6464} = \frac{11}{44} = \frac{1}{4} \quad (\checkmark) \quad \frac{26'}{65} = \frac{2}{5} \quad (\checkmark) \quad \frac{19'}{95} = \frac{1}{5} \quad (\checkmark) \quad \frac{49'}{98} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad (\checkmark)$$

$$\frac{143,185}{17,018,560} = \frac{1,435}{170,560} \quad (\checkmark) \quad \frac{4,251,935,345}{91,819,355,185} = \frac{425,345}{9,185,185} \quad (\checkmark)$$

יש אינסוף דוגמאות כאלה.

**השאלות**

1. א.  $S_I = 2v_{km}$ ,  $S_{II} = 2.4v_{km}$  ב. (1)  $v = 5_{km/h}$  (2) 12:24

2. א.  $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 25$  ב.  $B(11, 7)$ ,  $C(11, 0)$ ,  $D(9, 0)$  ג.  $S_{MBCD} = 24\frac{1}{2}$  (יחידות ריבועיות)

3. רונית ניגשת לבחינה.

אם רונית תלמד לבחינה, ההסתברות שהיא תצליח בה היא 0.7 .

אם רונית לא תלמד לבחינה, ההסתברות שהיא תצליח בה היא 0.5 .

נתון כי ההסתברות שרונית תצליח בבחינה היא 0.62 .

א. מהי ההסתברות שרונית למדה לבחינה?

ב. ידוע שרונית הצליחה בבחינה. מהי ההסתברות שהיא למדה לבחינה?

ג. כדי להתקבל לאוניברסיטה יש להצליח לפחות ב־ 3 מבין 5 בחינות.

רונית למדה לכל הבחינות. ההסתברות שהיא תצליח בכל אחת מהן היא 0.7 .

מהי ההסתברות שרונית תתקבל לאוניברסיטה?

**פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור**

4. בצויר, AD הוא קוטר במעגל. בנקודה D מעבירים משיק למעגל,

ומהנקודה B שעל המעגל מעבירים ישר

החותך את המשיק בנקודה C.  $AD \parallel BC$  .

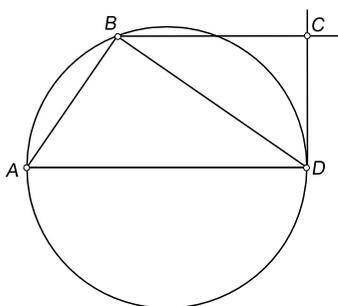
א. הוכח:  $\triangle ABD \sim \triangle DCB$  .

ב. נתון גם:  $BC = 8\text{cm}$  ,  $BD = a\text{cm}$  .

הבע באמצעות a את אורכי הקטעים CD ו־ AD .

ג. נתון גם כי שטח המשולש BCD הוא 24 סמ"ר.

מצא את סכום אורכי האלכסונים של המרובע ABCD .



5. נתון משולש ABC, שבו DF הוא קטע אמצעים

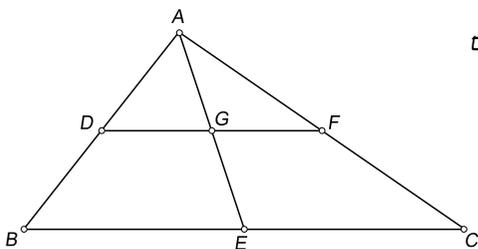
ו־ AE הוא תיכון לצלע BC .

AE ו־ DF נחתכים בנקודה G .

א. הוכח:  $DG = GF$  .

ב. נסמן ב־ S את שטח המשולש AGF .

הבע באמצעות S את שטח המשולש ABC .

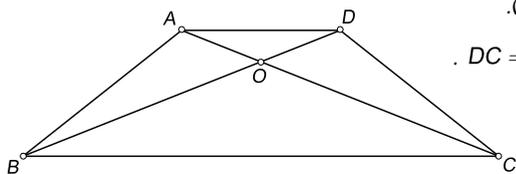


**תולדות**

3. א.  $P = 0.6$  ב.  $P = \frac{21}{31}$  ג.  $P = 0.83692$

4. א.  $AD = \frac{a^2}{8}\text{cm}$  ,  $CD = \sqrt{a^2 - 64}\text{cm}$  ב.  $BD + AC = 23.87\text{cm}$  ג.

5. א.  $S_{\triangle ABC} = 8S$  (יחידות ריבועיות) ב.



6. בצויר טרפז שווה-שוקיים ABCD ( $AD \parallel BC$ ).

$DC = 12\text{cm}$ ,  $BD = 20\text{cm}$ ,  $S_{\triangle BDC} = 60\sqrt{3}\text{cm}^2$ .

א. נתון גם:  $\angle BDC > 90^\circ$ .

מצא את גודל  $\angle BDC$  ו-  $\angle BCD$ .

ב. האם טרפז זה יכול לחסום מעגל? נמק.

**פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש**

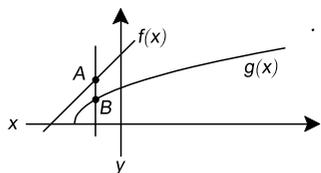
7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x-5}{x+3}$ . מצא עבור  $f(x)$  את:

א. תחום ההגדרה. ב. האסימפטוטות המקבילות לצירים. ג. נקודות חיתוך עם הצירים.

ד. תחומי עליה וירידה (אם יש כאלה). ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון כי  $g(x) = -f(x)$ . היעזר בתשובתיך לסעיפים א ו-ב ורשום את:

(1) תחום ההגדרה של  $g(x)$  (2) האסימפטוטות של  $g(x)$  המקבילות לצירים



8. נתונות שתי הפונקציות  $f(x) = x + t$ ,  $t \geq 3$  ו-  $g(x) = \sqrt{2x+5}$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.

ב. ישר המקביל לציר  $y$  חותך את הגרפים

של  $f(x)$  ושל  $g(x)$  בנקודות A ו- B בהתאמה.

מצא את שיעורי  $x$  של הנקודות A ו- B שעבורם מתקבל המרחק המינימלי בין A ל- B.

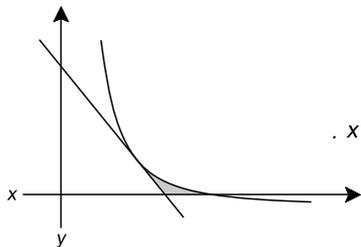
ג. הבע באמצעות  $t$  את המרחק המינימלי.

9. נתונה הפונקציה  $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$  בתחום  $x > 0$ .

א. מצא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$ .

ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה,

על-ידי המשיק ועל-ידי ציר  $x$ .



**בהצלחה** - זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל - אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

**תשובות**

6. א.  $\angle BDC = 120^\circ$ ,  $\angle BCD = 38.21^\circ$  ב. לא

7. א.  $x \neq -3$  ב.  $x = -3$ ,  $y = 1$  ג.  $(0, -1\frac{2}{3})$ ,  $(5, 0)$  ד.  $\text{ז}': \emptyset$ ,  $\text{ח}': x \neq -3$

ו. (1)  $x \neq -3$  (2)  $x = -3$ ,  $y = -1$

8. א.  $f: \forall x$ ,  $g: x \geq -2.5$  ב.  $x_{\min} = -2$  ג.  $AB_{\min} = t - 3$  (יחידות אורך)

9. א.  $y = -2x + 2\frac{3}{4}$  ב.  $S = \frac{7}{64}$  (יחידה ריבועית)

**פתרון מבחן 14**

1. א. נתון:  $v$  - מהירות הולך |  $1.2v = 120\%$  מהירות הולך ||

time = 2  $\Rightarrow S_I = 2v_{km}$  ,  $S_{II} = 2 \cdot 1.2v_{km} \Rightarrow S_{II} = 2.4v_{km}$

ב. (1)

$S_{II} = S_I + 2 \Rightarrow 2.4v = 2v + 2 \Rightarrow 0.4v = 2 \Rightarrow v = 5_{km/h}$

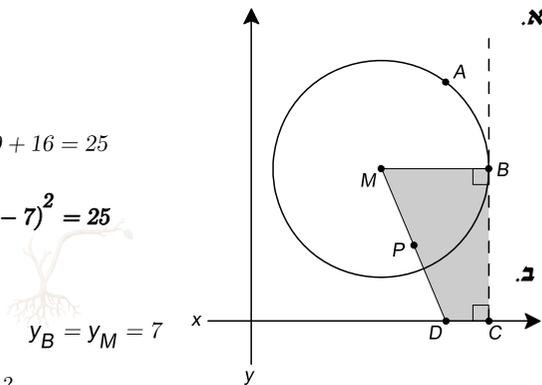
(2)

$AB = 2v + 2.4v = 2 \cdot 5 + 2.4 \cdot 5 = 10 + 12 = 22 \Rightarrow time = \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5} \cdot 60 = 24_{minutes}$  ,  $8:00 + 4\frac{2}{5} \Rightarrow 12:24$

2. א.

$A(9, 11) \in \{(x-6)^2 + (y-7)^2 = R^2\}$   
 $\Rightarrow R^2 = (9-6)^2 + (11-7)^2 = 9 + 16 = 25$   
 $\Rightarrow (x-6)^2 + (y-7)^2 = 25$



ב.

B:  $M(6, 7)$  ,  $MB \perp BC$  ,  $BC \perp DC \Rightarrow y_B = y_M = 7$

$(x-6)^2 + (7-7)^2 = 25 \Rightarrow (x-6)^2 = 25$

$x-6 = \pm 5 \Rightarrow x_1 = 11$  ,  $x_2 = 1 \Rightarrow x_B = 11 \Rightarrow B(11, 7)$

C:  $x_C = x_B = 11$  ,  $y_C = 0 \Rightarrow C(11, 0)$

D:  $M(6, 7)$  ,  $P(7.5, 3.5) \Rightarrow \frac{x_D+6}{2} = 7.5 \Rightarrow x_D = 9$  ,  $y_D = 0 \Rightarrow D(9, 0)$

ג.

$MB = R = 5$  ,  $DC = x_C - x_D = 11 - 9 = 2$  ,  $h = BC = y_B - y_C = 7 - 0 = 7$

$S_{MBCD} = \frac{(MB+DC) \cdot h}{2} = \frac{(5+2) \cdot 7}{2} = \frac{49}{2} \Rightarrow S_{MBCD} = 24\frac{1}{2}$  (יחידות ריבועיות)

תשובה:

שאלה:  
מצא את x

3. סימונים: A - ההסתברות להצלחה, B - הסתברות שרונית למדה לבחינה

	A	$\bar{A}$	$\Sigma$
B	$0.7x = 0.42$	$0.6 - 0.42 = 0.18$	$x = 0.6$
$\bar{B}$	$0.5 - 0.5x = 0.2$	$0.4 - 0.2 = 0.2$	$1 - 0.6 = 0.4$
$\Sigma$	0.62	$1 - 0.62 = 0.38$	1

(I)  $P(A/B) = 0.7 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{x} = 0.7 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.7x$

(II)  $P(A/\bar{B}) = 0.5 \Rightarrow \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{1-x} = 0.5 \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0.5 - 0.5x$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0.7x + 0.5 - 0.5x = 0.62 \Rightarrow 0.2x = 0.12 \Rightarrow x = 0.6$

א. ישירות מהטבלה:

$P(B) = 0.6$

ב.

$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.42}{0.62} \Rightarrow P = \frac{21}{31}$

ג.

$P = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \binom{5}{3} \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^2 + \binom{5}{4} \cdot 0.7^4 \cdot 0.3 + 0.7^5$

$= 0.3087 + 0.36015 + 0.16807 \Rightarrow P = 0.83692$

א. 4

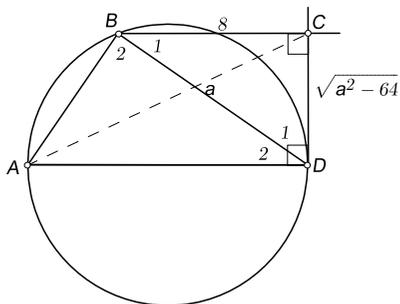
(1)  $\angle D_1 = \angle A$ , (2)  $\angle D_2 = \angle B_1$

$\Rightarrow^{(3)} \triangle ABD \sim \triangle DCB$  (✓)

(4)  $\angle B_2 = 90^\circ \Rightarrow^{(5)} \angle C = 90^\circ$

(6)  $CD = \sqrt{a^2 - 8^2} \Rightarrow CD = \sqrt{a^2 - 64}$  cm

(7)  $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{a} = \frac{a}{8} \Rightarrow AD = \frac{a^2}{8}$  cm



ב.

ג.

$S_{\triangle BCD} = \frac{8 \cdot \sqrt{a^2 - 64}}{2} = 24 \Rightarrow \sqrt{a^2 - 64} = 6 \Rightarrow a^2 - 64 = 36 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

$AD = \frac{a^2}{8} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$ ,  $CD = \sqrt{100 - 64} = 6 \Rightarrow^{(6)} AC = \sqrt{156.25 + 36} = \sqrt{192.25} = 13.87$

$BD = a = 10 \Rightarrow BD + AC = 23.87$  cm

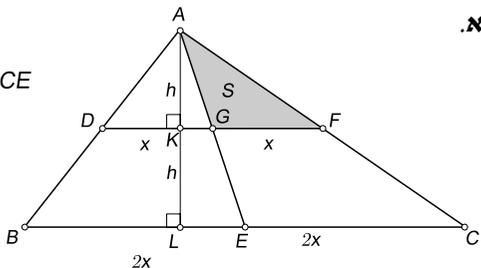
(1) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על המיתר מצידו השני

(2) זוויות מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי (3) משפט דמיון זווית-זווית

(4) זווית היקפית הנשענת על קוטר (5) זוויות מתאימות במשולשים דומים (6) פיתגורס

(7) יחס הדמיון

5. א.



$$(1) DF = \frac{1}{2} BC = (2) BE = EC \Rightarrow \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} CE$$

$$(3) DG \parallel BE \Rightarrow (4) DG = \frac{1}{2} BE$$

$$(3) FG \parallel CE \Rightarrow (4) FG = \frac{1}{2} CE$$

$$\Rightarrow (5) DG = GF \quad (\checkmark)$$

ב.

$$(6) DG = GF = x \Rightarrow BE = EC = 2x \Rightarrow BC = 4x$$

$$(7) AL \perp BC, (3) DG \parallel BE, (2) AD = DB \Rightarrow (8) AK = KL = (6) h \Rightarrow AL = 2h$$

$$S_{\triangle AGF} = S \Rightarrow \frac{xh}{2} = S, S_{\triangle ABC} = \frac{4x \cdot 2h}{2} = \frac{xh}{2} \cdot 8 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 8S \quad (\text{יחידות ריבועיות})$$

(1) קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע השלישית (2) נתון

(3) קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית

(4) קטע במשולש המחבר אמצע צלע אחת עם צלע אחרת ומקביל לצלע השלישית הוא קטע אמצעים

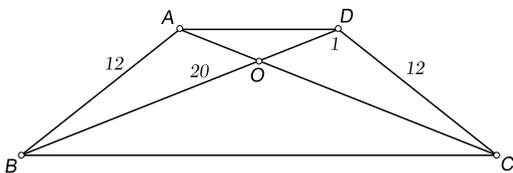
(5) כלל המעבר (6) סימון (7) בניית עזר (8) תאלס

6. א.

$$S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 20 \cdot \sin \angle D_1 = 60\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin \angle D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ = \sin 120^\circ$$

$$\angle D_1 > 90^\circ \Rightarrow \angle BDC = 120^\circ$$



$$\triangle BDC: BC^2 = 12^2 + 20^2 - 2 \cdot 12 \cdot 20 \cdot \cos 120^\circ = 784 \Rightarrow BC = \sqrt{784} = 28$$

משפט הקוסינוסים

$$\frac{20}{\sin \angle BCD} = \frac{28}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \sin \angle BCD = \frac{20 \cdot \sin 120^\circ}{28} = 0.6186 \Rightarrow \angle BCD = 38.21^\circ$$

משפט הסינוסים

ב. לא.

נתאי הכרחי ומספיק שמרובע יחסום מעגל הוא שסכום צלעותיו הנגדיות יהיה שווה.

$$\text{כלומר: } AB + DC = AD + BC$$

נתוני השאלה:  $12 + 12 = AD + 28$  כלומר:  $AD = 24 - 28 < 0$ . סתירה.

7. א.

$$f(x) = \frac{x-5}{x+3}, \quad x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$$

ב.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(1+\frac{3}{x})} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-5}{x+3} = \frac{-8}{0} = \infty \Rightarrow x = -3$$

ג.

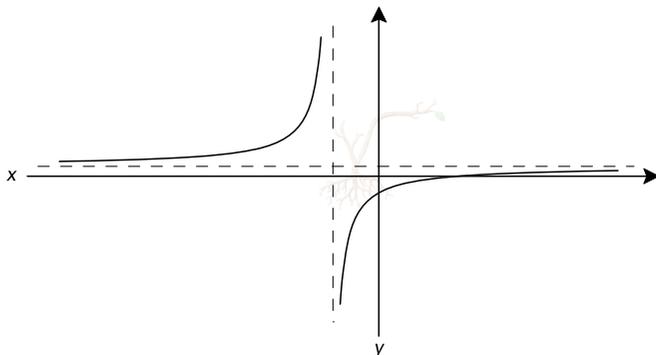
$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{-5}{3} \Rightarrow (0, -1\frac{2}{3})$$

$$y = 0 \Rightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow (5, 0)$$

ד.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+3) - 1 \cdot (x-5)}{(x+3)^2} = \frac{8}{(x+3)^2} > 0 \quad \forall \{x \neq -3\} \Rightarrow \text{ל: } x \neq -3, \text{ ו: } \emptyset$$

ה.



1. (1)

$$g(x) = -f(x) = -\frac{x-5}{x+3} = \frac{5-x}{x+3} \Rightarrow x \neq -3$$

(2) האסימפטוטה האנכית זהה, מאותם שיקולי גבול לעיל.

האסימפטוטה האופקית משנה סימן, מאותם שיקולי גבול לעיל.

$$\Rightarrow x = -3, y = -1$$

### לא יכול להיות

$a, b, c$  ממשיים שונים מ-0. התבונן על המשוואה:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1$$

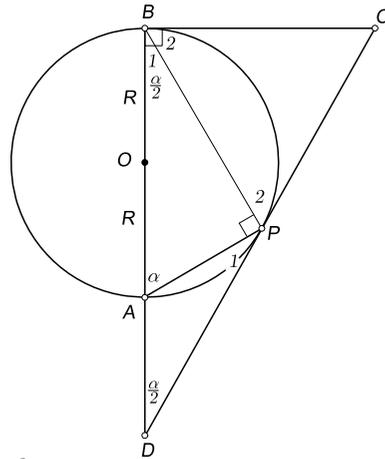
אם נציב במקום את  $a$ , או את  $b$ , או את  $c$ , נקבל זהות.

מכאן שלמשוואה זו יש שלושה פתרונות:  $a, b$  ו- $c$ .

אבל משוואה זו היא ריבועית, ולמשוואה ריבועית יש לכל היותר שני פתרונות. איך זה יכול להיות?

פשט את הביטוי, או - יותר קל: הצב מספרים כלשהם במקום  $a, b$  ו- $c$  ומצא את התשובה לכך בעצמך.

א. 5.



ב.

ג.

(1)  $\angle APB = 90^\circ$

$$\cos \alpha = \frac{AP}{2R} \Rightarrow AP = 2R \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{BP}{2R} \Rightarrow BP = 2R \sin \alpha$$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{AP \cdot BP}{2} = \frac{2R \cos \alpha \cdot 2R \sin \alpha}{2}$$

$$\Rightarrow^{(2)} S_{\triangle ABP} = R^2 \sin 2\alpha \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

$\triangle APD$ : (3)  $\alpha = \angle P_1 + \angle D \Rightarrow^{(4)} \angle P_1 = \angle D = \frac{\alpha}{2}$

(5)  $\angle B_1 = \angle P_1 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow^{(6)} \alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$

$$\frac{3\alpha}{2} = 90^\circ \quad / \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

(7)  $\angle DBC = 90^\circ$

$\angle D = \angle B_1 = \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow^{(8)} \angle B_2 = 60^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ \Rightarrow^{(10)} \angle P_2 = 60^\circ$

(5)  $BC = BP =^{(11)} 2R \sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

$BD = BA + AD =^{(11)} 2R + 2R \cos 60^\circ = 2R + 2R \cdot \frac{1}{2} = 3R$

$$S_{\triangle DBC} = \frac{BD \cdot BC}{2} = \frac{3R \cdot R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\triangle DBC} = \frac{3\sqrt{3} R^2}{2} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

- (1) זווית היקפית במעגל הנשענת על קוטר - ישרה (2)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- (3) זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי זוויות המשולש האחרות שאינן צמודות לה
- (4) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על המיתר מצידו האחר
- (5) מול צלעות שוות במשולש מונחות זוויות שוות (6) השלמה ל-  $180^\circ$  ב-  $\triangle ABP$
- (7) זווית בין משיק למעגל לבין רדיוס המעגל היא זווית ישרה
- (8) השלמה ל-  $90^\circ$  (8) השלמה ל-  $180^\circ$  ב-  $\triangle BDC$
- (9) השלמה ל-  $180^\circ$  ב-  $\triangle BPC$  (10) סעיפים א ו-ב

10:10

חפשו במקשת, או בסתם פרסומת, תמונות של שעונים. רובם המכריע מצביעים על השעה: 10:10 ...

1) א. 6

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-x^2}, \quad x-x^2 \neq 0 \Rightarrow x(1-x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, x \neq 1$$

$$\Rightarrow (x < 0) \cup (0 < x < 1) \cup (x > 1)$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x-x^2} = \frac{\rightarrow 1}{\rightarrow 0} = \infty \Rightarrow x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{x-x^2} = \frac{\rightarrow 4}{\rightarrow 0} = \infty \Rightarrow x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(3 + \frac{1}{x})}{x(1-x)} = \frac{\rightarrow(3+0)}{\rightarrow(1-\infty)} = \frac{\rightarrow 3}{\rightarrow \infty} = 0 \Rightarrow y = 0$$

(3)-(4)

$$f'(x) = \frac{3(x-x^2) - (1-2x)(3x+1)}{(x-x^2)^2} = \frac{3x-3x^2-3x-1+6x^2+2x}{(x-x^2)^2} = \frac{3x^2+2x-1}{(x-x^2)^2} \stackrel{?}{=} 0$$

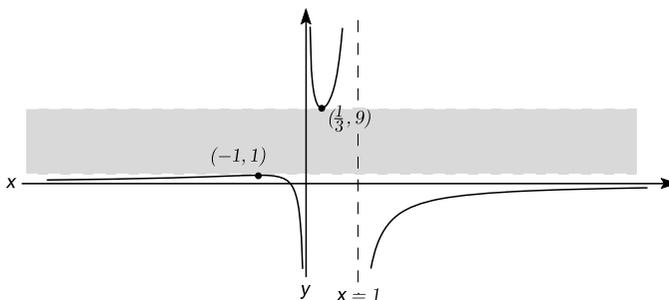
$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{-6}{6} = -1$$

x		-1		0		$\frac{1}{3}$		1	
f'	$\frac{+}{+} = +$	0	$\frac{-}{+} = -$	$\emptyset$	$\frac{-}{-} = -$	0	$\frac{+}{-} = +$	$\emptyset$	$\frac{+}{+} = +$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	asym	$\searrow$	min	$\nearrow$	asym.	$\nearrow$

$$f(-1) = \frac{-3+1}{-1-(-1)^2} = \frac{-2}{-1-1} = 1 \Rightarrow \text{max}(-1, 1)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1+1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}} = \frac{2}{\frac{2}{9}} = 9 \Rightarrow \text{min}\left(\frac{1}{3}, 9\right)$$

$$\underline{\nearrow}: (x < -1) \cup \left(\frac{1}{3} < x < 1\right) \cup (x > 1), \quad \underline{\searrow}: (-1 < x < 0) \cup (0 < x < \frac{1}{3})$$



ב.

ג. אגף שמאל של המשוואה  $\frac{3x+1}{x-x^2} = k$  הוא הפונקציה אותה חקרנו.

לפי הציר, בין נקודת המקסימום  $(-1, 1)$ , לבין נקודת המינימום  $(\frac{1}{3}, 9)$

אין קו אופקי  $y = k$  שיש לו נקודה משותפת עם הפונקציה (התחום האפור בציר).

מכאן שעבור  $1 < k < 9$  אין פתרון למשוואה הנתונה.

7. א.

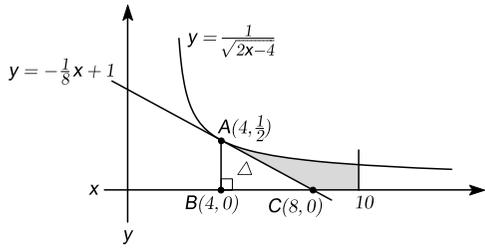
$$y = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}, \quad A(4, \frac{1}{2})$$

$$y' = -\frac{1}{(\sqrt{2x-4})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-4}} \cdot 2 = -\frac{1}{(2x-4)^{1.5}}$$

$$y'(4) = -\frac{1}{4^{1.5}} = -\frac{1}{8}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}(x-4) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2} \quad / + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{8}x + 1$$



ב.

$$x_C: y=0 \Rightarrow -\frac{1}{8}x+1=0 \Rightarrow \frac{1}{8}x=1 \Rightarrow x_C=8$$

$$AB = y_A = \frac{1}{2}, \quad BC = x_C - x_B = 8 - 4 = 4 \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4}{2} = 1$$

$$S = \int_4^{10} \frac{1}{\sqrt{2x-4}} dx - S_{\Delta} = \sqrt{2x-4} \Big|_4^{10} - 1 = \sqrt{16} - \sqrt{4} - 1 = 4 - 2 - 1 = 1 \Rightarrow S = 1 \text{ (יחידה ריבועית)}$$

8. א.

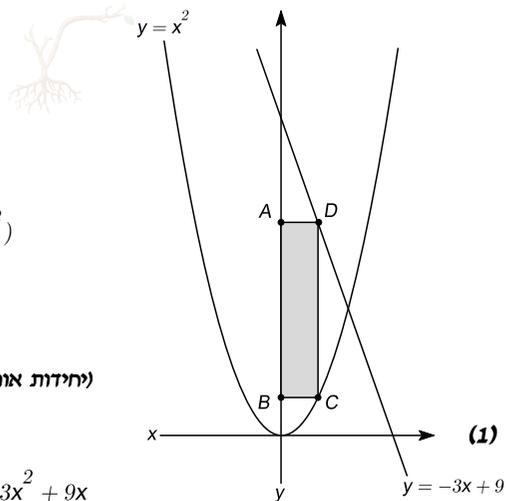
$$D(x, -3x+9) \Rightarrow A(0, -3x+9)$$

$$\Rightarrow AD = x \text{ (יחידות אורך)}$$

$$x_C = x_D = x \Rightarrow C(x, x^2) \Rightarrow B(0, x^2)$$

$$DC = y_D - y_C = -3x + 9 - x^2$$

$$\Rightarrow DC = -x^2 - 3x + 9 \text{ (יחידות אורך)}$$



ב. (1)

$$s(x) = AD \cdot DC = x(-x^2 - 3x + 9) = -x^3 - 3x^2 + 9x$$

$$s'(x) = -3x^2 - 6x + 9 \stackrel{?}{=} 0 \quad /: (-3) \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2, \quad x > 0 \Rightarrow x = 1$$

$$s''(x) = -6x - 6 \Rightarrow s''(1) = -6 - 6 < 0 \Rightarrow \max(\checkmark) \Rightarrow x_{\max} = 1$$

(2)

$$S_{\max} = s(1) = -1^3 - 3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = -1 - 3 + 9 \Rightarrow S_{\max} = 5 \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

**מבחן 26 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד א**

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3, שאלה אחת מהשאלות 4-5, שתי שאלות מהשאלות 6-8.

**פרק ראשון - אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות**

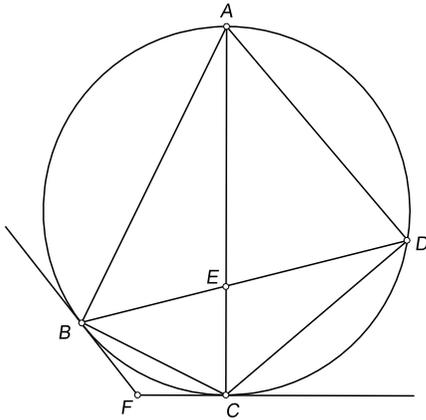
1. נתון מלבן שרוחבו  $x$  ס"מ, ואורכו גדול פי 1.2 מרוחבו. הגדילו את אורך המלבן ב-10%, והקטינו את רוחב המלבן ב-10%. התקבל מלבן חדש.
- א. (1) הבע באמצעות  $x$  את שטח המלבן החדש.  
 (2) בכמה אחוזים השתנה השטח של המלבן הנתון?  
 ב.  $R$  הוא הרדיוס של המעגל החוסם את המלבן הנתון.  $R = \sqrt{61} \text{ cm}$ . מצא את שטח המלבן החדש.

2. נתון כי מעגל, שמשוואתו  $(x-3)^2 + (y+k)^2 = 25$ , עובר דרך ראשית הצירים.  $k$  פרמטר.
- א. (1) מצא את שני הערכים של  $k$ .  
 (2) רשום את המשוואות של שני המעגלים המתאימים לערכים של  $k$  שמצאת.  
 ב. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של כל אחד משני המעגלים.  
 ג. סרטט את שני המעגלים במערכת צירים אחת.  
 ד. הישר  $x = a$  משיק לשני המעגלים,  $a > 0$ .  
 (1) מצא את ערכו של  $a$ .  
 (2) מה הם השיעורים של נקודות ההשקה?

3. בקופסה I יש 3 כדורים אדומים ו-6 כדורים ירוקים.  
 בקופסה II יש 12 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים.  
 בוחרים באקראי קופסה, ומוציאים ממנה שני כדורים זה אחר זה (בלי החזרה).
- א. מהי ההסתברות ששני הכדורים יהיו באותו צבע?  
 ב. מהי ההסתברות ששני הכדורים יהיו בצבעים שונים?  
 ג. ידוע כי שני הכדורים היו באותו צבע. מהי ההסתברות שהם הוצאו מקופסה I?

**תשובות**

1. א. (1)  $S_{\text{new}} = 1.188x^2$  (סמ"ר) (2)  $-1\%$  ב.  $S_{\text{new}} = 118.8$  (סמ"ר)
2. א. (1)  $k = \pm 4$  (2)  $k = 4: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ ,  $k = -4: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$
- ב.  $k = 4: (0,0), (0,-8), (6,0)$ ,  $k = -4: (0,0), (0,8), (6,0)$
- ד. (1)  $a = 8$  (2)  $(8, \pm 4)$
3. א.  $P = \frac{11}{20}$  ב.  $P = \frac{9}{20}$  ג.  $P = \frac{5}{11}$



**פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור**

4. מרובע ABCD חסום במעגל.

אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה E.

העבירו משיק למעגל בנקודה B

ומשיק למעגל בנקודה C.

המשיקים נפגשים בנקודה F.  $\angle ABC = 90^\circ$ .

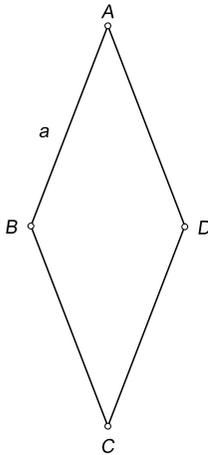
א. הוכח: (1)  $\angle ADB + \angle FBC = 90^\circ$

(2)  $\angle BFC = 2 \cdot \angle ADB$

ב. (1) הוכח:  $\triangle BEC \sim \triangle AED$

(2) נתון גם:  $AE = 7$ ,  $BE \cdot DE = 21$ . מצא את אורכו של קוטר המעגל.

(פתרון סעיף ב אינו תלוי בפתרון סעיף א.)



5. במעוין ABCD שצלעו a יחידות אורך, נתון:

$\angle BAD < 90^\circ$ ,  $\angle BAD = 2\alpha$ .

א. (1) הבע את AC ואת BD באמצעות a ו- $\alpha$ .

(2) נתון גם:  $AC \cdot BD = a^2$ . מצא את גודל זווית  $\alpha$ .

ב. נתון גם כי אורך רדיוס המעגל החוסם

את המשולש ABD הוא  $10\text{cm}$ .

מצא את שטח המעוין ABCD (ערך מספרי).

**לוטו חריג פעם שניה**

באפריל 2015 עלו בהגרלת הלוטו המספרים הבאים: 36, 35, 34, 33, 32, 7 והמספר הנוסף: 2.

רצף של חמישה מספרים עוקבים הוא אמנם נדיר.

אבל ההסתברות לקבלת המספרים: 6, 5, 4, 3, 2, 1

שווה בדיוק לקבלת המספרים: 40, 36, 28, 24, 13, 5

**תשובות**

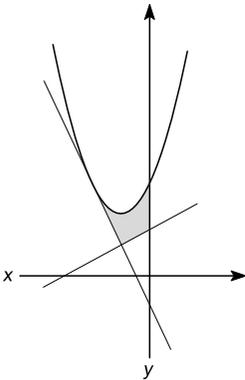
4. א. (1)  $2R = 10$  (יחידות אורך)

5. א. (1)  $AC = 2a \cos \alpha$ ,  $BD = 2a \sin \alpha$  (יחידות אורך) (2)  $\alpha = 15^\circ$  ב.  $S = 186.6$  (סמ<sup>2</sup>)

**פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש**

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2}$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ד. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. נתון כי הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g'(x) = f(x)$ .  
( $g'(x)$  ו- $g(x)$  מוגדרות באותו תחום).  
העבירו משיקים לגרף הפונקציה  $g(x)$  המקבילים לציר  $x$ .  
מה הם שיעורי  $x$  של נקודות ההשקה של המשיקים האלה? נמק.



7. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 + ax + b$ .  $a$  ו- $b$  הם פרמטרים.

הישר  $y = -2x - 1$  משיק לגרף הפונקציה

בנקודה שבה  $x = -2$ .



א. מצא את הערך של  $a$  ואת הערך של  $b$ .

הצב:  $a = 2$  ו- $b = 3$ , וענה על סעיף ב.

ב. מצא את השטח, המוגבל על-ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

על-ידי המשיק, על-ידי הישר  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  ועל-ידי ציר  $y$ .

921 הספרות הראשונות של יחס הזהב:  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  מהוות מספר פלינדרומי ראשוני:

161, 803, 398, 874, 989, 484, 820, 458, 683, 436, 563, 811, 772, 030, 917

⋮

0, 141, 713, 513, 1315, 317, 141, 0

⋮

719, 030, 277, 118, 365, 634, 386, 854, 028, 484, 989, 478, 893, 308, 161

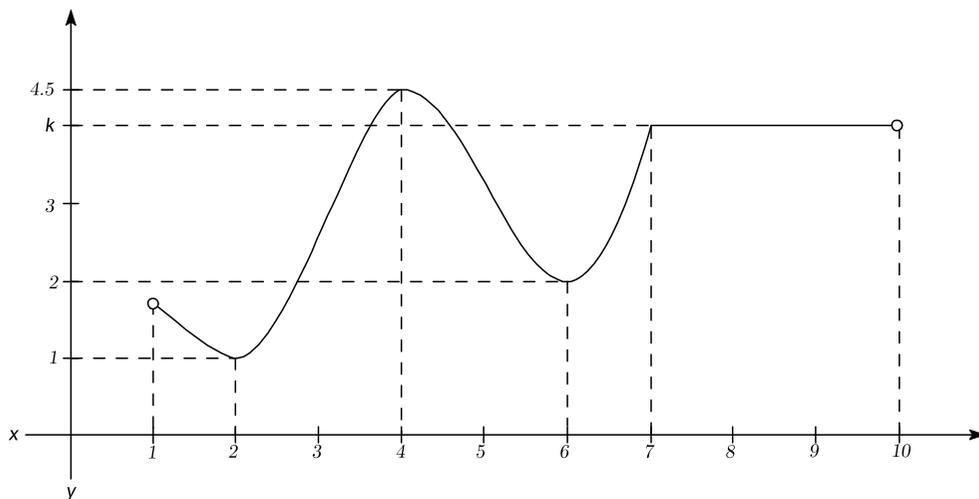
**תשובות**

6. א.  $x \neq 0$  ב.  $y = -1$  ג.  $(3, 0)$ ,  $(-1, 0)$

ד.  $\min(-3, -1\frac{1}{3})$  ו.  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$

7. א.  $a = 2$ ,  $b = 3$  ב.  $S = 1\frac{5}{12}$  (יחידות ריבועיות)

8. בציור שלפניך מוצג גרף של הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $1 < x < 10$ .



הסתמך על הגרף של  $f(x)$  ועל הערכים הרשומים על הצירים, וענה על הסעיפים הבאים.

א. מצא עבור אילו ערכים של  $x$  השונים מ-7 מתקיים:

(1)  $f'(x) < 0$  . נמק.

(2)  $f'(x) > 0$  . נמק.

(3)  $f'(x) = 0$  . נמק.



ב. נתון:  $\int_7^9 k \, dx = 8$ ,  $k$  הוא הפרמטר המסומן על ציר  $y$ .

מצא את הערך של הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = 9$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום  $2 \leq x \leq 6$ .

ד. מצא את השטח המוגבל על-ידי הגרף של פונקצית הנגזרת  $f'(x)$  ועל-ידי ציר  $x$ ,

בתחום  $2 \leq x \leq 4$  (ערך מספרי).

### בהצלחה

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט



8. א. (1)  $f'(x) < 0$ :  $(1 < x < 2) \cup (4 < x < 6)$

(2)  $f'(x) > 0$ :  $(2 < x < 4) \cup (6 < x < 7)$

(3)  $f'(x) = 0$ :  $(x = 2) \cup (x = 4) \cup (x = 6) \cup (7 < x < 10)$

ב.  $f(9) = 4$  . ד.  $S = 3\frac{1}{2}$  (יחידות ריבועיות)

**פתרון מבחן 26**

1. א. (1)

x - רוחב המלבן לפני ההקטנה. לאחר ההקטנה ב-10% :  $0.9x_{cm} = 90\% \cdot x$ .

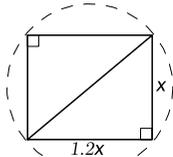
1.2x - אורך המלבן לפני ההגדלה. לאחר ההגדלה ב-10% :  $1.32x_{cm} = 110\% \cdot 1.2x$

$$S_{new} = 0.9x \cdot 1.32x \Rightarrow S_{new} = 1.188x^2 \quad (\text{סמר})$$

(2)

$$S_{old} = x \cdot 1.2x = 1.2x^2 \Rightarrow \frac{S_{new}}{S_{old}} = \frac{1.188x^2}{1.2x^2} = 0.99 \equiv 99\% \Rightarrow -1\%$$

ב.



קוטר המעגל החוסם מלבן הוא אלכסון המלבן.

(זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר.)

נפעיל את משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned} x^2 + (1.2x)^2 &= (2R)^2 \Rightarrow x^2 + 1.44x^2 = (2\sqrt{61})^2 \\ &\Rightarrow 2.44x^2 = 244 \Rightarrow x^2 = 100_{cm} \end{aligned}$$

$$S_{new} = 1.188x^2 = 1.188 \cdot 100 \Rightarrow S_{new} = 118.8 \quad (\text{סמר})$$

2. א. (1)

$$(x-3)^2 + (y+k)^2 = 25$$

$$O(0,0) \Rightarrow (0-3)^2 + (0+k)^2 = 25 \Rightarrow 9+k^2 = 25 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = \pm 4$$

(2)

$$k = -4 \Rightarrow \text{(I)} \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25, \quad k = 4 \Rightarrow \text{(II)} \quad (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

ב.

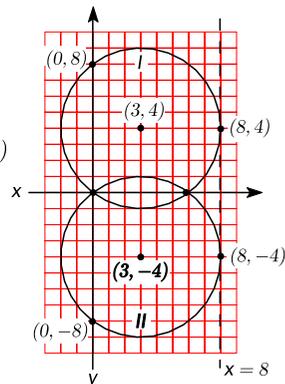
$$\text{(I)} \quad x=0 \Rightarrow 9+(y-4)^2 = 25 \Rightarrow (y-4)^2 = 16 \Rightarrow y-4 = \pm 4 \Rightarrow (0,8), (0,0)$$

$$y=0 \Rightarrow (x-3)^2 + 16 = 25 \Rightarrow (x-3)^2 = 9 \Rightarrow x-3 = \pm 3 \Rightarrow (6,0), (0,0)$$

$$\text{(II)} \quad x=0 \Rightarrow 9+(y+4)^2 = 25 \Rightarrow (y+4)^2 = 16$$

$$\Rightarrow y+4 = \pm 4 \Rightarrow (0,0), (0,-8)$$

$$y=0 \Rightarrow (x-3)^2 + 16 = 25 \Rightarrow \dots \Rightarrow (6,0), (0,0)$$



ג.

ד. ראה ציור: (1)  $a = 8$  (2)  $(8, \pm 4)$

3. א. סימונים: r - אדום, g - ירוק, 1 - פעם ראשונה, 2 - פעם שנייה

$$I: 9_{\text{balls}} : 3_{\text{red}}, 6_{\text{green}} \quad II: 16_{\text{balls}} : 12_{\text{red}}, 4_{\text{green}}$$

$$P = P(I \cap r_1 \cap r_2) + P(I \cap g_1 \cap g_2) + P(II \cap r_1 \cap r_2) + P(II \cap g_1 \cap g_2)$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15}$$

$$P = \frac{6}{144} + \frac{30}{144} + \frac{132}{480} + \frac{12}{480} = \frac{36}{144} + \frac{144}{480} = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{5+6}{20} \Rightarrow P = \frac{11}{20}$$

ב. המאורע 'צבעים שונים' הוא המשלים של 'צבע זהה'. לכן:

$$P(\text{different colors}) = 1 - P(\text{same color}) = 1 - \frac{11}{20} \Rightarrow P = \frac{9}{20}$$

$$P(I/\text{same color}) = \frac{P(I \cap \text{same color})}{P(\text{same color})} = \frac{\frac{36}{144}}{\frac{11}{20}} = \frac{36 \cdot 20}{144 \cdot 11} \Rightarrow P = \frac{5}{11}$$

4. א. (1)

$$(1) \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow (2) \angle D_1 + \angle D_2 = 90^\circ$$

$$(3) \angle B_1 = \angle D_1 \Rightarrow (4) \angle B_1 + \angle D_2 = 90^\circ$$

$$\angle D_2 + \angle B_1 = 90^\circ \equiv \angle ADB + \angle FBC = 90^\circ \quad (\checkmark)$$

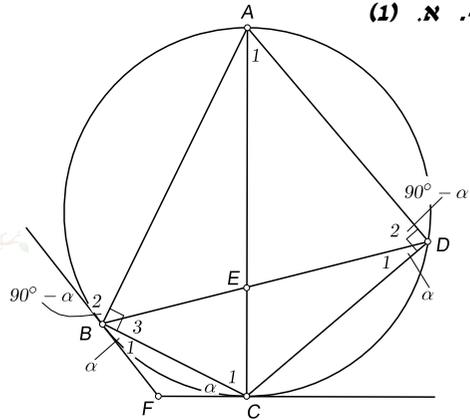
$$\angle D_1 = \angle B_1 \stackrel{(5)}{=} \alpha \Rightarrow \angle D_2 = 90^\circ - \alpha$$

$$(6) FB = FC \Rightarrow (7) \angle FCB = \angle B_1 = \alpha$$

$$(8) \angle F = 180^\circ - 2\alpha$$

$$(9) \angle B_2 = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha = \frac{1}{2} \angle F$$

$$(3) \angle B_2 = \angle D_2 \Rightarrow (4) \angle D_2 = \frac{1}{2} \angle F \Rightarrow \angle BFC = 2 \angle ADB \quad (\checkmark)$$



ב. (1)

$$(10) \angle D_2 = \angle C_1, \angle A_1 = \angle B_3 \Rightarrow (11) \triangle BEC \sim \triangle AED \quad (\checkmark)$$

(2)

$$(12) AC = 2R, (1) AE = 7 \Rightarrow EC = 2R - 7$$

$$(13) \frac{BE}{AE} = \frac{EC}{DE} \Rightarrow BE \cdot DE = EC \cdot AE \Rightarrow (1,4) 21 = (2R - 7) \cdot 7 / : 7$$

$$\Rightarrow 2R - 7 = 3 \Rightarrow 2R = 10 \quad (\text{יחידות אורך})$$

(1) נתון (2) זוויות נגדיות במרובע החסום במעגל - משלימות ל- $180^\circ$  (3) זווית בין משיק ומיתר שווה

לזווית היקפית הנשענת על מיתר זה מצידו האחר (4) הצבה (5) סימון (6) שני משיקים למעגל

היוצאים מאותה נקודה - שווים זה לזה (7) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים - שוות זו לזו

(8) השלמה ל- $180^\circ$  במשולש (9) השלמה ל- $180^\circ$  של זווית שטוחה

(10) זוויות היקפיות הנשענות על מיתרים שווים - שוות זו לזו (11) משפט דמיון זווית-זווית

(12) זווית היקפית ישרה - נשענת על קוטר (13) יחס הדמיון

5. א. (1)

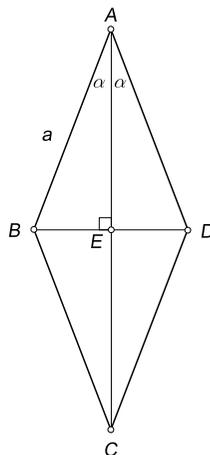
(1)  $\angle BAE = \angle DAE = \alpha$  , (2)  $\angle AEB = 90^\circ$

$\triangle AEB$ :  $\cos \alpha = \frac{AE}{a} \Rightarrow AE = a \cos \alpha$

$\sin \alpha = \frac{BE}{a} \Rightarrow BE = a \sin \alpha$

(3)  $AC = 2 AE \Rightarrow AC = 2a \cos \alpha$  (יחידות אורך)

(3)  $BD = 2 BE \Rightarrow BD = 2a \sin \alpha$  (יחידות אורך)



(2)

$AC \cdot BD = 2a \cos \alpha \cdot 2a \sin \alpha = 4a^2 \sin \alpha \cos \alpha = \stackrel{(4)}{a^2} / : a^2$

$2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \Rightarrow \stackrel{(5)}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

(I)  $2\alpha = 30^\circ$  , (II)  $2\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

(4)  $\angle BAD = 2\alpha$  ,  $\angle BAD < 90^\circ \Rightarrow 2\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$

ב.

$\triangle ABD$ : (6, 7)  $\angle ADB = \angle ABD = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 75^\circ$

(8)  $\frac{a}{\sin 75^\circ} = 2R = \stackrel{(4)}{20} \Rightarrow a = 19.32 \text{ cm}$

$AC = 2a \cos \alpha = 2 \cdot 19.32 \cdot \cos 15^\circ = 37.32 \text{ cm}$

$BD = 2a \sin \alpha = 2 \cdot 19.32 \cdot \sin 15^\circ = 10 \text{ cm}$

$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{37.32 \cdot 10}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = 186.6$  (סמ"ר)

(1) אלכסוני מעוין חוצים את זוויותיו (2) אלכסוני ממעוין מאונכים זה לזה

(3) אלכסוני מעוין חוצים זה את זה (4) נתון (5)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

(6) השלמה ל-  $180^\circ$  במשולש (7) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים - שוות זו לזו

(8) משפט הסינוסים

חלק ממשפט שהופיע בסיפור שלושה ימים וילד, של הסופר א.ב. יהושע:

"אבל אני כבר עמדתי... ליד לוח עמוס משוואות ריבועיות ממעלה ראשונה..."

6. א.

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2}, \quad x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

ב.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2} = \frac{\rightarrow 3}{\rightarrow 0} = \infty \Rightarrow x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(-1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})}{x^2} = -1 + 0 + 0 = -1 \Rightarrow y = -1$$

ג.

$$x \neq 0, \quad y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = 1 \mp 2$$

$$\Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 3 \Rightarrow (-1, 0), \quad (3, 0)$$

ד.

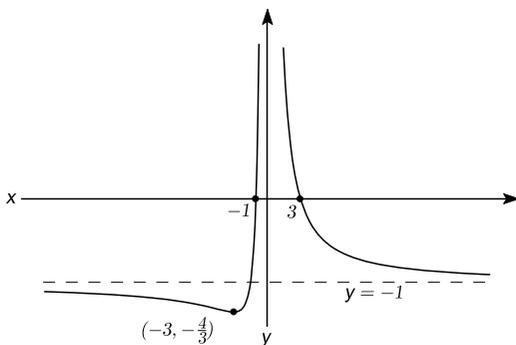
$$f'(x) = \frac{(-2x+2) \cdot x^2 - 2x \cdot (-x^2 + 2x + 3)}{(x^2)^2} = \frac{-2x^3 + 2x^2 + 2x^3 - 4x^2 - 6x}{x^4}$$

$$= \frac{-2x^2 - 6x}{x^4} = \frac{-2x-6}{x^3} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = -3$$

x		-3		0	
f'	$\frac{+}{-} = -$	0	$\frac{-}{-} = +$	0	$\frac{-}{+} = -$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	asym.	$\searrow$

$$f(-3) = \frac{-9-6+3}{9} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3} \Rightarrow \min(-3, -1\frac{1}{3})$$

ה.



ו.

$g'(x) = f(x)$ . לכן כאשר  $f(x) = 0$  אז  $g'(x) = 0$ . מסעיף ג:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

סודות נשמרים רק בין שני אנשים, בתנאי שאחד מהם מת.

(יצחק שמיר 1915-2012)

3. הגדרת מאורעות: A - מגורים בעיר B, בן

$$P(\bar{B}) = 1.25 P(B) \Rightarrow 1 - P(B) = 1.25 P(B) \Rightarrow 2.25 P(B) = 1 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2.25} = \frac{4}{9}$$

	A	$\bar{A}$	$\Sigma$
B	$75\% \cdot \frac{4}{9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$	$\frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
$\bar{B}$	$\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$	$40\% \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$	$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$
$\Sigma$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$	1

א.

$$P = P(A \cap B) \Rightarrow P = \frac{1}{3}$$

ב.

$$P = P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

ג.

$$N(A) = P(A) \cdot 900 = \frac{2}{3} \cdot 900 \Rightarrow N(A) = 600 \text{ (תלמידים)}$$

ד.

$$P = P_3(2) + P_3(3) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{6+1}{27} \Rightarrow P = \frac{7}{27}$$

א. 4

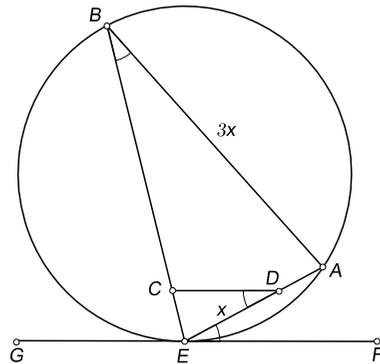
$$\angle ABE = (1) \angle AEF = (2) \angle CDE$$

$$\Rightarrow (3) \angle ABE = \angle CDE \quad (\checkmark)$$

$$\angle CED = (4) \angle AEB \Rightarrow (5) \triangle ABE \sim \triangle CDE \quad (\checkmark)$$

$$\angle ADC + \angle CDE = (6) 180^\circ$$

$$\angle ADC + \angle ABE = (7) 180^\circ \Rightarrow (8) \checkmark$$



ב.

ג.

ד.

$$CD = 4, BE = 12, ED = \frac{1}{3} AB, ED = (9) x \Rightarrow AB = 3x$$

$$\triangle CDE \sim \triangle ABE \Rightarrow (10) \frac{CD}{AB} = \frac{DE}{BE} \Rightarrow \frac{4}{3x} = \frac{x}{12} \cdot 12x \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow ED = 4 \text{ cm}$$

(1) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על המיתר מצידו האחר

(2) זוויות מתחלפות בין שני מקבילים הנחתכים על-ידי ישר שלישי, שוות זו לזו (3) כלל המעבר

(4) זווית משותפת (5) משפט דמיון זווית-זווית (6) סכום זוויות צמודות (7) הצבה

(8) תנאי הכרחי ומספיק לחסימת מרובע על-ידי מעגל: זוויות נגדיות משלימות ל- $180^\circ$

(9) סימון (10) יחס הדמיון

6. א. (1)

$$f(x) = x^2(x-4)^2, \quad y=0 \Rightarrow x^2(x-4)^2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 & \Rightarrow & (0,0) \\ x_2 = 4 & \Rightarrow & (4,0) \end{matrix}$$

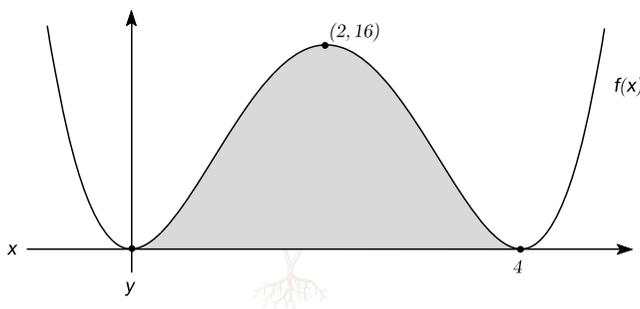
(2)

$$f'(x) = 2x(x-4)^2 + x^2 \cdot 2(x-4) = 2x(x-4) \cdot ((x-4) + x) \\ = 2x(x-4)(2x-4) = 4x(x-4)(x-2) = \boxed{4x(x-2)(x-4)} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4$$

x		0		2		4	
f'	-----	0	+-+--+	0	+-+-	0	++++
f	↘	min	↗	max	↘	min	↗

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 16, \quad f(4) = 0 \Rightarrow \text{min}(0,0), \text{max}(2,16), \text{min}(4,0)$$

(3)



(4) על-פי הגרף:

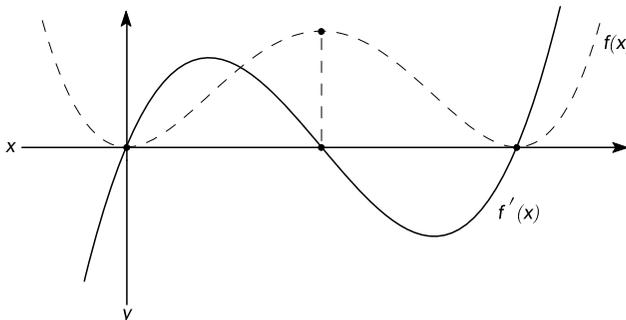
$$\underline{+}: (x < 0) \cup (0 < x < 4) \cup (x > 4), \quad \underline{-}: \emptyset$$

ב.

$$f(x) = x^2(x-4)^2 = x^2(x^2 - 8x + 16) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

$$S = \int_0^4 (x^4 - 8x^3 + 16x^2) dx = \left( \frac{x^5}{5} - 8 \cdot \frac{x^4}{4} + 16 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \left( \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 16 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 \\ = \left( \frac{1024}{5} - 512 + 16 \cdot \frac{64}{3} \right) - 0 \Rightarrow S = 34 \frac{2}{15} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

ג.



7. א. (1)

$$f(x) = \sqrt{2x-13}, \quad 2x-13 \geq 0 \quad /+13 \Rightarrow 2x \geq 13 \quad /:2 \Rightarrow x \geq 6\frac{1}{2}$$

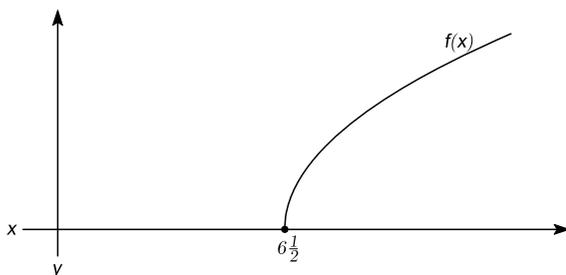
(2)

$$y=0 \Rightarrow 2x-13=0 \Rightarrow x=6\frac{1}{2} \Rightarrow (6\frac{1}{2}, 0)$$

(3)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-13}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-13}} > 0 \quad \forall \{x > 6\frac{1}{2}\} \Rightarrow \nearrow: x \geq 6\frac{1}{2}, \quad \searrow: \emptyset$$

(4)



ב. (1)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-13}} \Rightarrow 2x-13 > 0 \Rightarrow x > 6\frac{1}{2}$$

(2)

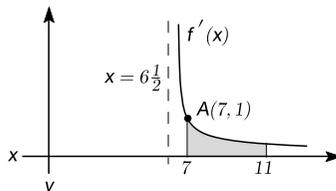
$$\lim_{x \rightarrow 6\frac{1}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2x-13}} = \frac{1}{\rightarrow 0} = \infty \Rightarrow x_{\leftarrow} = 6\frac{1}{2}$$

ג.

$$f(x) = f'(x) \Rightarrow \sqrt{2x-13} = \frac{1}{\sqrt{2x-13}} \quad / \cdot \sqrt{2x-13} \Rightarrow 2x-13 = 1$$

$$\Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow f(7) = \sqrt{2 \cdot 7 - 13} = 1 \Rightarrow A(7, 1)$$

ד.



$$S = \int_7^{11} f'(x) dx = f(x) \Big|_7^{11} = \sqrt{2 \cdot 11 - 13} - \sqrt{2 \cdot 7 - 13}$$

$$= \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 \Rightarrow S = 2 \quad (\text{יחידות ריבועיות})$$

קפיטליות - חלוקה לא שווה של העושר. קומוניזם - חלוקה שווה של העושר.

**מבחן 37 - חורף תשע"ט - 2019**

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3, שאלה אחת מהשאלות 4-5, שתי שאלות מהשאלות 6-8.

**פרק ראשון - אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות**

1. בפיצריה 'נפולי' המחיר של פיצה משפחתית גבוה פי 3 מן המחיר של פיצה אישית. בפיצריה הכריזו על מבצע:

10% הנחה על קניית פיצה אישית ו-20% הנחה על קניית פיצה משפחתית.

תלמידי שכבה י"א קנו 63 פיצות במבצע, חלקן אישיות וחלקן משפחתיות.

מספר הפיצות המשפחתיות היה גדול פי 2.5 ממספר הפיצות האישיות.

התלמידים שילמו על הפיצות 3,477.6 ש' סך הכל.

א. חשב את המחיר המקורי של פיצה אישית, ואת המחיר המקורי של פיצה משפחתית (המחירים שלפני ההנחה).

ב. לאחר שבוע הכריזו על מבצע אחר:

מי שישלם את המחיר המקורי בעבור שתי פיצות אישיות, יקבל פיצה אישית שלישית חינם. כמה פיצות אישיות אפשר לקנות במבצע זה תמורת 1,232 ש' (כולל הפיצות שהתקבלו בחינם)?



2. בציור נתון מעגל שמרכזו M.

ישר העובר בראשית הצירים משיק למעגל בנקודה B(3,4).

חיברו את מרכז המעגל, M, עם ראשית הצירים, O.

משוואת הישר OM היא  $y = \frac{1}{7}x$ .

א. מצא את משוואת הישר BM.

ב. מצא את משוואת המעגל.

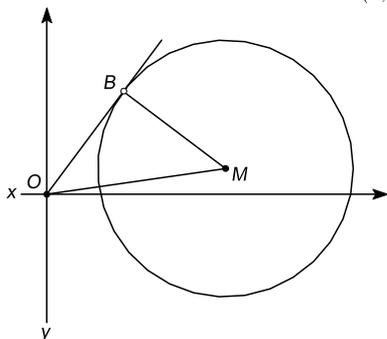
המשך הקטע BM חותך את המעגל בנקודה C.

ג. מצא את שטח המשולש OBC.

העבירו מעגל נוסף כך ש-OM הוא קוטר שלו.

ד. האם המרכז של המעגל הנוסף נמצא בתוך המעגל שמרכזו M,

עליו או מחוצה לו? נמק ופרט את חישוביך.



**תשובות**

1. א.  $f: 3x = 84_{sh}$ ,  $P: x = 28_{sh}$  ב. 66 (פיצות)

2. א.  $y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$  ב.  $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 25$  ג.  $S_{\triangle OBC} = 25$  (יחידות ריבועיות) ד. בתוך

3. ל-8% בדיוק מחברי מועדון גידו ארצי יש חגורה שחורה.

א. בוחרים באקראי 6 מן החברים במועדון.

(1) מהי ההסתברות שבדיוק ל-2 מהם יש חגורה שחורה?

(2) מהי ההסתברות שאין חגורה שחורה לאף לא אחד מן ה-6 שנבחרו?

$\frac{1}{5}$  מן החברים במועדון הם מדריכים, והשאר חניכים.

75% מחברי המועדון שיש להם חגורה שחורה הם מדריכים.

ב. בחרו באקראי חבר מועדון. מהי ההסתברות שהוא חניך שיש לו חגורה שחורה?

ג. בחרו באקראי חניך חבר מועדון. מהי ההסתברות שיש לו חגורה שחורה?

**פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור**

4. נתון מעגל שמרכזו O.

C היא נקודה מחוץ למעגל, כך שהישר CA משיק למעגל בנקודה A.

מן הנקודה C העבירו ישר החותך את המעגל בנקודות F ו-B,

כך ש-AB הוא קוטר במעגל.

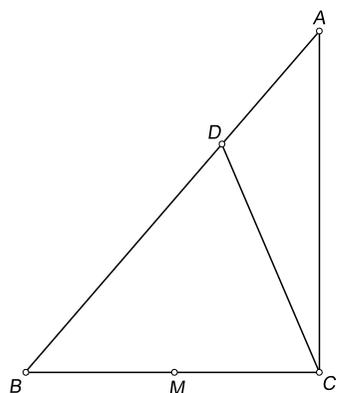
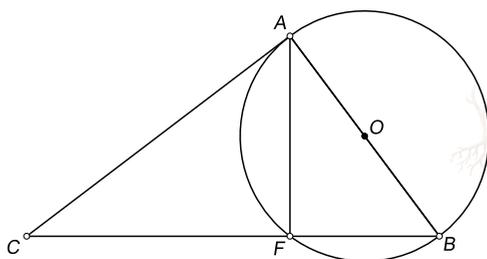
א. הוכח:  $\triangle AFB \sim \triangle CAB$ .

נתון:  $FC = 16$ ,  $FB = 9$ .

ב. חשב את קוטר המעגל, AB.

ג. חשב את שטח המשולש CFA.

ד. האם  $\triangle CFA \sim \triangle CAB$ ? הוכח את תשובתך.



5. נתון משולש ABC.

הנקודה D נמצאת על הצלע AB כך ש- $BD = 2 DA$ .

$BC = 12$ ,  $DC = 10$ ,  $\angle DCB = 65^\circ$ .

א. חשב את אורך הקטע BD.

ב. חשב את שטח המשולש ADC.

הנקודה M היא אמצע הקטע BC.

ג. האם הנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC? נמק.

**תשובות**

3. א. (1)  $P = 0.0688$  (2)  $P = 0.6064$  ב.  $P = 0.02$  ג.  $P = \frac{1}{40} = 0.025$

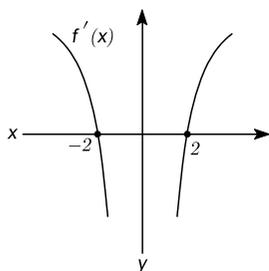
4. א.  $AB = 15$  (יחידות אורך) ג.  $S_{\triangle CFA} = 96$  (יחידות ריבועיות) ד. כן

5. א.  $BD = 11.94$  (יחידות אורך) ב.  $S_{\triangle ADC} = 27.19$  (יחידות ריבועיות) ג. לא

**פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש**

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = -2 + \sqrt{-x^2 + 5x}$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר  $x$ ?
- ג. מצא את השיעורים של כל נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.
- ד. מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ ?
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- נתונה הפונקציה  $g(x) = f(x) + c$ , שתחום הגדרתה הוא תחום ההגדרה של  $f(x)$ .  
 c הוא פרמטר.
- ו. מה הם כל ערכי c שבעבורם הפונקציה  $g(x)$  חיובית בכל תחום הגדרתה?



7. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x \neq 0$ .

בציור מתואר הגרף של פונקציה הנגזרת  $f'(x)$ , המוגדרת גם היא לכל  $x \neq 0$ , וחותכת את ציר  $x$  בנקודות  $(2, 0)$  ו- $(-2, 0)$ .

א. מצא את שיעורי  $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוג הקיצון על-פי הגרף.

נתון:  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + a$ , לכל  $x \neq 0$ .  $a > 0$  הוא פרמטר.

ב. מצא את  $a$ .

ג. ענה על סעיף זה בעבור  $x > 0$ .

שיעור  $y$  של נקודת המינימום של הפונקציה  $f(x)$  הוא 10.

(1) כתוב ביטוי אלגברי לפונקציה  $f(x)$ .

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בעבור  $x > 0$ .

אם תחליף כל ספרה (אחת בלבד) של המספר הראשוני 11,917,049 ב-'3' תקבל מספר ראשוני!

**תשובות**

6. א.  $0 \leq x \leq 5$  ב.  $(1, 0)$ ,  $(4, 0)$  ג.  $\min_{ep.}(5, -2)$ ,  $\max(2\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $\min_{ep.}(0, -2)$

ד.  $\nearrow: 0 < x < 2\frac{1}{2}$ ,  $\searrow: 2\frac{1}{2} < x < 5$  ו.  $c > 2$

7. א.  $x_{\min} = 2$ ,  $x_{\max} = -2$  ב.  $a = \frac{1}{4}$  ג. (1)  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{4} + 9$

### פתרון מבחן 37

1. א. x - מחיר פיצה אישית  $\Leftarrow$  3x - מחיר פיצה משפחתית. p - אישי, f - משפחתי.

$$\frac{63}{2.5+1} = 18, \quad 63 - 18 = 45 \Rightarrow p = 18, \quad f = 45 \quad \text{מספר הפיצות שנקנו:}$$

$$x - 10\% \Rightarrow 90\% \cdot x = \frac{90}{100} \cdot x = 0.9x, \quad 3x - 20\% \Rightarrow 80\% \cdot 3x = \frac{80}{100} \cdot 3x = 2.4x$$

מחיר אישית לאחר הנחה מחיר משפחתית לאחר הנחה

$$18 \cdot 0.9x + 45 \cdot 2.4x = 3477.6 \Rightarrow 124.2x = 3477.6 \quad /: 124.2 \Rightarrow p: x = 28_{sh}, \quad f: 3x = 84_{sh}$$

ב.

$$\frac{1232}{28} = 44, \quad \frac{44}{2} = 22, \quad 44 + 22 = 66_{piz.}$$

2. א. משיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה (OB  $\perp$  MB).

$$m_{OB} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}, \quad OB \perp MB \Rightarrow m_{MB} = -\frac{3}{4}$$

$$B(3,4) \Rightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} \quad / + 4 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$$

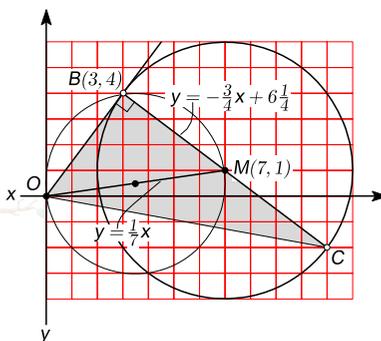
$$M: -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} = \frac{x}{7} \quad / \cdot 28 \Rightarrow -21x + 175 = 4x$$

$$25x = 175 \Rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1 \Rightarrow M(7,1)$$

$$R^2 = MB^2 = (3-7)^2 + (4-1)^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow (x-7)^2 + (y-1)^2 = 25$$

ב.



ג.

$$R^2 = 25 \Rightarrow R = 5 \Rightarrow BC = 2R = 10$$

$$OB = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$S_{\triangle OBC} = \frac{BC \cdot BO}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} \Rightarrow S_{\triangle OBC} = 25 \quad \text{(יחידות ריבועיות)}$$

ד.

נחשב את אורכו של r, רדיוס המעגל הנוסף.

$r > R \Leftarrow$  מרכז המעגל הנוסף נמצא מחוץ למעגל הנתון.

$r < R \Leftarrow$  מרכז המעגל הנוסף נמצא בתוך למעגל הנתון.

$r = R \Leftarrow$  מרכז המעגל הנוסף נמצא על למעגל הנתון.

$$2r = OM = \sqrt{(7-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{2} < R = 5$$

$\Leftarrow$  מרכז המעגל הנוסף נמצא בתוך המעגל הנתון.

3. א. (1) סימון: A - בעל חגורה שחורה

ברנולי:  $P(A) = 0.08$  ,  $P_6(2) = \binom{6}{2} \cdot 0.08^2 \cdot 0.92^4 = 15 \cdot 0.0064 \cdot 0.7164 \Rightarrow P = 0.0688$

(2)

$P = (1 - 0.08)^6 \Rightarrow P = 0.6064$

$P(B/A) = 0.75$  ,  $P(B) = 0.2$

$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{0.08} = 0.75 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.06$

	A	$\bar{A}$	$\Sigma$
B	0.06	0.14	0.2
$\bar{B}$	0.02	0.78	0.8
$\Sigma$	0.08	0.92	1

ב. סימון: B - מדריך

$\Rightarrow P(\bar{B} \cap A) = 0.02$

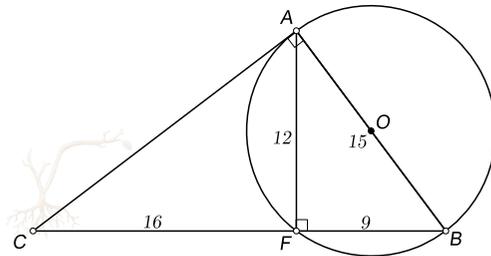
ג.

$P = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.02}{0.8} \Rightarrow P = \frac{1}{40} = 0.025$

4. א.

$\angle AFB = (1) 90^\circ$  ,  $\angle BAC = (2) 90^\circ$   
 $\Rightarrow (3) \angle AFB = \angle BAC$

$\angle B = (4) \angle B \Rightarrow (5) \triangle AFB \sim \triangle CAB$



ב.

$\frac{AB}{CB} = (6) \frac{FB}{AB} \Rightarrow AB^2 = FB \cdot CB$

$AB^2 = 9 \cdot (16 + 9) = 225 \quad \sqrt{\quad} \Rightarrow AB = 15$  (יחידות אורך)

ג.

$\triangle AFB$ :  $AF = (7) \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$

$S_{\triangle CFA} = \frac{CF \cdot AF}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2} \Rightarrow S_{\triangle CFA} = 96$  (יחידות ריבועיות)

ד. ב.

$\angle CFA = (8) 90^\circ \Rightarrow (3) \angle CFA = \angle CAB$  ,  $\angle C = (4) \angle C \Rightarrow (5) \triangle CFA \sim \triangle CAB$  (✓)

(1) זווית היקפית הנשענת על קוטר (2) זווית בין משיק לרדיוס (3) כלל המעבר

(4) זווית משותפת (5) משפט דמיון זווית-זווית (6) יחס הדמיון (7) פיתגורס

(8) השלמה ל- $180^\circ$  של זווית שטוחה

אני מתפטר ומתפטר - עד שאני משיג את מה שאני רוצה.

(לוי אשכול 1895-1969)

3. א.

$$f(x) = 2x\sqrt{8-x^2}, \quad 8-x^2 \geq 0, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{8} \Rightarrow \begin{array}{c} - \\ \underbrace{\hspace{2cm}} \\ -\sqrt{8} \quad \sqrt{8} \\ + \end{array} \Rightarrow -\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$$

ב.

$$y=0 \Rightarrow x_1=0, \quad 8-x^2=0 \Rightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{8} \Rightarrow (0,0), \quad (\pm\sqrt{8},0)$$

ג-ד.

$$f'(x) = 2 \cdot \sqrt{8-x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}} = \frac{2(8-x^2)-2x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{16-4x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{4(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

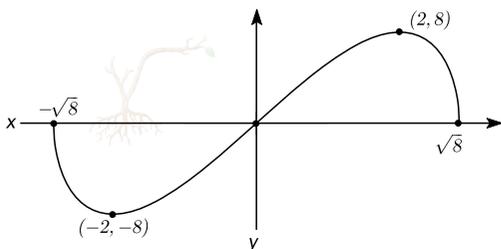
x	$-\sqrt{8}$		-2		2		$\sqrt{8}$
f'		-	0	+	0	-	
f	max <sub>ep.</sub>	\	min	/	max	\	min <sub>ep.</sub>

$$\begin{aligned} \underline{\setminus}: & (-\sqrt{8} < x < -2) \cup (2 < x < \sqrt{8}) \\ \underline{/}: & -2 < x < 2 \end{aligned}$$

$$f(-2) = 2 \cdot (-2) \cdot 2 = -8, \quad f(2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$\Rightarrow \max_{ep.}(-\sqrt{8}, 0), \quad \min(-2, -8), \quad \max(2, 8), \quad \min_{ep.}(\sqrt{8}, 0)$$

ה.



1. הגרף ישיק לציר x בנקודת המקסימום כשהגרף ירד 8 שְׁנָתוֹת.

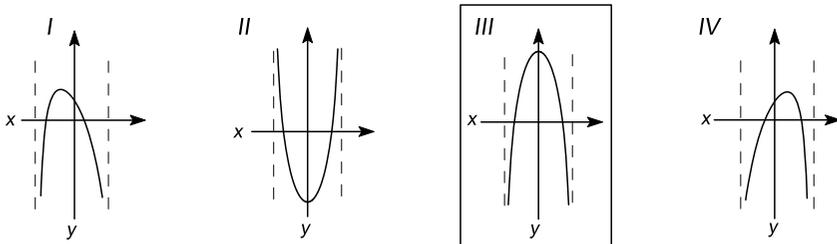
הגרף ישיק לציר x בנקודת המינימום כשהגרף יעלה 8 שְׁנָתוֹת. ולכן  $c = \pm 8$ .

2.  $f'(x)$  זוגית, ולכן הגרפים I ו-IV נפסלים.

ל-  $f(x)$  יש מינימום פנימי ואחר כך מקסימום פנימי. לכן סימן הנגזרת צריך להשתנות פעמיים:

$$\text{מ' - ל' - ל' + ושוב מ' + ל' -} \Leftrightarrow (\setminus / \setminus \setminus)$$

מתקיים רק בגרף III. גרף זה מקיים גם: זוגיות הנגזרת, אי־הגדרה בנקודות הקצה.

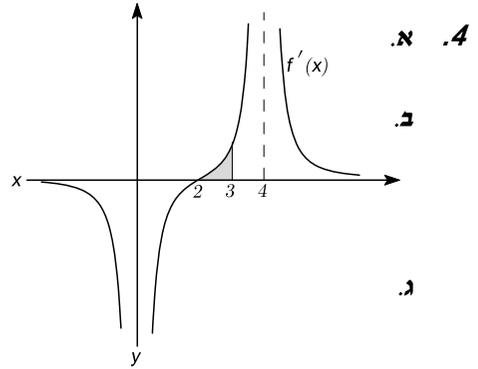


$$f'(x) = \frac{8(x-b)}{x^2(x-c)^2}, \quad x \neq 0, x \neq 4$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$(x-c)^2 \neq 0, x \neq 4 \Rightarrow c = 4$$

$$\therefore (x < 0) \cup (0 < x < 2), \quad \underline{+}: (2 < x < 4) \cup (x > 4)$$



x		0		2		4	
f'	-	∅	-	0	+	∅	+
f	↘	∅	↘	min	↗	∅	↗

$$f'(x) = \frac{8(x-2)}{x^2(x-4)^2} \Rightarrow \underline{-}: (x < 0) \cup (0 < x < 2)$$

$$\underline{+}: (2 < x < 4) \cup (x > 4)$$

$$x_{\min} = 2 \quad \text{ה-ד}$$

$$S = \int_2^3 f'(x) dx = f(x) \Big|_2^3 = \frac{a}{x(a-x)} \Big|_2^3 = \frac{a}{3(a-3)} - \frac{a}{2(a-2)} = \frac{1}{3} \cdot 6(a-2)(a-3)$$

$$\Rightarrow 2a(a-2) - 3a(a-3) = 2(a-2)(a-3) \Rightarrow 2a^2 - 4a - 3a^2 + 9a = 2a^2 - 6a - 4a + 12$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 15a + 12 = 0 \quad /: 3 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow a = 4 \Leftrightarrow a \neq 1$$

$$f(x) = \sqrt{x+4}, \quad g(x) = \frac{(x+4)^2}{32}, \quad x \geq -4 \quad \text{א. 5}$$

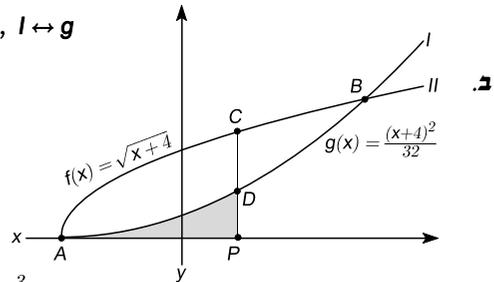
$$f(0) = 2 > g(0) = \frac{1}{2}, \quad l(0) > l(0) \Rightarrow l \leftrightarrow f, l \leftrightarrow g$$

$$d(x) = \sqrt{x+4} - \frac{(x+4)^2}{32}$$

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{2(x+4)}{32 \cdot 16} = \frac{8 - \sqrt{x+4}(x+4)}{16\sqrt{x+4}}$$

$$= \frac{8 - (x+4)^{\frac{3}{2}}}{16\sqrt{x+4}} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow (x+4)^{\frac{3}{2}} = 8 = 2^3 \quad / \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$\Rightarrow (x+4)^{\frac{1}{2}} = 2 \quad /(\ )^2 \Rightarrow x+4 = 4 \Rightarrow x = 0$$



x	-4		0	
f'		+	0	-
f		↗	max	↘

$$\Rightarrow d_{\max} = d(0) = 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow CD_{\max} = 1\frac{1}{2} \quad (\text{יחידות אורך})$$

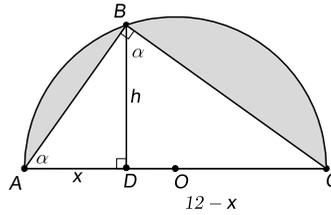
$$S = \int_{-4}^0 \frac{(x+4)^2}{32} dx = \frac{(x+4)^3}{3 \cdot 32} \Big|_{-4}^0 = \frac{64}{96} - 0 \Rightarrow S = \frac{2}{3} \quad (\text{יחידה ריבועית})$$

6. א.

$$h = \sqrt{x(12-x)} = \sqrt{12x-x^2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot \sqrt{12x-x^2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{12x-x^2} \quad (\text{סמך})$$



ב.

$$S(x) = 6\sqrt{12x-x^2}$$

$$S'(x) = 6 \cdot \frac{12-2x}{2\sqrt{-x^2+12x}} = \frac{6(6-x)}{\sqrt{-x^2+12x}} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 6$$

x	0		6		12
S'		+	0	-	
S		↗	max	↘	

$$\Rightarrow x_{\max} = 6 \text{ cm}$$

ג.

$$S = \frac{\pi R^2}{2} - S_{\triangle} = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} - 6 \cdot \sqrt{-36+72} = 18\pi - 6 \cdot \sqrt{36}$$

$$\Rightarrow S = 18\pi - 36 = 20.55 \quad (\text{סמך})$$

(1) הגובה ליתר במשולש ישר-זווית הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר

1729

כשהמתמטיקאי הבריטי גודפרי הארולד הארדי (1877-1947) ביקר את המתמטיקאי ההודי סריניוואסה רמנוג'אן (1877-1920) בחוליו, הוא העיר שהגיע במונית שמספרה 1729, מספר סתמי ללא ייחודיות והוא מקווה שזה אינו סימן רע. על כך ענה לו רמנוג'אן, שזה ממש אינו נכון. מספר זה הוא הקטן ביותר שניתן להציגו כסכום של שני מספרים מעוקבים בשתי דרכים שונות:  $1729 = 1^3 + 12^3 = 10^3 + 9^3$ .

המספר הקטן ביותר שניתן להציגו בשלוש דרכים שונות כסכום של שני מעוקבים הוא 87,539,319:

$$87,539,319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$$

מתברר שלמספר הזה יש עוד מספר תכונות ייחודיות.

מהמקום ה-1729 שאחרי הנקודה של e מופיע לראשונה רצף של 10 ספרות שהן כל הספרות מ-0 עד 9:

$$e = 2.71828 \dots 588970 \overset{\downarrow}{719425863987727547109} \dots$$

זהו גם המספר הגדול ביותר ששווה למכפלה של סכום ספרותיו באותו סכום הרשום הפוך:

$$1 + 7 + 2 + 9 = 19, \quad 19 \times 91 = 1729$$

ואלו אינן התכונות המיוחדות שלו...

**סימנים מתמטיים המופיעים בספר**

U - איחוד, היחס 'או'. דוגמה: התחום  $x < 2$  או  $x > 9$  ייכתב כך:  $(x < 2) \cup (x > 9)$

∩ - חיתוך, היחס 'וגם'. דוגמה: התחום  $x < 8$  וגם  $x > 1$  הוא התחום:  $1 < x < 8$ .

∩ - נרשום זאת כך:  $1 < x < 8 \Rightarrow (x > 1) \cap (x < 8)$ .

√ - מופיע בדרך כלל בסוף הוכחה כאישור למש"ל (מה שהיה להוכיח), או כאישור לבדיקת נתון.

∈ - שייכות. דוגמה:  $x \in [1, 9]$  כלומר: x שייך לקטע הסגור [1, 9] או:  $1 \leq x \leq 9$

∉ - דוגמה:  $(1, 2) \notin y_{CD}$  כלומר: הנקודה (1, 2) אינה על הישר העובר דרך C ו-D.

∀ - לכל. דוגמה: תחום הגדרה:  $\forall x$ . כלומר: תחום ההגדרה הינו עבור כל x ממשי.

$$\text{דוגמה: } \frac{(x-1)^2}{x^6} > 0 \quad \forall \{x \neq 0, x \neq 1\}$$

משמעות הסימון: הביטוי  $\frac{(x-1)^2}{x^6}$  גדול מ-0 לכל x השונה מ-0 ושונה מ-1

פתרון משוואה ריבועית מוצג בקיצור באופן הבא (לדוגמה):  $x_{1,2} = \frac{1 \pm 19}{12} = \dots \Rightarrow 6x^2 - x - 15 = 0$   
 זאת - מתוך הנחה שהתלמיד בשאלון זה שולט בביצוע  $\sqrt{\Delta}$  ובבדיקת החישוב.

∅ - קבוצה ריקה. למשל:  $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-5}}{3} = \emptyset$  כלומר: למשוואה הריבועית הנתונה אין פתרון ממשי.

ep - end point נקודות קצה של תחום סגור הן נקודות קיצון חד-צדדיות (אלא אם כן הפונקציה בסביבה החד-צדדית של הנקודה היא קבועה). למשל: (5, 6) :  $\min_{ep}$ .

ab - absolute סימון של נקודת קיצון מוחלטת בתחום סגור. למשל: (-7, 11) :  $\max_{ab}$ .

$cm^2$  - סמ"ר,  $cm^3$  - סמ"ק, **asym.** - אסימפטוטה, **infl.** - פיתול (inflection)

↗ - עליה, ↘ - ירידה, למשל:  $\forall x > 6 \nearrow f$  - המשמעות: הפונקציה f(x) עולה בתחום  $x > 6$

∪ - קעירות (קעירות כלפי מעלה), ∩ - קמירות (קעירות כלפי מטה).

$x \rightarrow a+$  - שאיפה ל- a מימין, למשל:  $x \rightarrow 0+$  הכוונה היא לשאיפה  $0.1, 0.01, 0.001 \dots$

$x \rightarrow a-$  - שאיפה ל- a משמאל, למשל:  $x \rightarrow 0-$  הכוונה היא לשאיפה  $0.9, 0.99, 0.999 \dots$

lim - קיצור של limit, גבול.

למשל:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$ : הגבול של f(x) כאשר x 'שואף' ל-∞ הוא 5 (אסימפטוטה אופקית:  $y = 5$ ).

$y = k_{(\rightarrow)}$  - אסימפטוטה אופקית חד-צדדית בכיוון  $+\infty$  בלבד. למשל:  $y = 2_{(\rightarrow)}$

$y = k_{(\leftarrow)}$  - אסימפטוטה אופקית חד-צדדית בכיוון  $-\infty$  בלבד. למשל:  $y = 1_{(\leftarrow)}$

∩ - קיים, ∩ - לא קיים

**סיווג שאלות המבחנים**

פענוח הרישום: שאלה/מבחן. דוגמה: 38/4 - מבחן 38 שאלה 4. את הסיווג הכין שרון חיים.

הסתברות	בעיות מילוליות
<b>עקרונות בסיסיים של חיבור ואיחוד מאורעות. הסתברות מותנית ללא טבלה</b> 1/3a, 3/3, 4/3, 7/3a, 8/3a-b, 9/3a, 11/3a, 12/3a, 24/3, 28/3, 30/3, 32/3a-b, 34/3a1+b	<b>בעיות תנועה</b> - רכבלהקף אחד בהלך וחזור (קו תחתי - עם אחוזים) 7/1, 17/1, 21/1, 30/1, 38/1
<b>טבלה דו-ממדית</b> 2/3, 6/3, 10/3, 14/3, 15/3, 17/3, 20/3, 21/3, 23/3, 27/3, 29/3, 33/3, 36/3, 37/3, 38/3, 39/3	- שני רכבים/הליכים הנעים בכיוונים מנוגדים (קו תחתי - עם אחוזים) 13/1, 31/1, 32/1, 35/1
<b>טבלה 2X3</b> 18/3	- שני רכבים/הליכים הנעים באותו כיוון (עם אחוזים) 8/1, 25/1
<b>התפלגות בינומית (נוסחת ברנולי)</b> - שימוש בנוסחת ברנולי בלבד 16/3, 22/3	- שלושה רכבים/הליכים (עם אחוזים) 14/1
- חישוב מדויק 1/3, 8/3, 9/3, 10/3, 16/3, 17/3, 19/3, 21/3, 34/3, 37/3, 39/3	- משפט פיתגורס 10/1, 39/1
- חישוב לכל הפחות 10/3, 14/3, 16/3, 18/3, 20/3, 22/3, 23/3, 27/3, 32/3, 33/3, 36/3	<b>בעיות קניה ומכירה / כלכליות</b> - ללא אחוזים 4/1
- חישוב לכל היותר 2/3, 7/3, 11/3, 12/3	- עם אחוזים 9/1, 11/1, 12/1, 16/1, 19/1, 20/1, 22/1, 23/1, 27/1, 28/1, 29/1, 34/1, 37/1
<b>תרשים עץ (ניתן לפתור גם ללא שימוש בתרשים)</b> 13/3, 25/3, 26/3, 35/3	- עם גאומטריה ואחוזים 5/1, 6/1
<b>נושאים שונים</b> - כדורים וכדים 13, 19, 24, 26, 28, 30, 39	<b>בעיות גאומטריות</b> - משולש/מלבן/ריבוע/עיגול/היקף/שטחן (קו תחתי - עם אחוזים) 2/2, 15/1, 18/1, 26/1, 33/1, 36/1
- הטלת קובייה 8, 9, 32, 34	- תיבה שבסביבה ריבוע 1/2, 3/2
<b>טריגונומטריה במישור</b>	<b>גאומטריה אנליטית</b>
<b>חלוקה ראשית</b> - ללא מעגל 1/6, 3/6, 4/6, 6/6, 8/6, 9/6, 11/6, 12/5, 13/5, 15/5, 5/6, 18/5, 21/5, 23/5, 24/5, 29/5, 30/5, 31/5, 32/5, 36/5	<b>משולשים</b> - חישובים במשולש 35/2
<b>מעגל</b> 2/6, 5/6, 7/6, 9/5, 10/5, 10/6, 12/6, 13/6, 14/6, 16/6, 17/6, 18/6, 19/5, 19/6, 20/5, 22/5, 25/5, 26/5, 27/5, 28/5, 33/5, 34/5, 35/5, 37/5, 39/5	- משולש ישר-זווית 1/1, 25/2, 27/2
<b>חלוקה משנית</b> <b>משולשים</b> - חישובים במשולש 32/5	- משולש שווה-שקיים 2/1
- משולש ישר-זווית 36/4	<b>מרובעים</b> - מרובע 9/2, 21/2, 36/2
- משולש שווה-שקיים 4/6, 9/5, 9/6, 11/6, 15/5, 18/5, 24/5, 25/5, 29/5, 33/5	- דלתון 34/2
- משולש שווה-צלעות 1/6, 10/6	- מקבילית 15/2, 16/2, 22/2, 27/2
- מפגש תיכונים במשולש 30/5	- מלבן 18/2
<b>מרובעים</b> - מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע 3/6, 6/6, 8/6, 10/5, 13/5, 15/6, 18/5, 23/5, 26/5, 29/5, 31/5, 33/5, 35/5	- מעוין 3/1
- טרפז, טרפז שווה-שקיים 12/5, 17/6, 21/5, 39/5	- ריבוע 5/2, 30/2
<b>מעגל</b> - מעגל 9/5, 10/5, 19/6	- טרפז 9/2, 11/2
- משיק למעגל 12/6, 16/6, 18/6, 25/5	- מחומש 34/2
- מעגל חוסם משולש 5/6, 13/6, 17/6, 19/5, 26/5, 28/5, 33/5, 35/5, 37/5, 39/5	<b>מעגל</b> - חישובים במעגל 2/1, 21/2, 31/2
- מעגל חוסם משולש שווה-שקיים 2/6, 20/5, 34/5	- מעגל, עם פרמטר 10/2, 26/2
- מעגל חוסם משולש שווה-צלעות 7/6, 10/6	- משיק למעגל 1/1, 4/2, 5/2, 6/2, 7/2, 10/2, 13/2, 14/2, 16/2, 19/2, 22/2, 23/2, 29/2, 33/2, 36/2, 37/2, 38/2
- מעגל חסום במשולש 5/6	- משיק למעגל, עם פרמטר 12/2, 17/2, 25/2
- מרובע חסום במעגל 22/5	- מעגל חוסם משולש 1/1, 8/2, 15/2, 18/2, 24/2, 28/2, 32/2, 33/2, 36/2, 38/2
- טרפז חסום במעגל 27/5	- מעגל חוסם משולש ישר-זווית 39/2
- טרפז שווה-שקיים חוסם מעגל 14/6	- ריבוע חסום במעגל 5/2, 30/2
<b>הבעה באמצעות פרמטר</b> 1/6, 2/6, 6/6, 7/6, 8/5, 9/6, 10/6, 11/6, 12/6, 13/5, 15/5, 15/6, 16/6, 18/6, 19/6, 20/5, 24/5, 25/5, 26/5, 31/5, 34/5, 35/5, 36/5	- ריבוע חסום מעגל 5/2, 30/2
	- שני מעגלים 26/2, 29/2, 37/2

**חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי סוג הפונקציה**

<b>פונקציה פולינומאלית</b>	
- חקירת פונקציה, ללא אימפוטות וולא פרמטר	18/7a-b, 27/6, 29/7a-b, 36/6a
- חקירת פונקציה, עם מציאת ערך פרמטר	5/8a-b, 7/8, 13/8a, 19/8, 23/7a, 26/7a, 28/7a-b, 30/8a, 38/7a-e
- הבעה באמצעות פרמטר	13/8a, 38/7a-e
- הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה	7/8, 20/7, 36/6
- בעיות ערך קיצון	
- גאומטריה	8/9, 20/8, 28/8, 29/8, 37/8
- גרפים	25/8, 33/8, 35/8
- גרפים, עם פרמטר	21/8, 23/8
<b>פונקציה רציונאלית</b>	
- חקירת פונקציה, ללא אימפוטות וולא פרמטר	22/7a-c
- חקירת פונקציה, עם אימפוטות	2/8, 3/7, 7/7, 8/7, 9/9a, 10/7, 11/7, 12/9a-b, 14/7, 15/8a, 16/7, 17/7, 18/9, 19/7a, 21/6, 23/6, 24/6, 25/6, 26/6, 27/7, 29/6, 30/7, 31/6, 32/6, 33/6, 34/6, 35/6a, 38/6, 39/6
- חקירת פונקציה, עם מציאת ערך פרמטר	1/7, 2/8, 3/7, 8/7, 27/7, 29/6, 32/6, 34/6
- הבעה באמצעות פרמטר אחד	1/7, 2/8, 3/7, 9/9, 15/8, 19/7, 32/6, 34/6
- הבעה באמצעות שני פרמטרים	8/7
- הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה	26/6f, 39/6
- התאמת פונקציה לגרף (קו תחת-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)	<u>10/7, 16/7, 23/6, 30/7</u>
- בעיות ערך קיצון	
- גאומטריה	12/8, 16/9
- גאומטריה, עם פרמטר	13/9
- גרפים, עם פרמטר	24/8
- כלכלה עם תנועה	11/9
<b>פונקציות שורש</b>	
- חקירת פונקציה, ללא אימפוטות וולא פרמטר	9/8, 11/8a-d, 12/7, 13/7, 15/7, 20/6, 21/7a-c, 24/7a, 30/6, 33/7a-d, 37/6
- חקירת פונקציה, עם אימפוטות	16/8a-b, 28/6, 32/7a-b, 34/7a-b, 36/7a-c
- חקירת פונקציה, עם מציאת ערך פרמטר	4/9, 5/9, 28/6, 31/7a-d, 35/7
- הבעה באמצעות פרמטר	35/7
- הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה	21/7
- התאמת פונקציה לגרף (קו תחת-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)	<u>15/7, 16/8, 30/6, 33/7</u>
- נקודות קיצון מוחלט	4/9, 13/7, 30/6
- בעיות ערך קיצון	
- גאומטריה	10/8, 17/9, 18/8, 19/9, 22/8, 31/8, 32/8, 34/8, 39/8
- גרפים	1/8, 2/9, 3/9, 27/8
- גרפים, עם פרמטר	14/8, 38/8
	11/9
	8/9, 20/8, 28/8, 29/8, 37/8
	12/8, 16/9
	13/9
	10/8, 17/9, 18/8, 19/9, 22/8, 31/8, 32/8, 34/8, 39/8

**חשבון דיפרנציאלי - מיון לפי נושאים**

<b>חקירת פונקציה, ללא אימפוטות וולא פרמטר</b>	18/7a-b, 27/6, 29/7a-b, 36/6a
- פונקציה פולינומאלית	
- פונקציה רציונאלית	22/7a-c
- פונקציית שורש	9/8, 11/8a-d, 12/7, 13/7, 15/7, 20/6, 21/7a-c, 24/7a, 30/6, 33/7a-d, 37/6
<b>חקירת פונקציה, עם אימפוטות</b>	
- פונקציה רציונאלית	2/8, 3/7, 7/7, 8/7, 9/9a, 10/7, 11/7, 12/9a-b, 14/7, 15/8a, 16/7, 17/7, 18/9, 19/7a, 21/6, 23/6, 24/6, 25/6, 26/6, 27/7, 29/6, 30/7, 31/6, 32/6, 33/6, 34/6, 35/6a, 38/6, 39/6
- פונקציית שורש	16/8a-b, 28/6, 32/7a-b, 34/7a-b, 36/7a-c
<b>חקירת פונקציה, עם מציאת ערך פרמטר</b>	
- פונקציה רציונאלית	5/8a-b, 7/8, 13/8a, 19/8, 23/7a, 26/7a, 28/7a-b, 30/8a, 38/7a-e
- פונקציה רציונאלית	1/7, 2/8, 3/7, 8/7, 27/7, 29/6, 32/6, 34/6
- פונקציית שורש	4/9, 5/9, 28/6, 31/7a-d, 35/7
<b>הבעה באמצעות פרמטר</b>	
- פונקציה פולינומאלית	13/8a, 38/7a-e
- פונקציה רציונאלית - פרמטר אחד	1/7, 2/8, 3/7, 9/9, 15/8, 19/7, 32/6, 34/6
- פונקציה רציונאלית - שני פרמטרים	8/7
- פונקציית שורש	35/7
<b>הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה</b>	
- על סמך גרף הפונקציה	26/8, 37/7a
- פונקציה פולינומאלית	7/8, 20/7, 36/6
- פונקציה רציונאלית	26/6f, 39/6
- פונקציית שורש	21/7
<b>התאמת פונקציה לגרף (קו תחת-התאמת נגזרת הפונקציה לגרף)</b>	
- פונקציה רציונאלית	<u>10/7, 16/7, 23/6, 30/7</u>
- פונקציית שורש	<u>15/7, 16/8, 30/6, 33/7</u>
<b>נקודות קיצון מוחלט</b>	
- פונקציית שורש	4/9, 13/7, 30/6
<b>בעיות ערך קיצון</b>	
<b>גרפים</b>	
- פונקציה פולינומאלית, עם פרמטר	25/8, 33/8, 35/8
- פונקציית רציונאלית, עם פרמטר	21/8, 23/8
- פונקציית שורש	24/8
- פונקציית שורש, עם פרמטר	1/8, 2/9, 3/9, 27/8
<b>כלכלה עם תנועה</b>	
- פונקציה רציונאלית	14/8, 38/8
<b>גאומטריה</b>	
- פונקציה רציונאלית	11/9
- פונקציה רציונאלית	8/9, 20/8, 28/8, 29/8, 37/8
- פונקציה רציונאלית, עם פרמטר	12/8, 16/9
- פונקציית שורש	13/9
- פונקציית שורש	10/8, 17/9, 18/8, 19/9, 22/8, 31/8, 32/8, 34/8, 39/8

**חשבון אינטגרלי**

**חישובי אינטגרלים ושטחים**

7/8, 18/9, 20/7, 21/7, 22/7, 37/7

- מציאת פונקציה קדומה

5/8, 6/8, 13/8, 18/7, 22/6, 23/7, 26/7, 27/6, 28/7, 29/7, 30/8, 36/6, 38/7, 39/7

- פונקציה פולינומיאלית

9/9, 12/9, 14/9, 22/7, 35/6

- פונקציה רציונאלית

11/8, 16/8, 17/8, 21/7, 24/7, 25/7, 31/7, 32/7, 34/7

- פונקציית שורש

15/8, 19/7

- אינטגרל עם פרמטר, פונקציה רציונאלית

**שטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת**

- על סמך גרף הפונקציה

15/9, 26/8

- פונקציה רציונאלית

19/7

- פונקציית שורש

21/7, 31/7, 33/7, 34/7, 36/7

**חשבון דיפרנציאלי - נושאי חקירה נוספים**

- תחמי שליליות וחיוביות

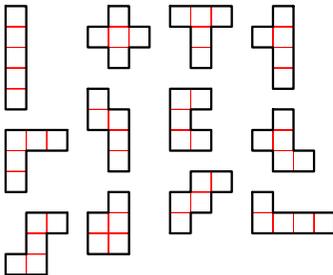
7/8, 12/7, 29/6, 34/7, 35/7, 37/6

- הישר  $y =$

9/8, 11/7, 28/6, 32/6, 34/6



**Pentomino**



Pentomino הוא משחק הרכבה הכולל 12 חלקים.

כל חלק מורכב מ-5 ריבועים.

ישנם 12 צירופים אפשריים של 5 ריבועים עם צלע משותפת.

ואלו הם 12 חלקי ההרכבה.

Pent - מיוונית 5, ו-omino - על משקל משחק Domino.

בסך הכל שטח כל החלקים הוא  $12 \times 5 = 60$  יחידות ריבועיות.

ניתן להרכיב מהן מלבנים בגדלים  $3 \times 20$ ,  $4 \times 15$ ,  $5 \times 12$ ,  $6 \times 10$ .

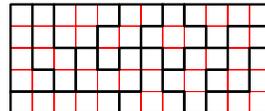
ישנם 2339 פתרונות למלבן  $6 \times 10$ , 1010 פתרונות למלבן  $5 \times 12$ ,

368 פתרונות ל-  $4 \times 15$  ושני פתרונות בלבד ל-  $3 \times 20$ .

$6 \times 10$



$5 \times 12$



$4 \times 15$



$3 \times 20$



המשפטים בגאומטריה

1. זווית צמודות משלימות זו את זו ל- $180^\circ$ .
2. זווית קודקודית שוות זו לזו.
3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
4. במשולש שווה-שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה-שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה-צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה-זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא  $180^\circ$ .
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה צלע-זווית-צלע
18. משפט חפיפה זווית-צלע-זווית.
19. משפט חפיפה צלע-צלע-צלע
20. משפט חפיפה רביעי: שתי צלעות והזווית שמול הצלע שמול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות.
21. האלכסון הראשי כדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.
22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי, אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי, אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי, אם סכום זוג זוויות חד-צדדיות הוא  $180^\circ$  אז שני הישרים מקבילים.
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי, אז:
  - א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
  - ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
  - ג. סכום כל זוג זוויות חד-צדדיות הוא  $180^\circ$ .
26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.
33. במעוין האלכסונים חוצים את הזווית.
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

37. אלכסוני מלבן שווים זה לזה.
38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.
39. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
40. טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא שווה שוקיים.
41. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
42. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.
43. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
44. בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השני.
45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 1 : 2 (החלק הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהחלק האחר).
47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.
48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.
49. שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם במשולש.
50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל.
51. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.
52. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.
53. כל משולש ניתן לחסום במעגל.
54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.
55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
56. ניתן לחסום מרובע במעגל, אם ורק אם, סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ .
57. מרובע קמור חוסם מעגל, אם ורק אם, סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.
58. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.
59. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.
60. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.
61. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.
62. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו, אם ורק אם, שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.
63. במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.
64. מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
65. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.
66. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.
67. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר, וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.
68. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.
69. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.
70. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.
71. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.
72. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר, שוות זו לזו.
73. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה ( $90^\circ$ ).
74. זווית היקפית בת  $90^\circ$  נשענת על קוטר.
75. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכייהן.

76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.
77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.
79. זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.
80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.
82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.
83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצא על קטע המרכזים או על המשכו.
84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.
85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.
86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
87. משולש, בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, הוא משולש ישר זווית.
88. אם במשולש ישר-זווית, זווית חדה של  $30^\circ$ , או הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.
89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה  $30^\circ$ .
90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.
91. משפט תאלס המורחב:
- ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש, חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.
92. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים, הם ישרים מקבילים.
93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.
94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה לחלקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.
95. משפט דמיון צלע-זווית-צלע
96. משפט דמיון זווית-זווית
97. משפט דמיון צלע-צלע-צלע
98. במשולשים דומים: א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.  
 ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.  
 ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.  
 ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.  
 ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.  
 ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.  
 ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.
99. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, או מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני. (99-101 לחמש יחידות גבול)
100. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, או מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.
101. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, או מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.
102. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.
103. הגובה ליתר במשולש ישר זווית, הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.
104. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

ניתן לפתור את הקוביה ההונגרית, בכל מצב, בלא יותר מ־ 20 צעדים (הוכח ב־2010 בעזרת מחשבים רבי עוצמה).

**נוסחאון הנגרות לארבע יחידות**

**אלגברה**

נוסחאות הכפל המקוצר:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$  ,  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$  ,  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

משוואה ריבועית:  $ax^2 + bx + c = 0$  ,  $a \neq 0$  , השורשים:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

סדרות:

סדרה הנרסית	סדרה חשבונית	
$a_1 = a$ , $a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_1 = a$ , $a_{n+1} = a_n + d$	כלל נסיגה
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	האיבר ה-nי
$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ $S = \frac{a_1}{1 - q}$ סכום אינסופי:	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \frac{n \cdot [2a_1 + (n-1)d]}{2}$	סכום

חוקות:  $(a \neq 0, b \neq 0)$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$  ,  $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$  ,  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$  ,  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$  ,  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

לוגריתמים  $(a, b, c > 0 ; a, b \neq 1)$ :  $\log_a(a^b) = b$  ,  $a^{\log_a b} = b$  ,  $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$  ,  $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$  ,  $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

גידול ודעיכה: שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן  $t$  הוא  $q$ :  $M_t = M_0 \cdot q^t$

**גאומטריה אנליטית**

שיפוע  $m$  של ישר העובר דרך הנקודות  $(x_1, y_1)$  ו- $(x_2, y_2)$ :  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר  $y = mx + b$  העובר בנקודה  $(x_1, y_1)$ :  $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי נקודת האמצע  $M(x_M, y_M)$  של קטע שקצותיו הם  $A(x_1, y_1)$  ו- $B(x_2, y_2)$  הם:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} , y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

המרחק  $d$  בין הנקודות  $A(x_1, y_1)$  ו- $B(x_2, y_2)$ :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

שני ישרים בעלי שיפועים  $m_1$  ו- $m_2$  מאונכים זה לזה אם ורק אם:  $m_1 \cdot m_2 = -1$

משוואת מעגל שמרכזו  $(a, b)$  , ורדיוסו  $R$ :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

### הסתברות

- נוסחת ברנולי - ההסתברות ל- $k$  הצלחות מתוך  $n$  נסיונות בהתפלגות בינומית, כאשר

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{כאשר } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{ההסתברות להצלחה היא } p$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{, } P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{- נוסחת בייס:}$$

### טריגונומטריה

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad \text{(R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \quad \text{(} \gamma \text{ היא הזווית הכלואה בין } a \text{ ל-} b \text{)}$$

$$S = \frac{1}{2} a R^2 \quad \text{- אורך קשת של } \alpha \text{ רדיאנים: } l = aR, \quad \text{שטח גזרה של } \alpha \text{ רדיאנים:}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha \quad \text{(} \alpha \text{ היא הזווית הכלואה בין } b \text{ ל-} c \text{)}$$

$$\text{גופים במרחב: מנסרה ישרה וגליל: נפח: } V = B \cdot h \quad \text{(B - שטח הבסיס, h - גובה הגוף)}$$

$$\text{שטח מעטפת: } M = P \cdot h \quad \text{(P - היקף הבסיס, h - גובה הגוף)}$$

$$\text{פירמידה וחרוט: נפח: } V = \frac{B \cdot h}{3} \quad \text{(B - שטח הבסיס, h - גובה הגוף)}$$

$$\text{שטח מעטפת: } M = \pi R l \quad \text{(R - רדיוס העיגול, l - הקו היוצר)}$$

### חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- נגזרות:

$$(x^t)' = t x^{t-1}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{נגזרת של מכפלת פונקציות:}$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{נגזרת של מנת פונקציות:}$$

$$\text{נגזרת של פונקציה מורכבת: } [f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x) \quad \text{כאשר: } u'(x) \text{ היא נגזרת}$$

$$\text{של } u \text{ לפי } x \text{ (נגזרת פנימית) ו-} f'(u) \text{ היא נגזרת של } f \text{ לפי } u \text{ (נגזרת חיצונית)}$$

$$\text{- אינטגרלים: } \int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + c \quad \text{אם } F(x) \text{ היא פונקציה קדומה של } f(x) \text{ אז:}$$