

3. א. (1)

$$z = x + yi \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$$

$$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad (\checkmark)$$

(2)

$$z = 1 \cdot \text{cis } \theta \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{\text{cis } \theta} = \frac{\text{cis } 0}{\text{cis } \theta} = \text{cis } (-\theta) = 1 \cdot \text{cis } (-\theta) \Rightarrow \frac{1}{z} \in \text{מעגל היחידה}$$

ב. (1)

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \Rightarrow z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2 \text{Re}(z) \Rightarrow z + \frac{1}{z} = 2x = 2 \cos \theta$$

אפשר גם:

$$z + \frac{1}{z} = \text{cis } \theta + \text{cis } (-\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos (-\theta) + i \sin (-\theta)) \Rightarrow z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta \quad (\checkmark)$$

$$\cos (-\theta) = \cos \theta, \sin (-\theta) = -\sin \theta$$

ואפשר גם:

$$z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{1}{x + yi} = x + yi + \frac{1}{x + yi} \cdot \frac{x - yi}{x - yi} = x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = x + yi + \frac{x - yi}{1} \Rightarrow z + \frac{1}{z} = 2x \quad (\checkmark)$$

מעגל היחידה

(2)

$$z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i \Rightarrow z_1 + \frac{1}{z_1} + z_2 + \frac{1}{z_2} = 2x_1 + 2x_2 > 2 \Rightarrow x_1 + x_2 > 1$$

נתון סעיף ב(1)

$-1 \leq x_{1,2} \leq 1$. מכיון שהערך המקסימלי של ערכי x הוא 1, הרי שכדי שסכומם

יהיה גדול מ-1 שניהם צריכים להיות חיוביים \Leftrightarrow רביע I או IV.

נתון ש- $y_{1,2} > 0 \Leftrightarrow$ רביע I או II. חיתוך שני האילוצים \Leftrightarrow רביע I (\checkmark) .

ג. (1)

$$w = \text{cis } \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, a_1 = \frac{1}{w} = \text{cis } (-\alpha), a_2 = w = \text{cis } \alpha$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\text{cis } \alpha}{\text{cis } (-\alpha)} = \text{cis } (\alpha - (-\alpha)) \Rightarrow q = \text{cis } 2\alpha = w^2 \Leftrightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{w}{\frac{1}{w}}$$

כל איברי הסדרה נמצאים על מעגל היחידה, כי כל איבר שמוכפל ב- q ,

אינו משנה את הרדיוס-וקטור שלו (כי הרדיוס של המנה גם הוא 1),

אלא רק את הזווית (הארגומנט) - על-ידי חיבור זוויתו וזווית המנה (2 α).

(2)

$$S_5 = a_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = \text{cis } (-\alpha) \cdot \frac{1 - (\text{cis } 2\alpha)^5}{1 - \text{cis } 2\alpha} = \frac{\text{cis } (-\alpha)(1 - \text{cis } 10\alpha)}{1 - \text{cis } 2\alpha} = 0$$

$$(1) \text{cis } (-\alpha) \neq 0 \quad \forall \alpha$$

$$(2) 1 - \text{cis } 10\alpha = 0 \Rightarrow \cos 10\alpha = 1 \Rightarrow 10\alpha = 2\pi k$$

$$k = 1 \Rightarrow 10\alpha = 2\pi \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{5}, k = 2 \Rightarrow 10\alpha = 4\pi \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2\pi}{5}$$

כל הצבה אחרת של k שלם נתן פתרון מחוץ לתחום הנתון $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.