אלי מיטב

מבחני בגרות במתמטיקה לשאלון 482 (805)

עם פתרונות מלאים 2004-2018

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יָצאו גם לשאלונים 382-481-581-582

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יָצאו לשאלונים 481-482-581-582

מספר מילים לפנַי

ספר זה מכיל שאלות ממבחני בגרות מהשנים 2013-2004 שנערכו במתכונת ה'צבירה', המתאימות לשאלון 482 (805) בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. לכל השאלות תשובות סופיות בעמוד השאלה ופתרון מלא בהמשך עם הפניה לעמוד המתאים (המספר המעובה בסוגריים משמאל לכל שאלה). בחלקו השני של ספר זה מובאים 33 מבחני הבגרות לשאלון 482 שנערכו עד כה במתכונת הנוכחית עם פתרון מלא.

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

$\forall$ - לכל , $\in$ - שייך , $\nearrow$ - עליה , $\searrow$ - ירידה , even - זוגי , odd - לא זוגי

$\cup$ - איחוד: היחס 'או' , $\cap$ - חיתוך: היחס 'וגם' , $\emptyset$ - קבוצה ריקה (אין פתרון)

$\surd$ - אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח , ab. - מוחלט , ep. - נקודת קָצֶה (end point)

*'**ללא הגבלת הכלליות**' - קביעה ערך מייצג, במקום פרמטר (שאמור ל'היעלם' בהמשך).*

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ־2012 (נכון להיום), כפי שהם מופיעים בספר, נמצאים באתר ההוצאה במִרְשֶׁתֶת (internet), בעלות שנתית מגוחכת של 20 (עשרים) שקלים בלבד. ראו בגב הכריכה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל.
כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

*שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורה **שריף אמארה** מכפר זָלָפָה.*

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התשע"ט - 2019), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

*את החללים שבין השאלות והפתרונות לִחְלַחְתִי בהבזקי אנקדוטות - מתמטיות, הסטוריות, לשוניות, קריקטורות וגם אנקודות **לאומית או יהודיות**.*

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על־ידי חברת 'קל־ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה

אלי מיטב

אלגברה

<u>גידול ודעיכה - שאלות</u> (כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 004.)

1. (חורף ס"ו - 2006) במדינה מסוימת נערך לראשונה מפקד אוכלוסין.
9 שנים אחרי מפקד האוכלוסין הראשון נערך מפקד שני, ונמצא שהאוכלוסיה גדלה פי שניים.
הנח שהאוכלוסיה גדלה בצורה מעריכית.

א. פי כמה גָדלה האוכלוסיה 17 שנים אחרי המפקד הראשון?

ב. כמה שנים אחרי המפקד הראשון גָדלה האוכלוסיה ב־75%? **(8)**

2. (קיץ ס"ו - 2006 , מועד א) אדם קנה מכונית חדשה. ערך המכונית יורד בצורה מעריכית.
כעבור 10 שנים מיום הקניה ירד ערך המכונית ב־75%.

א. כעבור כמה שנים מיום הקניה, יֵרד ערך המכונית ב־80%?

ב. בכמה אחוזים ירד ערך המכונית כעבור 6 שנים מיום הקניה? **(8)**

3. (קיץ ס"ו - 2006 , מועד ב) אדם הפקיד בשני בנקים A ו־ B, באותו יום את <u>אותו סכום כסף</u>
בכל אחד מהבנקים הסכום גדֵל באחוז קבוע בכל שנה.
כעבור 7 שנים מיום ההפקדה היה הסכום בבנק A - 6580 ש', ובבנק B - 6150 ש'.
כעבור 3 שנים נוספות היה הסכום בבנק A - 7402.5 ש'.
מצא בכמה אחוזים גדֵל כל שנה סכום הכסף: **א.** בבנק A **ב.** בבנק B **(8)**

4. (קיץ ס"ו - 2006 , מועד מיוחד) מברֵכה מלאה שבה 1200 מ"ק מים מוציאים מים. כמות המים
יורדת בצורה מעריכית. לאחר 10 שעות נשארים בברֵכה 719 מ"ק מים.

א. מצא את כמות המים שהוצאו מהברכה בשעתיים הראשונות.

ב. כעבור כמה שעות מתחילת הוצאת המים תתרוקן הברֵכה עד מחציתה? **(9)**

5. (סתיו ס"ז - 2006 , מועד לוחמים) **א.** זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא שלוש שנים.

(1) כעבור כמה זמן תקטן כמות החומר עד ל־ 20% מן הכמות ההתחלתית?

(2) אם כיום נותרה במעבדה כמות של 350_{gr} מחומר רדיואקטיבי זה,
איזו כמות תִוותר ממנו בעוד שנתיים? **(9)**

תשובות

1. א. פי 3.7 **ב.** 7.27 (שנים)

2. א. 11.61 שנים **ב.** 56.46%

3. א. 4% **ב.** 3%

4. א. 117_{m^3} **ב.** 13.51 (שעות)

5. א. (1) $t = 6.97_{years}$ **(2)** $m_2 = 220.49_{gr}$

23. ב. (1) 28 דקות הן שתי יחידות של זמן מחצית חיים, לכן: $1000_{gr} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbf{250_{gr}}$.

(2) נמצא את שיעור הדעיכה לדקה (q, בנוסחה: $m_t = m_0 \cdot a^t$): $0.5 = 1 \cdot q^{14} \Rightarrow q = 0.9517$

$$1000 \cdot 0.9517^t < 20 \quad \Rightarrow \quad 0.9517^t < 0.02 \quad \Rightarrow \quad t \ln 0.9517 < \ln 0.02$$

$$\Rightarrow \quad t > \frac{\ln 0.02}{\ln 0.9517} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t > 79.01_{minutes}}$$

אפשר גם לעבוד על $a = 0.5$ ביחידות של 14 דקות:

$$1000 \cdot 0.5^t < 20 \quad \Rightarrow \quad 0.5^t < 0.02 \quad \Rightarrow \quad t > \frac{\ln 0.02}{\ln 0.5} = 5.6439$$

$$5.6439 \cdot 14_{minutes} = \mathbf{79.01_{minutes}}$$

---

24. ב.

$$m_0 = 2 \,,\ m_4 = 2.2 \ ,\ \ p = ?$$

$$2.2 = 2 \cdot q^4 \quad \Rightarrow \quad q^4 = 1.1 \quad \Rightarrow \quad q = 1.0241 = 1 + \frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p = 2.41}$$

---

25. א. (1) נתייחס לגידול במשך 4 חודשים של הצהובים מ־ 1820 ל־ 2130 :

$$2130 = 1820 \cdot q^4 \quad \Rightarrow \quad q^4 = 1.1703 \ \ /(\ \ )^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad q = 1.0401$$

נתייחס לגידול במשך 6 החודשים הראשונים:

$$1820 = m_0 \cdot 1.0401^6 \quad \Rightarrow \quad m_0 = \frac{1820}{1.0401^6} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m_0 = 1438} \text{ דגים}$$

(2)

$$m_7 = 1438 \cdot 1.0401^7 = \mathbf{1893} \text{ דגים}$$

ב. נמצא את קצב הגידול של האדומים (נסמן ב־ q):

$$1720 = 1438 \cdot q^6 \quad \Rightarrow \quad q^6 = 1.1961 \ \ /(\ \ )^{\frac{1}{6}} \quad \Rightarrow \quad q = 1.0303$$

מכיון שהכמות ההתחלתית היתה שווה, היא אינה רלוונטית לגבי האחוז המבוקש.

אפשר לקבוע אותה, ללא הגבלת הכלליות לדג אחד.

$$\frac{1.0303^{10}}{1.0303^{10} + 1.0401^{10}} \cdot 100 = \frac{1.3478}{2.8295} \cdot 100 = \mathbf{47.64\%}$$

הדשא של השכן

האם באמת הדשא של השכן ירוק יותר? יכול להיות, אבל גם יכול להיות שלא – למרות שהוא נראה כך.
הסיבה היא שעל הדשא של השכן אתה מסתכל במבט צדדי ועל הדשא שלך אתה מסתכל במבט־על.
לכן אם הדשא שלך ושל השכן ירוק באותה מידה,
אזי: אתה תראה את הדשא של שכנך שהוא ירוק יותר, אבל גם שכנך יראה את הדשא שלך שהוא ירוק יותר.
אם תסתכל על הדשא שלך מהחלון של השכן – תראה שהדשא ש ל ך ירוק יותר . . .

אלגברה - סדרות - סדרה חשבונית - שאלות

1. (005 , חורף ס"ו - 2006) נתונה סדרה חשבונית שבה $3n$ איברים.

האיבר הנמצא במקום ה־21 גדול ב־66 מהאיבר הנמצא במקום ה־10.

סכום n האיברים האחרונים בסדרה גדול פי 5 מסכום n האיברים הראשונים שבה.

מצא את ערכו של האיבר הראשון. **(22)**

2. (005 , קיץ ס"ו - 2006 , מועד א) נתון כי סכום 30 האיברים הראשונים בסדרה חשבונית שווה לסכום 20 האיברים הראשונים שלה.

א. הראה כי סכום 50 האיברים הראשונים בסדרה הנתונה שווה לאפס.

ב. הסדרה הנתונה היא סדרה חשבונית עולה.

מצא באיזה מקום בסדרה נמצא האיבר החיובי הראשון. **(22)**

3. (005 , קיץ ס"ו - 2006 , מועד ב) נתונה סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , \ldots , a_{2n}$. הפרש הסדרה הוא d.

סכום האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים הוא אפס.

א. הוכח כי: $a_n = 0$

ב. הבע באמצעות n ו־d את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה. **(22)**

4. (005 , קיץ ס"ו - 2006 , מועד מיוחד) נתונה סדרה חשבונית: $120 , 117 , 114 \ldots$.

א. מצא עבור אילו ערכים של n, סכום n האיברים בסדרה קטן מאפס.

ב. האיבר האחרון בסדרה הוא -357 . כמה איברים שליליים יש בסדרה? **(23)**

5. (005 , קיץ ס"ו - 2006 , מועד מיוחד) שני תלמידים קיבלו מאגר תרגילים במתמטיקה והיו צריכים להגיש את הפתרונות בסוף החופש.

הם החלו לפתור את התרגילים באותו היום. אחד התלמידים פתר ביום הראשון 4 תרגילים, ובכל יום שאחריו פתר תרגיל אחד יותר מן היום הקודם לו. התלמיד השני עבד בקצב קבוע ופתר בכל יום 13 תרגילים. התלמיד השני סיים את העבודה שלושה ימים לפני הראשון.

כמה תרגילים היו במאגר? (מצא את כל הפתרונות האפשריים.) **(23)**

$5^4 = 2^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 4^4$ **המספר הקטן ביותר בחזקת** 4 **ששווה לסכום** 5 **מספרים בחזקת** 4

תשובות

1. $a_1 = 3$ **3. ב.** $S_{even} = dn$ **5.** $S_1 = 130 \;,\; S_2 = 39$

2. ב. $n = 26$ **4. א.** $n > 81$ **ב.** 119

19. (005 , קיץ תשע"ג - 2013 , מועד א)

נתונה סדרה חשבונית. האיבר במקום ה־ 30 גדול ב־ 96 מהאיבר במקום ה־ 6 .

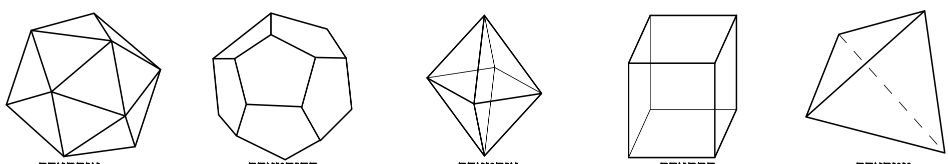
סכום $2n$ האיברים הראשונים בסדרה גדול פי 4 מסכום n האיברים הראשונים בסדרה.

א. מצא את הפרש הסדרה ואת האיבר הראשון בסדרה.

ב. מחקו את $2n$ האיברים הראשונים בסדרה הנתונה. **(29)**

הבע באמצעות n את הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה שנשארה לאחר המחיקה.

קיימים רק חמישה גופים מרחביים משוכללים. הגופים קרויים בלועזית על שם מספר הפאות שלהם. חלקו הראשון של השם הוא מספר הפאות ביוונית, וחלקו השני של השם הוא 'אדר' - פאה.



שם	פאות	קודקודים	מקצועות	תאור
טטראדר (ארבעון)	4	4	6	פירמידה ישרה, משולשת ומשוכללת
הקסאדר	6	8	12	קוביה
אוקטאדר (תמנון)	8	6	12	שתי פירמידות ישרות מרובעות ומשוכללות המחוברות בבסיס
דודקטאדר (תריסריון)	12	20	30	פאות מחומשות משוכללות. כל שלוש פאות נפגשות בקודקוד אחד
איקסאדר (עשירמון)	20	12	30	פאות משולשות משוכללות. כל חמש פאות נפגשות בקודקוד אחד

משפט הפאונים של אוילר: סכום מספר הקודקודים ומספר הפאות גדול ב־2 ממספר המקצועות, בכל פאון קמור.

בנוסחה: V - מספר הקודקודים ; F - מספר הפאות ; E - מספר המקצועות $\Leftarrow$ $V+F-E=2$

תשמעו סיפור: שאלה שנשאלה במבחן הפסיכומטרי האמריקאי (S.A.T.): נתונים טטראדר ואוקטאדר בעלי פאות חופפות. הדביקו פאה לפאה והתקבל גוף חדש. כמה פאות לגוף החדש? התשובה המיידית שכמעט כל הנבחנים ענו היא 10 פאות: לטטראדר 4 פאות ; לאוקטאדר 8 פאות ; שתי פאות 'התבזבזו' על ההדבקה $\Leftarrow$ *נשארו 10 פאות. אחד התלמידים חשב שאם שאלה זו הופיעה בין השאלות האחרונות - לא יתכן שהתשובה עליה כה פשוטה. הוא התעמק בבעיה וענה: 7 פאות! התלמיד קיבל במבחן ציון 99. כשבירר היכן טעה, נענה כי היה זה בשאלה זו. התלמיד התעקש שתשובתו נכונה, והבוחנים דחו את עירעורו. גם אביו של התלמיד, שהיה מדען בעצמו, טען לצדקת הבוחנים. התלמיד בנה מודל של הגופים והוכיח את צדקתו. הענין הגיע עד לבית המשפט שפסק כי התלמיד צודק. הבוחנים נאלצו להוסיף לו את הנקודה החסרה, אך הורידו נקודה אחת לכל שאר הנבחנים . . .*

טוב, אז איך זה בכל זאת יכול להיות? התשובה היא כי שתי פאות באמת נגרעו מההדבקה. כל אחת משלושת הפאות האחרות של הטטראדר התלכדה עם אחת מפאות האוקטאדר, כך שיש להפחית שלוש פאות מתוך ה־10 שנשארו.

תשובות

19. א. $a_1=2\ ,\ d=4$ **ב.** $S=10n^2$

9. א.

$(I)\quad S_{12} = 1.52\, S_6 \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{2}\cdot(2a_1 + 11d) = 1.52 \cdot \frac{6}{2}\cdot(2a_1 + 5d)$

$12a_1 + 66d = 9.12a_1 + 22.8d \quad \Rightarrow \quad 2.88a_1 = -43.2d \quad \Rightarrow \quad a_1 = -15d$

$(II)\quad S_{12} = a_6 + a_7 + 1900 \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{2}\cdot(2a_1 + 11d) = a_1 + 5d + a_1 + 6d + 1900$

$12a_1 + 66d = 2a_1 + 11d + 1900 \quad \Rightarrow \quad 10a_1 + 55d \overset{*}{=} 1900$

$10\cdot(-15d) + 55d = 1900 \quad \Rightarrow \quad -95d = 1900 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d = -20_{sh}}$

ב.

$(*)\quad 10a_1 + 55\cdot(-20) = 1900 \quad \Rightarrow \quad 10a_1 = 3000 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 300_{sh}$

$S_{12} = \frac{12}{2}\cdot(2\cdot 300 - 11\cdot 20) = 6(600 - 220) = 6\cdot 380 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{12} = 2280_{sh}}$

---

10. נסמן: n - מספר השורות באגף א׳ (A) $\Leftarrow$ $(n+32)$ - מספר השורות באגף ב׳ (B)

$S_A = S_n = \frac{n}{2}(1+n) \quad , \quad S_B = \frac{n+32}{2}(2\cdot 3 + 1\cdot(n + 32 - 1)) = \frac{n+32}{2}(n+37)$

$S_B = 25\, S_A \quad \Rightarrow \quad \frac{n+32}{2}(n+37) = 25\cdot\frac{n}{2}(1+n) \quad /\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad (n+32)(n+37) = 25n(1+n)$

$n^2 + 37n + 32n + 1184 = 25n + 25n^2 \quad \Rightarrow \quad 24n^2 - 44n - 1184 = 0 \quad /:4$

$6n^2 - 11n - 296 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_{1,2} = \frac{11 \pm 85}{12} \quad , \quad n > 0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{11+85}{12} = \frac{96}{12} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n = 8}$ **(שורות)**

---

11. א.

$(1)\quad 2\,,\,5\,,\,8\,,\,...\,,\,47 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2\,,\; d = 3\,,\; a_n = 47 \quad \Rightarrow \quad 47 = 2 + 3(n-1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n = 16}$

$(2)\quad 1\,,\,5\,,\,9\,,\,...\,,\,45 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1\,,\; d = 4\,,\; a_n = 45 \quad \Rightarrow \quad 45 = 1 + 4(n-1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n = 12}$

ב.

$S_{(1)} = \frac{16}{2}(2(a_1 + d) + 3d(16-1)) = 488 \quad \Rightarrow \quad 8(2a_1 + 47d) = 488 \quad \Rightarrow \quad (I)\quad 2a_1 + 47d = 61$

$S_{(2)} = \frac{12}{2}(2a_1 + 4d(12-1)) = 348 \quad \Rightarrow \quad 6(2a_1 + 44d) = 348 \quad \Rightarrow \quad (II)\quad 2a_1 + 44d = 58$

$(I) - (II) \quad \Rightarrow \quad 3d = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d = 1} \quad \Rightarrow \quad (I)\quad 2a_1 + 47 = 61 \quad \Rightarrow \quad 2a_1 = 14 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a_1 = 7}$

ג.

$a_n = 14 = 7 + 1\cdot(n-1) \quad \Rightarrow \quad n = 8$

$a_8 + a_{18} + a_{28} + a_{38} + a_{48} = 14 + 24 + 34 + 44 + 54 = \frac{5}{2}(14 + 54) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S = 170}$

אלגברה - סדרות - סדרה הנדסית - שאלות

1. (005 , חורף ס"ז - 2007) נתונים שלושה מספרים שהם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מכפלתם היא 125. אם נוסיף 1 לכל אחד משני המספרים הראשונים ונחסיר 7 מהמספר השלישי, יתקבלו שלושה מספרים שהם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית חדשה.
מצא את שלושת המספרים (שני פתרונות). **(33)**

2. (005 , קיץ ס"ז - 2007 , מועד ב מיוחד) נתון כי a_1 , a_2 , a_3 הם שלושה איברים ראשונים של סדרה הנדסית. נתון גם כי $\frac{2}{a_3} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$ ו־ $a_7 = 32$.
חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה (מצא את כל האפשרויות). **(33)**

3. (005 , קיץ ס"ז - 2007 , מועד ב) מכל מים מתמלא ב־ 5 שעות. היחס בין כמות המים הזורמת למכל מידי שעה ובין כמות המים שזרמה אליו בשעה הקודמת הוא q.
במשך השעתיים הראשונות זרמו למכל 48 מ"ק מים, ובמשך 4 השעות הראשונות זרמה למכל כמות מים הגדולה פי 2 מכמות המים שזרמה למכל במשך 4 השעות האחרונות.
מצא את נפח המכל. **(34)**

4. (005 , קיץ ס"ח - 2008 , מועד ב) נתונה סדרה הנדסית: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n$.

א. האיבר השלישי בסדרה a_n גדול ב־2 מהאיבר השני,
והאיבר הרביעי גדול פי 2 מהאיבר השלישי. מצא את a_1.

ב. נתונה סדרה הנדסית נוספת: $b_1 , b_2 , b_3 , \ldots , b_n$.
משתי הסדרות בונים סדרה הנדסית חדשה: $\frac{a_1}{b_1} , \frac{a_2}{b_2} , \frac{a_3}{b_3} , \ldots , \frac{a_n}{b_n}$.
מנת הסדרה החדשה היא 3, וסכום 10 האיברים הראשונים בסדרה החדשה הוא 7381.

(1) מצא את האיבר הראשון בסדרה החדשה, ומצא את b_1.

(2) מצא את מנת הסדרה b_n.

(3) מצא את n, שעבורו $b_n = 4 \cdot \frac{8}{27}$. **(34)**

תשובות

1. (1) $1 , 5 , 25$ (2) $-3\frac{4}{7} , 5 , -7$

2. (1) $S_{20} = 524,287.5$ (2) $S_{20} = 0$

3. $V = 62_{m^3}$

4. **א.** $a_1 = 1$ **ב.** **(1)** $\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{4}$, $b_1 = 4$ **(2)** $q_{b_n} = \frac{2}{3}$ **(3)** $n = 4$

8. א.

$$(a_1+3)+(a_1+3)q+\ ...\ +(a_1+3)q^{2n-1}=4\,S_{2n}$$

$$(a_1+3)\cdot\frac{q^{2n}-1}{q-1}=4a_1\cdot\frac{q^{2n}-1}{q-1}\quad\Rightarrow\quad a_1+3=4a_1\quad\Rightarrow\quad 3a_1=3\quad\Rightarrow\quad \mathbf{a_1=1}$$

ב.

$$a_2+a_4+\ ...\ +a_{2n}=2(a_1+a_3+\ ...\ +a_{2n-1})$$

$$\Rightarrow\quad a_1q\cdot\frac{(q^2)^n-1}{q^2-1}=2\cdot a_1\cdot\frac{(q^2)^n-1}{q^2-1}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{q=2}$$

ג.

$$S_{2n}=a_1\cdot\frac{q^{2n}-1}{q-1}=1\cdot\frac{2^{2n}-1}{2-1}=1023\quad\Rightarrow\quad 2^{2n}=1024=2^{10}\quad\Rightarrow\quad 2n=10\quad\Rightarrow\quad n=5$$

$$a_1+a_3+\ ...\ +a_9=1\cdot\frac{4^5-1}{4-1}=\frac{1023}{3}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{S=341}$$

עופר ילין: סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי שניים מסכום האיברים במקומות הלא־זוגיים, לכן סכום האיברים במקומות הלא־זוגיים הוא $\frac{1}{3}$ מסכום כל איברי הסדרה.

לכן: $a_1+a_3+\ ...\ +a_{2n-1}=1023:3=\mathbf{341}$.

---

9. א. נסמן את איברי הסדרה החדשה: $b_1\ ,\ b_2\ ,\ ...$.

$$b_3=a_2\quad\Rightarrow\quad b_1\cdot q_0^2=a_1\cdot q\ \ ,\ \ b_1=a_1\quad\Rightarrow\quad q_0^2=q\ \ ,\ \ b_i>0\quad\Rightarrow\quad \mathbf{q_0=\sqrt{q}}$$

ב.

$$2b_2=a_2\quad\Rightarrow\quad 2\cdot b_1q_0=a_1\cdot q$$

$$b_1=a_1\quad\Rightarrow\quad 2q_0=q\quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{q}=q\ \ /(\ \ )^2\quad\Rightarrow\quad 4q=q^2\ \ /:q(\neq 0)\quad\Rightarrow\quad \mathbf{q=4}$$

ג.

(1) אם בין כל שני איברים נוסף איבר חדש, ומספר האיברים לאחר ההוספה הוא 9 ,
אז מספר איברי הסדרה המקורית היה **5** : ● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ● .

(2)

$$q_0=\sqrt{q}=\sqrt{4}=2\ \ ,\ \ b_1=a_1$$

$$S_b=S_a+340\quad\Rightarrow\quad a_1\cdot\frac{2^9-1}{2-1}=a_1\cdot\frac{4^5-1}{4-1}+340$$

$$\Rightarrow\quad 511a_1=341a_1+340\quad\Rightarrow\quad 170a_1=340\quad\Rightarrow\quad \mathbf{a_1=2}$$

---

10. ב.

$$a_1=4.8\ ,\ q=2\ ,\ S_n=72\ ,\ n=?$$

$$S_n=4.8\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=72\quad\Rightarrow\quad 2^n-1=\frac{72}{4.8}=15\quad\Rightarrow\quad 2^n=16=2^4\quad\Rightarrow\quad \mathbf{n=4_{hours}}$$

אלגברה - סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת - שאלות

1. (005 , קיץ ס"ה - 2005 , מועד ב)

בסדרה הנדסית אין־סופית סכום האיבר הראשון והאיבר החמישי

הוא 5440 . האיבר הראשון גדול מהאיבר הרביעי פי 8.

מצא את: **א.** סכום הסדרה.

ב. סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה. **(39)**

2. (005 , סתיו ס"ט - 2009 , מועד לוחמים)

נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת $a_1 , a_2 , a_3 , \dots$.

סכום האיברים בסדרה זו גדול פי 1.4

מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים באותה סדרה אינסופית.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. מאיברי הסדרה הנתונה $a_1 , a_2 , a_3 , \dots$ בונים שתי סדרות אינסופיות חדשות I ו־ II:

$\underline{I :}\ a_1^2 , a_2^2 , a_3^2 , \dots$; $\underline{II :}\ a_1^3 , a_2^3 , a_3^3 , \dots$

ידוע כי הסכום של איברי סדרה II גדול פי 35 מהסכום של איברי סדרה I .

מצא את הסכום של איברי הסדרה הנתונה $a_1 , a_2 , a_3 , \dots$. **(39)**

3. (006 , חורף ס"ה - 2005)

נתונה סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה היא $4q^2$ $(0 < q < \frac{1}{2})$.

בין כל שני איברים בסדרה הנתונה הכניסו איבר נוסף,

ונוצרה סדרה הנדסית חדשה שכל איבריה חיוביים.

א. הבע באמצעות q את מנת הסדרה החדשה.

ב. נתון כי סכום הסדרה החדשה גדול פי $48q^2$ מסכום הסדרה הנתונה. חשב את q.

ג. עבור הערך של q שמצאת בסעיף ב', חשב בסדרה החדשה את היחס

בין האיבר במקום הראשון ובין סכום האיברים שאחרי האיבר הראשון. **(40)**

תשובות

1. **א.** $S = 10,240$ **ב.** $S = 3,413\frac{1}{3}$

2. **א.** $q = 0.4$ **ב.** $S = 65$

3. **א.** $2q$ **ב.** $q = \frac{1}{6}$ **ג.** 2

<u>סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת - פתרונות</u>

1. א.

$$(I)\quad a_1 + a_5 = 5440 \quad\Rightarrow\quad a_1 + a_1 q^4 = a_1(1+q^4) = 5440$$

$$(II)\quad a_1 = 4a_4 \quad\Rightarrow\quad a_1 = 8a_1 q^3 \quad\overset{*}{\Rightarrow}\quad q^3 = \frac{1}{8} \quad\Rightarrow\quad q = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad (I)\quad a_1\left(1+\frac{1}{16}\right) = a_1\cdot\frac{17}{16} = 5440 \quad\Rightarrow\quad a_1 = \frac{5440\cdot 16}{17} = 5120$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5120}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5120}{\frac{1}{2}} = 2\cdot 5120 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S_\infty = 10,240}$$

$(*)$ $a_1 \neq 0$ לכן ניתן לחלק בו את שני אגפי המשוואה.

ב.

$$A_1 = a_2 = a_1 q \;;\; Q = q^2 \quad\Rightarrow\quad S = \frac{a_1 q}{1-q^2} = \frac{5120\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{2560}{\frac{3}{4}} = \frac{2560\cdot 4}{3} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S = 3413\tfrac{1}{3}}$$

---

2. א. נסמן: S_O - סכום האיברים במקומות הלא־זוגיים (odd).

$$\frac{S}{S_O} = \frac{\frac{a_1}{1-q}}{\frac{a_1}{1-q^2}} = \frac{\cancel{a_1}(1-q^2)}{\cancel{a_1}(1-q)} = \frac{(1-q)(1+q)}{1-q} = 1+q = 1.4 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{q = 0.4}$$

ב.

$$q_I = \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = q^2 = 0.4^2 = 0.16$$

$$q_{II} = \frac{a_{n+1}^3}{a_n^3} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^3 = q^3 = 0.4^3 = 0.064$$

$$\frac{S_{II}}{S_I} = \frac{\frac{a_1^3}{1-0.064}}{\frac{a_1^2}{1-0.16}} = \frac{a_1^3\cdot 0.84}{a_1^2\cdot 0.936} = \frac{0.84\, a_1}{0.936} = \frac{35}{39}\, a_1 \underset{\text{נתון}}{=} 35 \quad\Rightarrow\quad a_1 = 39$$

$$a_1 = 39 \;,\; q = 0.4 \quad\Rightarrow\quad S = \frac{39}{1-0.4} = \frac{39}{0.6} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S = 65}$$

ר' אברהם הַבֶּדֶרְשִׁי היה פיטן שחי בצרפת במאה ה־ 13. הוא חיבר תפילה ארוכה שנקראת '*בַּקָּשַׁת אֶלֶף אַלְפִין*'.
תפילה זו מכילה אלף מילים שכולן מתחילות באות 'א' !
יצירה אחרת שלו, '*בַּקָּשַׁת ה־לָמֶדִין*' או '*בֵּית אֵל*', הינה שיר, עם חרוז ועם משקל. בכל מילה שלו מופיעה האות 'ל'
וכל השיר בנוי רק על מחצית אותיות הא"ב: מ־ 'א' ועד 'ל' בלבד !
לכן הוא גם נקרא 'בית אל': 'בית' = 412 מילים , 'אל' - האותיות מ־ 'א' ועד 'ל' בלבד.
בנו, הפיטן ר' יְדַעְיָה הַפְּנִינִי חיבר את '*בַּקָּשַׁת הַמֵּמִין*'. בתפילה זו למעלה מאלף מילים, שכולן מתחילות באות 'מ' !

סדרות מעורבות (חשבונית והנדסית) - שאלות

1. (005 , קיץ ס"ח - 2008 , מועד לוחמים)

האיברים הרביעי, השביעי והתשעה־עשר של סדרה חשבונית

הם האיברים הראשון, השני והשלישי של סדרה הנדסית בהתאמה.

חשב את מנת הסדרה ההנדסית. **(43)**

2. (005 , סתיו תשע"ב - 2011 , לוחמים)

נתונים המספרים x ו־ y $(x , y \neq 0)$ כך שמתקיים:

$9 , y , x$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה.

$20 , 2y , x$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה חשבונית. **(43)**

א. מצא את x ואת y .

ב. הראה כי בסדרה החשבונית שהתקבלה: **(1)** אם $t=3$ ו־ $n=5$ אז $S_{tn}=t^2\cdot S_n$.

(2) לכל t ו־n טבעיים, מתקיים: $S_{tn}=t^2\cdot S_n$.

3. (005 , קיץ תשע"א - 2011 , מועד ב) a_1 , a_2 , a_3 הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

$\frac{16}{a_3} , \frac{13}{a_2} , \frac{9}{a_1}$ הם שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

א. מצא את שלושת האיברים a_1 , a_2 , a_3 , אם נתון כי הסדרה ההנדסית היא סדרה יורדת,

וסכום שלושת איברים אלה הוא 217 .

ב. האיברים $\frac{16}{a_3} , \frac{13}{a_2} , \frac{9}{a_1}$ נמצאים בסדרה החשבונית במקומות $11 , 10 , 9$ בהתאמה.

(1) מצא את האיבר הראשון בסדרה החשבונית.

(2) מצא כמה איברים שליליים יש בסדרה החשבונית. **(44)**

הסתברות מפתיעה

ההסתברות ששני אנשים מתוך 23 אנשים אקראיים, חוגגים יום הולדת באותו תאריך גבוהה מ־50% !

(ההסתברות היא: 0.5073)

תשובות

1. $q_1=1 \;,\; q_2=4$

2. א. $x=4 \;,\; y=6$

3. א. $81 , 72 , 64$ **ב. (1)** $b_1=-\frac{4}{9}$ **(2)** $n=7$

3. א.

$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ \equiv\ a_1\ ,\ a_1q\ ,\ a_1q^2$

$\frac{16}{a_3}-\frac{13}{a_2}=\frac{13}{a_2}-\frac{9}{a_1}\quad\Rightarrow\quad\frac{16}{a_1q^2}-2\cdot\frac{13}{a_1q}+\frac{9}{a_1}=0\ \ /\cdot a_1q^2\quad\Rightarrow\quad 9q^2-26q+16=0$

$q_{1,2}=\frac{26\pm10}{18}=\frac{13\pm5}{9}\quad\Rightarrow\quad q_1=2\ ,\ q_2=\frac{8}{9}\ \ ;\ \ (*)\ \ 0<q<1\quad\Rightarrow\quad q=\frac{8}{9}$

$a_1+\frac{8}{9}a_1+\frac{64}{81}a_1=217\quad\Rightarrow\quad\frac{217}{81}a_1=217\quad\Rightarrow\quad a_1=81$

$\Rightarrow\quad a_2=81\cdot\frac{8}{9}=72\ ,\ a_3=72\cdot\frac{8}{9}=64\quad\Rightarrow\quad \mathbf{81\ ,\ 72\ ,\ 64}$

$(*)$ מכיון שהסדרה יורדת וסכום האיברים חיובי $\Leftarrow$ $0<q<1$.

תתכן סדרה יורדת שהמנה גדולה מ־ 1 , למשל: $-1,\ -3,\ -9\ .\ .\ .$ אבל אז הסכום שלילי.

ב. (1) נסמן את איברי הסדרה החשבונית: b_i .

$d=\frac{13}{72}-\frac{9}{81}=\frac{5}{72}\ \ ,\ \ b_9=b_1+\frac{5}{72}\cdot8=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}\quad\Rightarrow\quad b_1=\frac{1}{9}-\frac{5}{9}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{b_1=-\frac{4}{9}}$

(2)

$b_n<0\quad\Rightarrow\quad -\frac{4}{9}+\frac{5}{72}(n-1)<0\quad\Rightarrow\quad\frac{5}{72}(n-1)<\frac{4}{9}\ \ /\cdot72$

$\Rightarrow\quad 5n-5<32\quad\Rightarrow\quad 5n<37\quad\Rightarrow\quad n<7.4\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{n=7}$

חרדת המספרים

לאונרד אוילר היה מתמטיקאי שוויצי (1707-1783), פורה ביותר. אוילר האמין בקיומו של א-לוקים.

בתקופתו פעל גם פילוסוף צרפתי בשם **דֶני דידרו**. דידרו היה אתיאיסט (כופר בקיומו של א־לוקים).

בתקופה מסוימת בחייהם פעלו שניהם ברוסיה בתקופתה של **קטרינה הגדולה**.

דני דידרו ניסה אז לשכנע את הרוסים לנטוש את אמונתם ולהפוך לאתיאיסטים.

קטרינה, שלא אהבה את פעילותו של דידרו, הזמינה לחצרה בפטרסבורג, את אוילר ואת דידרו לוויכוח תיאולוגי.

לדידרו לא היה מושג ולו הקלוש ביותר, במתמטיקה. אוילר החליט לנצל עובדה זו בויכוח.

הוא פנה לדידרו: "יש בידי הוכחה מתמטית לקיומו של הא-ל,

וההוכחה היא: $\frac{a+b^n}{n}=x$ מסקנה: יש א־לוקים. מה יש לך להגיד על כך?"

דידרו, שלא ידע בכלל איך להסתכל על זה, נותר פעור־פה ולא ידע מה תשובה ישיב ל'הוכחה' זו. המום ומושפל,

לקול צחוקם של כל הנוכחים במעמד, נטש את המפגש, עזב את פטרסבורג וחזר לפריז. סיפור אמיתי.

סדרות כלליות וסדרות נסיגה - שאלות

1. (005 , קיץ ס"ה - 2005 , מועד א)

נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_n = 5\cdot 3^n + T_n + 1$,

כאשר: $T_n = 2 + 6 + 18 + \ . \ . \ . \ + 2\cdot 3^{n-1}$.

א. מצא נוסחה ל־ a_n (הבע באמצעות n בלבד).

ב. מצא נוסחה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה הנתונה. **(48)**

2. (005 , קיץ ס"ט - 2009 , מועד לוחמים)

הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = (n+1)(a_n+1)$, $a_1 = k$.

א. הבע באמצעות k את האיברים a_2 ו־ a_3 של הסדרה a_n .

הסדרה b_n , המוגדרת לכל n טבעי על יד $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n+1}$, היא סדרה חשבונית.

ב. מצא את: **(1)** b_1 **(2)** הפרש הסדרה b_n

ג. נתון כי סכום שלושת האיברים הראשונים של הסדרה a_n קטן ב־ 39

מסכום 11 האיברים הראשונים של הסדרה b_n . חשב את k . **(48)**

3. (005 , חורף תש"ע - 2010 , מועד לוחמים)

נתונה סדרה המקיימת לכל n טבעי: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n - 1}$. נתון: $a_1 + a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 > 0$.

א. **(1)** מצא את a_1 ואת a_2 בסדרה הנתונה **(2)** הראה כי $a_3 = a_1$

ב. חשב את סכום 251 האיברים הראשונים בסדרה. **(48)**

4. (005 , קיץ תש"ע - 2010 , המבחן הגנוז)

הסדרה: $a_1 , a_2 , a_3 \ . \ . \ .$ מקיימת לכל n טבעי את כלל הנסיגה: $a_{n+1} = 4 + 2n - a_n$.

א. הוכח כי בסדרה מתקיים: $a_{n+2} - a_n = 2$.

ב. נתון: $a_2 + a_4 + a_6 + \ . \ . \ . \ + a_{100} = 2250$. חשב את a_2 . **(49)**

ג. חשב את סכום 100 האיברים הראשונים בסדרה הנתונה ($a_1 , a_2 , a_3 , \ . \ . \ .$).

תשובות

1. **א.** $a_n = 6\cdot 3^n$ **ב.** $S_n = 9(3^n - 1)$

2. **א.** $a_3 = 6k + 9$, $a_2 = 2k + 2$ **ב.** **(1)** $b_1 = 2$ **(2)** $d_{b_n} = 1$ **ג.** $k = 3$

3. **א.** **(1)** $a_2 = -1$, $a_1 = \frac{1}{2}$ **ב.** $S_{251} = -62$

4. **ב.** $a_2 = -4$ **ג.** $S_{100} = 5200$

סדרות כלליות וסדרות נסיגה - פתרונות

1. א.

$T_n: \quad a_1 = 2 \, , \; q = 3 \quad \Rightarrow \quad T_n = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3-1} = 3^n - 1$

$a_n = 5 \cdot 3^n + 3^n - 1 + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a_n = 6 \cdot 3^n}$ **סדרה הנדסית:**

ב.

$a_1 = 6 \cdot 3^1 = 18 \quad ; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6 \cdot 3^{n+1}}{6 \cdot 3^n} = 3 = q \quad \Rightarrow \quad S_n = 18 \cdot \frac{3^n - 1}{3-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_n = 9(3^n - 1)}$

---

2. א.

$a_1 = k \; , \; a_{n+1} = (n+1)(a_n + 1)$

$a_2 = (1+1) \cdot (a_1 + 1) = 2(k+1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a_2 = 2k + 2}$

$a_3 = (2+1) \cdot (a_2 + 1) = 3(2k + 2 + 1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a_3 = 6k + 9}$

ב. (1)

$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n + 1} = \frac{(n+1)(a_n+1)}{a_n + 1} = n + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b_1 = 2}$

(2)

$d_b = b_{n+1} - b_n = (n+2) - (n+1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d_{b_n} = 1}$

ג.

$a_1 + a_2 + a_3 = k + (2k+2) + (6k+9) = 9k + 11$

$S_{11(b)} = \frac{11}{2} \cdot (2 \cdot 2 + 1 \cdot 10) = 77 \quad \Rightarrow \quad 9k + 11 + 39 = 77 \quad \Rightarrow \quad 9k = 27 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k = 3}$

---

3. א. (1)

$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n - 1} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{a_1}{a_1 - 1} \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 = a_1 + \frac{a_1}{a_1 - 1} = -\frac{1}{2} \quad / \cdot 2(a_1 - 1)$

$2a_1(a_1 - 1) + 2a_1 = -(a_1 - 1) \quad \Rightarrow \quad 2a_1^2 - 2a_1 + 2a_1 = -a_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad 2a_1^2 + a_1 - 1 = 0$

$(a_1)_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \; , \; a_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a_1 = \frac{1}{2}} \; , \quad a_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a_2 = -1}$

(2)

$a_3 = \frac{a_2}{a_2 - 1} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = a_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a_3 = a_1} \; (\checkmark)$

ב. המסקנה מסעיף א(1) היא שכל איבר שווה לאיבר שלפני לפניו, כלומר: $a_{n+2} = a_n$

$\frac{1}{2} \, , \, -1 \, , \, \frac{1}{2} \, , \, -1 \, , \, \frac{1}{2} \, , \, -1 \, , \, . \, . \, .$

$S_{251} = 126 \cdot (\frac{1}{2}) + 125 \cdot (-1) = 63 - 125 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{251} = -62}$

לכל כלל יש יוצא מן הכלל, וכלל שאין לו יוצא מן הכלל, הוא יוצא מן הכלל האומר שלכל כלל יש יוצא מן הכלל

טריגונומטריה במרחב

מנסרה - שאלות

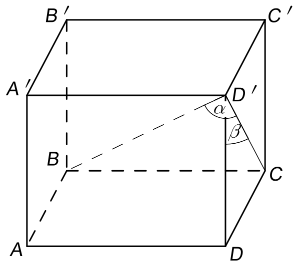
1. (4 יח׳ , קיץ תשנ״א - 91) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$.

CD', אלכסון הפיאה $DCC'D'$, יוצר זווית α

עם אלכסון התיבה BD', ויוצר זווית β עם

הפיאה $ADD'A'$. אורך האלכסון CD' הוא d.

הבע את נפח התיבה באמצעות α , β ו־d. **(55)**



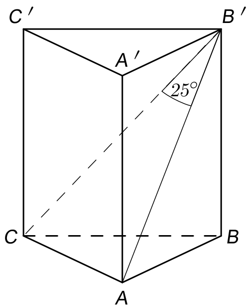
2. (4 יח׳ , חורף תשנ״ה - 95)

בסיסה של מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$

הוא משולש ישר־זווית ושווה־שוקיים.

$\angle BAC = 90^\circ$, $\angle CB'A = 25^\circ$, $AB = AC = 4_{cm}$.

הסבר מדוע CA מאונך ל־ AB', וחשב את נפח המנסרה. **(55)**



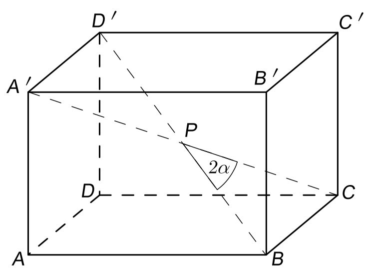
3. (4 יח׳ , קיץ תשנ״ח - 98)

נתונה תיבה ריבועית $ABCDA'B'C'D'$.

אורך צלע הבסיס הוא 10 ס״מ, וזווית

בין אלכסוני התיבה, BD' ו־CA', היא 2α.

הבע את נפח התיבה באמצעות α. **(56)**



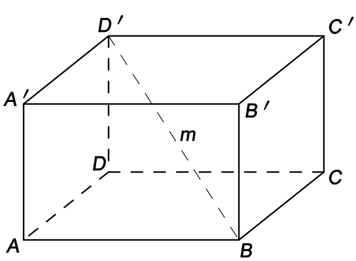
4. (4 יח׳ , קיץ תשס״א - 2001)

נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן $ABCD$.

נתון: $\angle ABD = 30^\circ$, האלכסון $D'B = m$,

הזווית בין האלכסון $D'B$ לבסיס היא 60°.

בטא באמצעות m את נפח התיבה. **(56)**



את המספר הראשוני 2083 ניתן להציג באופן הבא:

$$2083 = \frac{7!-6!-5!-4!-3!-2!-1!-0!}{2}$$

תשובות

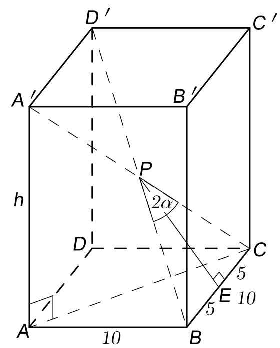
1. $V = \frac{1}{2} d^3 \, tg\, \alpha \sin 2\beta$ (יחידות קוב)

2. $V = 60.71_{cm^3}$

3. $V = \frac{1000}{\sin \alpha} \sqrt{\cos 2\alpha}_{cm^3}$

4. $V = \frac{3m^3}{32}$ (יחידות קוב)

.3



$\angle BPE = \angle CPE = \frac{2\alpha}{2} = \alpha \quad , \quad BE = EC = \frac{10}{2} = 5$

$\underline{\triangle PEC:}\ \ \frac{EC}{PC} = \frac{5}{PC} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad PC = \frac{5}{\sin\alpha}$

$A'C = 2\ PC = \frac{10}{\sin\alpha}$

$\underline{\triangle ABC:}\ \ AC = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$

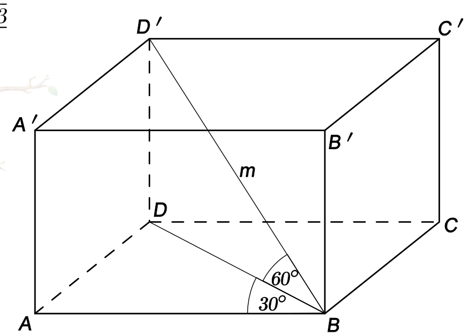
$\underline{\triangle ACA':}\ \ h = AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2}$

$$= \sqrt{\frac{100}{\sin^2\alpha} - 200} = 10\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 2}$$

$h = 10\sqrt{\frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{10}{\sin\alpha}\ \sqrt{1 - 2\sin^2\alpha}$

$V = 10\cdot 10\cdot \frac{10}{\sin\alpha}\ \sqrt{1-2\sin^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V = \frac{1000}{\sin\alpha}\ \sqrt{\cos 2\alpha}}\ \ cm^3$

.4



$\underline{\triangle BDD':}\ \ \frac{DD'}{m} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad DD' = \frac{m\sqrt{3}}{2}$

$\frac{BD}{m} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad BD = \frac{m}{2}$

$\underline{\triangle ABD:}\ \ \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{\frac{m}{2}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

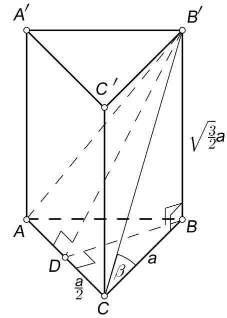
$AB = \frac{m}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m\sqrt{3}}{4}$

$\frac{AD}{BD} = \frac{AD}{\frac{m}{2}} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{m}{4}$

$V = AB\cdot AD\cdot DD' = \frac{m\sqrt{3}}{4}\ \cdot\ \frac{m}{4}\ \cdot\ \frac{m\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V = \frac{3m^3}{32}}$ **(יחידות קוב)**

.5 א. ב״ע: $B'D \perp AC$. הבסיס הוא משולש שווה־צלעות. המנסרה ישרה ⇐ הפאות הצדדיות חופפות.

⇐ אלכסוני הפאות שווים זה לזה.



$\Rightarrow \quad AB' = CB' = \frac{\sqrt{10}}{2}a \quad \Rightarrow \quad AD = DC = \frac{a}{2}$

↑

גובה לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם תיכון

$\underline{\triangle B'DC:}\ \ h = B'D = \sqrt{B'C^2 - DC^2} = \sqrt{\frac{10}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2}$

פיתגורס

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{h = \frac{3}{2}a}$ **(יחידות אורך)**

ג.

$\underline{\triangle B'BC:}\ \ tg\,\beta = \frac{B'B}{BC} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\ a}{a} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\beta = 50.77^\circ}$

טריגונומטריה במרחב - פירמידה - שאלות

1. (4 יח׳ , קיץ תשנ״ב - 92)

בפירמידה משולשת וישרה, SABC, הבסיס ABC הוא משולש שווה־צלעות שאורך צלעו a.

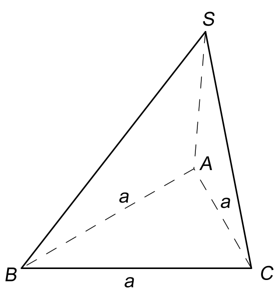
הזווית שבין כל אחד מהמקצועות הצדדיים (SC , SB , SA) לבסיס הפירמידה הוא α .

הבע באמצעות a ו־ α את:

א. גובה הפירמידה (היורד מ־S לבסיס ABC).

ב. הגובה של כל אחת מהפיאות הצדדיות (SAC , SBC , SAB). **(61)**

2. (4 יח׳ , חורף תשנ״ו - 96)



נתונה פירמידה משולשת SABC משוכללת וישרה,

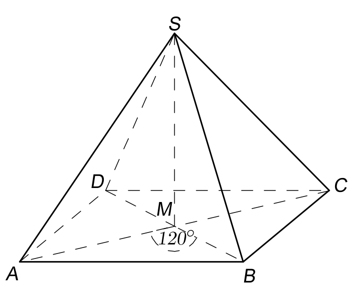
שבסיסה משולש שווה־צלעות.

אורך מקצוע הבסיס הוא a, והמקצועות הצדדיים

מאונכים זה לזה: $\angle BSA = \angle ASC = \angle BSC = 90^\circ$.

חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה. **(61)**

3. (4 יח׳ , חורף תשנ״ז - 97)



הבסיס של פירמידה ישרה SABCD הוא מלבן ABCD.

כל אחד מהמקצועות הצדדיים של הפירמידה יוצר

זווית של 30° עם מישור הבסיס.

הזווית בין אלכסוני המלבן היא של 120°.

גובה הפירמידה הוא 12 ס״מ = SM.

א. חשב את אורך המקצוע AB. **(62)**

4. (4 יח׳ , קיץ תשנ״ז - 97)

ABCDS היא פירמידה משוכללת וישרה שבסיסה - ריבוע.

הזווית בין המקצוע לבסיס היא בת 50° ואורך צלע הבסיס הוא 10_{cm} .

מצא את גודל זווית הראש של הפאה BSC ($\angle BSC$). **(62)**

תשובות

1. א. $H = \frac{a\sqrt{3}\,tg\,\alpha}{3}$ (י״א) **ב.** $SE = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4\,tg^2\alpha + 1}{3}}$ (י״א) **3. א.** $AB = 36_{cm}$

2. 35.26° **4.** $\angle BSC = 54.06^\circ$

טריגונומטריה במרחב - פירמידה - פתרונות

1. א. עָקֵב של גובה הפירמידה (הנקודה H) הוא מפגש האנכים האמצעיים של משולש הבסיס

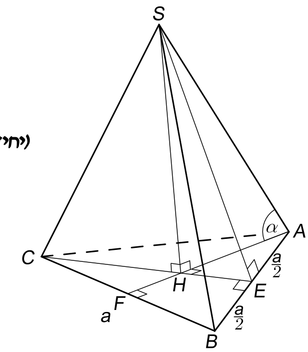
משולש הבסיס הוא שווה־צלעות, ולכן אנכים אמצעיים אלו הם גם תיכונים

נקודת מפגש התיכונים במשולש מחלקת אותם ביחס של $1:2$ - החלק הגדול קרוב לקודקוד

$\triangle AFB: \ \frac{AF}{AB} = \frac{AF}{a} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad AF = \frac{a\sqrt{3}}{2} = CE$

$AH = \frac{2}{3}\cdot AF = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\triangle SHA: \ \frac{SH}{AH} = \frac{SH}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = tg\ \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{SH = \frac{a\sqrt{3}\ tg\ \alpha}{3}}$ **(יחידות אורך)**



ב.

$HE = \frac{1}{3}\cdot CE = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

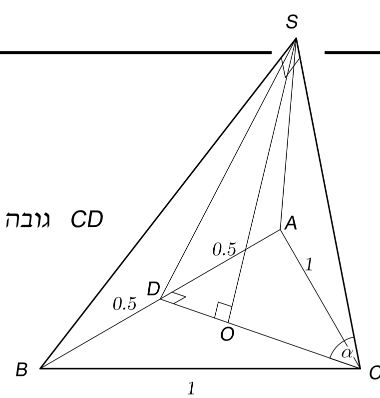
$SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{a^2\ tg^2\alpha}{3} + \frac{a^2}{12}}$

$= \sqrt{\frac{4a^2 tg^2\alpha + a^2}{12}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot\frac{4\ tg^2\alpha + 1}{3}}$

$\mathbf{SE = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{4\ tg^2\alpha+1}{3}}}$ **(יחידות אורך)**

---

2. ללא הגבלת הכלליות: $a = 1$



$SA = SB = SC \quad \Leftarrow$ הפירמידה ישרה

CD גובה ותיכון לבסיס AB במש"צ ($\triangle ABC$):

$AD = DB = \frac{1}{2} = 0.5$

$\angle ABC = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{1} = CD = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

עָקֵב הגובה של הפירמידה (O) הוא מפגש התיכונים של $\triangle ABC$ (שהם גם האנכים האמצעיים).

נקודה זו מחלקת את התיכונים ביחס של $1:2$ כאשר החלק הגדול קרוב לקודקוד:

$OC = \frac{2}{3}\ CD = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

נתון כי הפירמידה ישרה ומשוכללת, וכי המקצועות הצדדיים מאונכים זה לזה.

לכן כל פאה צדדית היא משולש ישר־זווית ושווה־שוקיים $\Leftarrow \quad \angle SBA = 45^\circ$

$\underline{\triangle SDB:}\ \cos 45^\circ = \frac{BD}{SB} = \frac{0.5}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad SB = \frac{0.5\cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (= SC)$

$\underline{\triangle SOC:}\ \cos\alpha = \frac{OC}{SC} = \frac{\sqrt{3}}{3} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{3\cdot\sqrt{2}} = 0.8165 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 35.26^\circ}$

חשבון דיפרנציאלי

פונקציות מעריכיות - שאלות

1. (4 יח׳, קיץ תשנ״ז - 97) נתונה הפונקציה: $y = (2x-5)e^{2x}$.

א. מצא את: **(1)** נקודות החיתוך עם הצירים **(2)** נקודות קיצון **(3)** אסימפטוטות

ב. צייר סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. הסבר מדוע עבור $0 \le k$ הישר $y = k$ פוגש את גרף הפונקציה בנקודה יחידה. **(69)**

2. (4 יח׳, חורף תש״ס - 2000) נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{2x}-1}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הראה שלא קיים x שעבורו הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

ג. הראה שהפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה שלה. **(70)**

3. (4 יח׳, קיץ תשס״א - 2001)

לפונקציה $f(x) = (x^2+kx+1)e^{-x}$ יש ערך קיצון בנקודה שבה $x = 2$.

א. חשב את k.

ב. מצא את נקודת הקיצון הנוספת של הפונקציה, וקבע את סוגי הקיצון לכל אחת מהן. **(70)**

4. (4 יח׳, קיץ תשס״ב - 2002 - מועד ב) לפונקציה $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^k}$ יש קיצון בנקודה שבה $x = 1$.

מצא את: **א.** ערך הפרמטר k **ב.** תחום ההגדרה

ג. נקודות המינימום (הראה שהן כאלה) **(71)**

5. (4 יח׳, חורף תשס״ג - 2003)

לפונקציה: $y = x^2e^{mx}$ יש ערך קיצון בנקודה שבה $x = -1$.

מצא את: **א.** ערך הפרמטר m **ב.** נקודת החיתוך עם ציר x **ג.** נקודות קיצון וסוגן

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה **(71)**

תשובות

1. **א.** **(1)** $(2.5,0)$ $(0,-5)$ **(2)** min $(2,-e^4)$ **(3)** $y=0$

2. **א.** $x \neq 0$

3. **א.** $k=-1$ **ב.** max $(2,\frac{3}{e^2})$, min $(1,\frac{1}{e})$

4. **א.** $k=2$ **ב.** $x \neq 0$ **ג.** min $(\pm 1, e)$

5. **א.** $m=2$ **ב.** $(0,0)$ **ג.** min $(0,0)$, max $(-1,\frac{1}{e^2})$

חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות - פתרונות

1. א. **(1)**

$$y=(2x-5)e^{2x} \quad , \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad y=(-5)\cdot e^{0}=(-5)\cdot 1=-5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(0,-5)}$$

$$y=0 \quad \Rightarrow \quad (2x-5)e^{2x}=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(2.5,0)}$$

(2)

$$y'=2e^{2x}+(2x-5)\cdot e^{2x}\cdot 2=2e^{2x}(1+2x-5)=2e^{2x}(2x-4)=4e^{2x}(x-2)\overset{?}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

$$y''=(4e^{2x}(x-2))'=4\cdot 2e^{2x}(x-2)+1\cdot 4e^{2x}=4e^{2x}[2(x-2)+1]=4e^{2x}(2x-3)$$

$$y''(2)=4e^{2\cdot 2}\cdot(2\cdot 2-3)=4e^{4}>0 \quad \Rightarrow \quad x_{min}=2 \quad \Rightarrow \quad y_{min}=(2\cdot 2-5)e^{4}=-e^{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{min\ (2,-e^{4})}$$

(3)

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-5)e^{2x}=\infty\cdot\infty=\infty \quad \Rightarrow \quad \emptyset$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x-5)e^{2x}=\lim_{x\to-\infty}(-2x-5)e^{2x}=\infty\cdot 0=0$$

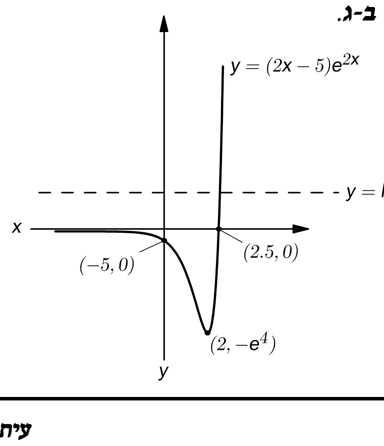
הסבר אינטואיטיבי (עבור $-\infty$): גידול פונקציה מעריכית ב־ $+\infty$ 'מהיר' יותר מבפולינום.

לכן גם ב־ $-\infty$ היא תשאף ל־ 0 'בכח' גדול יותר מאשר הפולינום 'ימשוך' ל־ $\pm\infty$.

מכאן שביטוי כמו שלנו ה־ $e^{-\infty}$ יקבע את הגבול שהוא 0 .

אפשר גם לבדוק במספרים גדולים במחשבון (וכנראה שזה מה שמצופה כאן מהנבחן).

ב-ג.



מהציור ברור כי עבור $k\geq 0$ הקו $y=k$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

בכיוון שמאל הגרף אינו עובר את ציר x בגלל העדר נקודות חיתוך נוספות.

בכיוון ימין אין נקודת חיתוך נוספת היות ואין נקודת קיצון (מקסימום) נוספת שתאפשר ירידה של הפונקציה לערך של k.

עיתונאי שלא למד בכיתה ו

*ב־ 9.7.1996 הופיעה כתבה בעיתון '**הארץ**' שקוננה על מיעוט השערים שהובקעו באליפות המונדיאל באותה שנה, שבה זכתה צרפת. נבחרת צרפת היתה צריכה לכבוש רק 8 שערים בכל המונדיאל, ממוצע של 1.14 שערים למשחק כדי לזכות באליפות.*

כל יבול השערים באותו מונדיאל היה נמוך באופן משמעותי לעומת התחרויות הקודמות.

*כותב המאמר חישב ומצא שכמות השערים באותו מונדיאל היתה נמוכה ב־ **234%** (!!!) בעשרים השנים האחרונות.*

חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות - שאלות

1. (4 יח׳ , קיץ תשנ״א - 91) לפונקציה $y = x^m \ln x$ (m פרמטר) יש נקודת קיצון ב־ $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

א. מצא את m.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. **(83)**

2. (4 יח׳ , קיץ תשנ״ה - 95) נתונה הפונקציה: $y = x \ln x - (a+1)x$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הבע באמצעות a את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x.

ג. הוכח שלכל ערך של a יש לפונקציה נקודת מינימום בנקודה שבה $x = e^a$. **(83)**

3. (4 יח׳ , קיץ תשנ״ח - 98) נתונה הפונקציה $y = \log(x^2 + 2x + 2) - 1$ (לוג בסיס 10).

מצא את: **א.** תחום ההגדרה **ב.** נקודות החיתוך עם ציר x **ג.** תחומי עליה וירידה

(84)

4. (4 יח׳ , קיץ תשנ״ט - 99) נתונה הפונקציה $y = (\ln x)^2 - 2\ln x$.

א. מצא את שתי נקודות החיתוך x_1 ו־x_2 $(x_1 < x_2)$ של גרף הפונקציה עם ציר x.

ב. מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה בתחום $x_1 \le x \le x_2$.

(84)

5. (4 יח׳ , חורף תשס״א - 2001) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$. מ צא את:

א. תחום ההגדרה **ב.** נקודת הקיצון וסוגה **ג.** תחומי עליה וירידה **(85)**

---

132 **הוא המספר הקטן ביותר השווה לסכום כל המספרים בני שתי ספרות**

שניתן להרכיב מספרותיו: $12 + 23 + 31 + 21 + 32 + 13 = 132$

(ספר המספרים / דייוויד וולס - הוצאת מי-אן)

תשובות

1. **א.** $m = 2$ **ב.** $\nearrow: x > \frac{1}{\sqrt{e}}$, $\searrow: 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$, $x > 0$

2. **א.** $x > 0$ **ב.** $(e^{a+1}, 0)$

3. **א.** $\forall x$ **ב.** $(-4,0)$ $(2,0)$ **ג.** $\nearrow: x > -1$, $\searrow: x < -1$

4. **א.** $(e^2, 0)$ $(1,0)$ **ב.** $y_{max} = 0$, $y_{min} = -1$

5. **א.** $(0 < x < 1) \cup (x > 1)$ **ב.** $\min(\sqrt{e}, 2e)$ **ג.** $\nearrow: x > \sqrt{e}$, $\searrow: (0 < x < 1) \cup (1 < x < \sqrt{e})$

חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות - פתרונות

1. א.

$y = x^m \ln x \quad , \quad y'(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 0$

$y' = mx^{m-1} \ln x + x^m \cdot \frac{1}{x} = mx^{m-1} \ln x + x^{m-1} = x^{m-1}(m \ln x + 1)$

$y'(\frac{1}{\sqrt{e}}) = y'(e^{-0.5}) = (e^{-0.5})^{m-1} \cdot (m \ln e^{-0.5} + 1) = e^{0.5-0.5m} \cdot (-0.5m + 1) = 0$

$(1) \quad e^{0.5-0.5m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \emptyset \quad , \quad (2) \quad -0.5m + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m = 2}$

ב.

$y = x^2 \ln x \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x > 0}$

$y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = \boxed{x(2 \ln x + 1)} \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$\Rightarrow \quad \searrow: \ \mathbf{0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}} \quad , \quad \nearrow: \ \mathbf{x > \frac{1}{\sqrt{e}}}$

---

2. א.

$y = x \ln x - (a+1)x \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x > 0}$

ב.

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x \ln x - (a+1)x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(\ln x - a - 1) = 0$

$\underset{\text{תחום הגדרה}}{x > 0} \quad \Rightarrow \quad \ln x - a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = a + 1 \quad \Rightarrow \quad x = e^{a+1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(e^{a+1}, 0)}$

ג.

$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - (a+1) = \ln x + 1 - a - 1 = \ln x - a \overset{?}{=} 0$

$\ln x = a \quad \Rightarrow \quad x = e^a$

$y'' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y''(e^a) = \frac{1}{e^a} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_{min} = e^a} \quad (\checkmark)$

למה לעשות את החיים קלים?

את הזהות הפשוטה והמשעממת $1 + 1 = 2$ ניתן להמיר בזהות שקולה,

אבל הרבה יותר מעניינת:

$\ln\left[\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x\right] + \sin^2 x + \cos^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\cos x| \cdot \sqrt{1 + tg^2 x}}{2^n}$

17. א.

$f(x)=\frac{\ln (x^2)}{x}$

$(x^2>0)\cap(x\neq 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x\neq 0}$

ב.

$y=0 \quad \Rightarrow \quad \ln x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=e^0=1 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(\pm 1,0)}$

ג.

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x\cdot x-1\cdot \ln x^2}{x^2}=\frac{2-\ln x^2}{x^2}\overset{?}{=}0 \quad \Rightarrow \quad 2-\ln x^2=0$

$\Rightarrow \quad \ln x^2=2 \quad \Rightarrow \quad e^2=x^2 \quad \Rightarrow \quad x=\pm e$

מכנה הנגזרת בנקודות החשודות חיובי. לכן, כדי לבדוק את סימן הנגזרת השניה באותן נקודות, מספיק לבדוק את סימן הנגזרת של מונה הנגזרת הראשונה באותן נקודות:

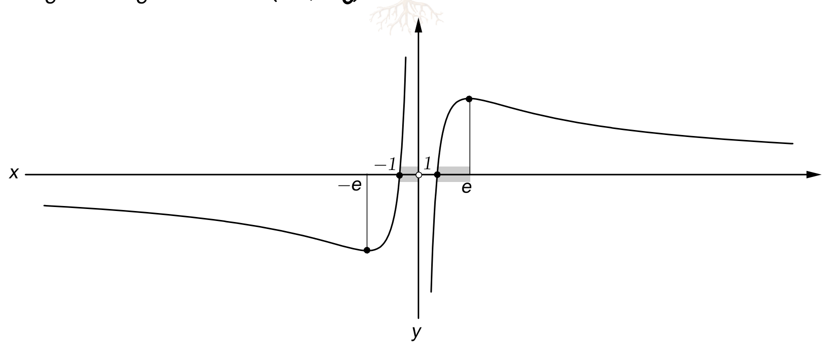
$(2-\ln x^2)'=-\frac{1}{x^2}\cdot 2x=-\frac{2}{x} \quad , \quad -\frac{2}{e}<0 \quad \Rightarrow \quad f''(e)<0 \quad \Rightarrow \quad x_{max}=e$

$-\frac{2}{-e}>0 \quad \Rightarrow \quad f''(-e)>0 \quad \Rightarrow \quad x_{min}=-e$

$f(e)=\frac{\ln e^2}{e}=\frac{2}{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{max\ (e,\frac{2}{e})}$

$f(-e)=\frac{\ln (-e)^2}{-e}=-\frac{2}{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{min\ (-e,-\frac{2}{e})}$

ד.



לפונקציה שתי אסימפטוטות: $y=0$ ו־ $x=0$ (לא נדרש, אבל מתבקש).

ה. הנגזרת חיובית בתחומים בהם הפונקציה עולה:

$\underline{f(x)>0:}\ \ (-1<x<0)\cup(x>1)$

$\underline{f'(x)>0:}\ \ (-e<x<0)\cup(0<x<e)$

$\Big((-1<x<0)\cup(x>1)\Big)\cap\Big((-e<x<0)\cup(0<x<e)\Big) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(-1<x<0)\cup(1<x<e)}$

(באמת יותר נח לראות זאת בציור. התחום מסומן באפור.)

חשבון דיפרנציאלי - פונקציות טריגונומטריות - שאלות

1. (004 , קיץ ס"ד - 2004 , מועד א) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 + \sin 3x$ בתחום $0 \le x \le \pi$

א. האם לפונקציה יש נקודות חיתוך עם ציר x ? נמק.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון, וקבע את סוגן. **(102)**

2. (004 , קיץ ס"ד - 2004 , מועד ב) נתונה הפונקציה: $f(x) = x - \sin 2x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

א. מצא בתחום הנתון את שיעורי x של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. מצא את משוואות הישרים המשיקים לפונקציה בנקודות הקיצון שלה בתחום הנתון. **(102)**

3. (004 , קיץ ס"ה - 2005 , מועד א) נתונה הפונקציה $f(x) = \cos 2x + a \sin x$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$ הוא $\sqrt{3}$.

א. מצא את a.

ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה בתחום $0 \le x \le 2\pi$, וקבע את סוגן. **(103)**

4. (004 , קיץ ס"ה - 2005 , מועד ב) נתונה הפונקציה $y = 2 - 4 \sin 2x$ בתחום $0 < x < \pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של שתי נקודות הקיצון בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ג. העבירו משיקים לגרף הפונקציה בנקודות הקיצון שמצאת בסעיף ב'.

מצא את המרחק בין המשיקים. **(103)**

5. (004 , חורף ס"ו - 2006) נתונה הפונקציה $y = 1 - 2\cos 2x$ בתחום $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{2\pi}{3}$.

בתחום הנתון: **א.** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה. **(104)**

תשובות

1. **א.** לא **ב.** $min: (\pi, 2)$, $max: (\frac{5\pi}{6}, 3)$, $min: (\frac{\pi}{2}, 1)$, $max: (\frac{\pi}{6}, 3)$, $min: (0, 2)$

2. **א.** $x_{min} = \frac{\pi}{6}$, $x_{max} = -\frac{\pi}{6}$ **ב.** $\underline{x = \frac{\pi}{6}}: y = -0.3424$, $\underline{x = -\frac{\pi}{6}}: y = 0.3424$

3. **א.** $a = 4$ **ב.** $max_{ab.}: (\frac{\pi}{2}, 3)$, $min_{ab.}: (\frac{3\pi}{2}, -5)$

4. **א.** $(\frac{5\pi}{12}, 0)$, $(\frac{\pi}{12}, 0)$ **ב.** $max: (\frac{3\pi}{4}, 6)$, $min: (\frac{\pi}{4}, -2)$ **ג.** $d = 8$ (יחידות אורך)

5. **א.** $(\frac{\pi}{6}, 0)$ $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ **ב.** $(\frac{\pi}{2}, 3)\ max_{abs.}$, $(0, -1)\ min_{abs.}$

ג. $\underline{\nearrow}: 0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\underline{\searrow}: (-\frac{\pi}{6} < x < 0) \cup (\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3})$

9. א.

$f(x) = \sin 2x - 2\cos x \ , \quad 0 \le x \le 2\pi$

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 - 2\cdot 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(0, -2)}$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin x \cos x - 2\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos x\,(\sin x - 1) = 0$

$(1)\ \ \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2}\ ,\ x_2 = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(\frac{\pi}{2}, 0)\ \ (\frac{3\pi}{2}, 0)}$

$(2)\ \ \sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2}$

ב.

$f'(x) = 2\cos 2x + 2\sin x \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(x) = 2\,(1 - 2\sin^2 x + \sin x)} \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow \quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$(\sin x)_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \quad \Rightarrow \quad (1)\ \ \sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2}$

$(2)\ \ \sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{11}{6}\pi$

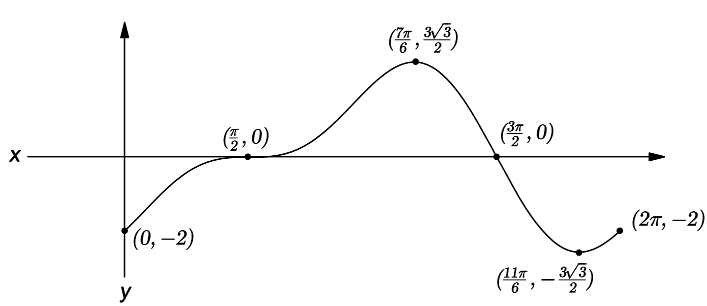
$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{7\pi}{6}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
f'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	min	↗	infl.	↗	max	↘	min	↗	max

$f(2\pi) = 0 - 2 = -2 \quad , \quad f(\frac{7\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad , \quad f(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ **$\min_{ep.}$: $(0, -2)$, max : $(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$, min : $(\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$, $\max_{ep}$: $(2\pi, -2)$**

ג.



17. א. $y = \cos^2 x - a\cos x \;,\; y'(\frac{\pi}{3}) = 0 \;,\; y''(\frac{\pi}{3}) > 0 \;,\; 0 \le x \le 2\pi$

$y' = 2\cos x\,(-\sin x) - a(-\sin x) = a\sin x - 2\sin x\cos x$

$y'(\frac{\pi}{3}) = a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{a = 1}$

ב.

$\mathbf{y = \cos^2 x - \cos x}$

$y' = \sin x - 2\sin x\cos x = \sin x - \sin 2x \overset{?}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad \sin x = \sin 2x$

$(1)\;\; x = 2x + 2\pi k \quad\Rightarrow\quad x = 2\pi k \quad\Rightarrow\quad x = 0 \;,\; 2\pi$

$(2)\;\; x = \pi - 2x + 2\pi k \quad\Rightarrow\quad 3x = \pi + 2\pi k \quad\Rightarrow\quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{\pi}{3} \;,\; \pi \;,\; \frac{5\pi}{3}$

$\boxed{y' = \sin x\,(1 - 2\cos x)}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
y'	0	$+- = -$	0	$++ = +$	0	$-+ = -$	0	$-- = +$	0
y	max	↘	min	↗	max	↘	min	↗	max

$y(0) = 1 - 1 = 0 \;,\; y(\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$y(\pi) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2 \;,\; y(\frac{5\pi}{3}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\quad \mathbf{max\,(0,0)\;,\; min\,(\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{4})\;,\; max\,(\pi, 2)\;,\; min\,(\frac{5\pi}{3}, -\frac{1}{4})\;,\; max\,(2\pi, 0)}$

ג.

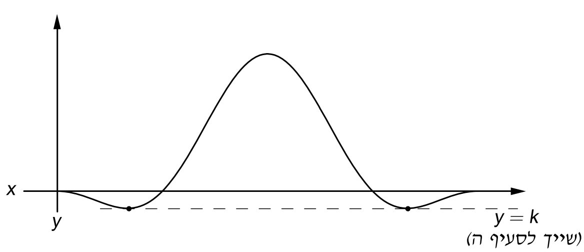
$x = 0 \quad\Rightarrow\quad y = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{(0,0)}$

$y = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos x\,(\cos x - 1) = 0$

$\Rightarrow\quad (1)\;\; \cos x = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad\Rightarrow\quad x = \frac{\pi}{2} \;,\; \frac{3\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{(\frac{\pi}{2}, 0)\;,\; (\frac{3\pi}{2}, 0)}$

$(2)\;\; \cos x = 1 \quad\Rightarrow\quad x = 2\pi k \quad\Rightarrow\quad x = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{(0,0)\;,\; (2\pi, 0)}$

ד.



ה. $\mathbf{k = -\frac{1}{4}}$.

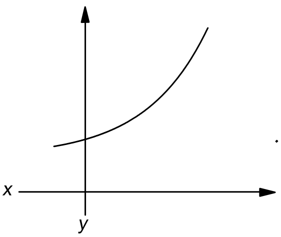
ראה ציור בסעיף הקודם. הקו המקווקו חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בלבד.

מצב זה מתקיים, עבור $k < 0$ רק בנקודות המינימום המסומנות לעיל.

<u>הערה:</u> הנתון כי ב־ $x = \frac{\pi}{3}$ יש מינימום מיותר. ניתן להסתפק בעובדה שיש שם קיצון.

חשבון אינטגרלי

פונקציות מעריכיות - שאלות



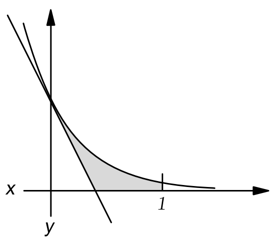
1. (4 יח׳, קיץ תש״ן - 90)

נתונה הפונקציה $y = 2 + e^x$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x = 1$.

ב. חשב את השטח המוגבל על־ידי גרף הפונקציה,

על־ידי המשיק ועל־ידי ציר y. **(132)**

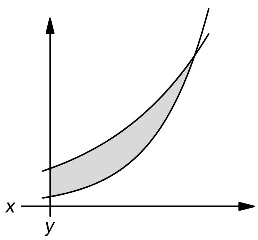


2. (4 יח׳, חורף תשנ״ד - 94)

מצא את השטח המוגבל על־ידי הפונקציה $f(x) = e^{-3x}$,

על־ידי הישר המשיק לגרף בנקודה שבה $x = 0$,

על־ידי ציר x ועל־ידי הישר שמשוואתו $x = 1$. **(132)**

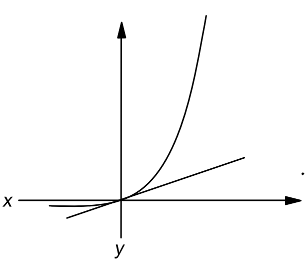


3. (קיץ תשנ״ה - 95)

נתונות הפונקציות: $f(x) = 4^x$, $g(x) = 4 \cdot 2^x$.

מצא את השטח המוגבל על־ידי הגרפים של שתי הפונקציות

ועל־ידי ציר y. **(133)**



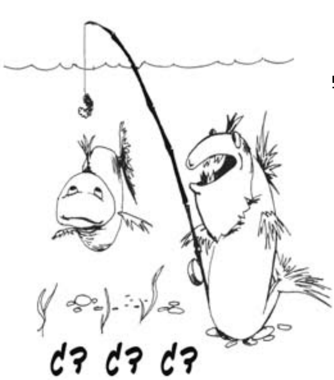
4. (4 יח׳, חורף תשנ״ו - 96)

נתונה הפונקציה $y = e^{2x} - e^x$.

א. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.

ב. חשב את השטח המוגבל על־ידי גרף הפונקציה,

על־ידי המשיק ועל־ידי הישר $x = 1$. **(133)**



תשובות

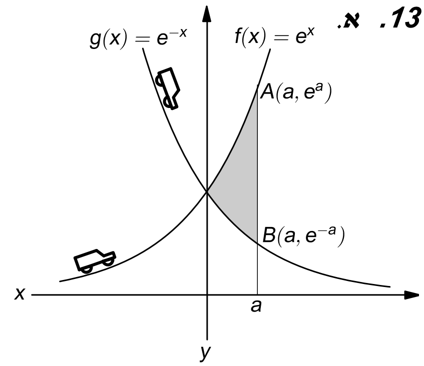
1. **א.** $y = ex + 2$ **ב.** $S = \frac{e}{2} - 1 = 0.36$ (יחידות ריבועיות)

2. $S = \frac{1}{6} - \frac{1}{3e^3} = 0.15$ (יחידות ריבועיות)

3. $S = \frac{9}{\ln 4} = 6.49$ (יחידות ריבועיות)

4. **א.** $y = x$ **ב.** $S = \frac{e^2}{2} - e = 0.9762$ (יחידות ריבועיות)

13. א.



הפונקציה $f(x) = e^{x}$ עולה בכל תחום הגדרתה.

הפונקציה $g(x) = e^{-x}$ יורדת בכל תחום הגדרתה.

הן נפגשות על ציר y: $e^{0} = e^{-0} = 1$

$\underline{AB:}\ x_A = x_B \Rightarrow AB = y_A - y_B = e^{a} - e^{-a} = 1.5$

$e^{a} - \frac{1}{e^{a}} - \frac{3}{2} = 0 \quad /\cdot 2e^{a} \quad \Rightarrow \quad 2(e^{a})^{2} - 3e^{a} - 2 = 0$

$(e^{a})_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow (e^{a})_{1} = 2 \Rightarrow \ln e^{a} = \ln 2 \Rightarrow \mathbf{a = \ln 2}$

$(e^{a})_{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \emptyset \Leftarrow e^{x} > 0 \quad \forall x$

ב.

$a = \ln 3 \Rightarrow S = \int_{0}^{\ln 3} (e^{x} - e^{-x})\,dx = (e^{x} + e^{-x})\Big|_{0}^{\ln 3}$

$S = (e^{\ln 3} + \underline{e^{-\ln 3}}) - (e^{0} + e^{0})$

$\underline{e^{-\ln 3}} = e^{\ln 3^{-1}} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow S = (3 + \frac{1}{3}) - (1 + 1) \Rightarrow \mathbf{S = 1\frac{1}{3}}$ **(יחידות ריבועיות)**

---

14. א.

$f(x) = e^{\frac{x+1}{2}} \quad , \quad f'(x_A) = \frac{e^{2}}{2}$

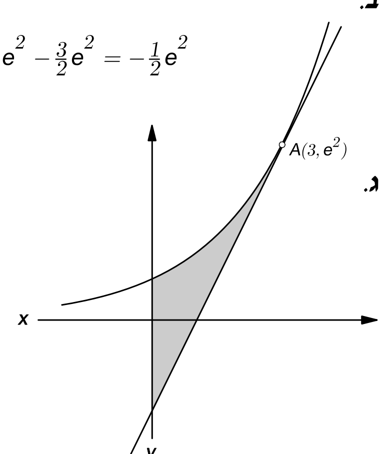
$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x+1}{2}} \overset{?}{=} \frac{e^{2}}{2} \Rightarrow \frac{x+1}{2} = 2 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$

$f(3) = e^{\frac{3+1}{2}} = e^{2} \Rightarrow \mathbf{A(3, e^{2})}$

ב.

$y = \frac{e^{2}}{2} x + n \quad , \quad A(3, e^{2}) \Rightarrow e^{2} = \frac{e^{2}}{2} \cdot 3 + n \Rightarrow n = e^{2} - \frac{3}{2} e^{2} = -\frac{1}{2} e^{2}$

$\Rightarrow \mathbf{y = \frac{e^{2}}{2} x - \frac{e^{2}}{2}}$



ג.

$S = \int_{0}^{3} (e^{\frac{x+1}{2}} - (\frac{e^{2}}{2} x - \frac{e^{2}}{2}))\,dx = (2\,e^{\frac{x+1}{2}} - \frac{e^{2}}{4} x^{2} + \frac{e^{2}}{2} x)\Big|_{0}^{3}$

$= (2e^{2} - \frac{9}{4} e^{2} + \frac{3}{2} e^{2}) - (2\,e^{\frac{1}{2}} - 0 + 0)$

$\Rightarrow \mathbf{S = \frac{5}{4}\,e^{2} - 2\sqrt{e} = 5.94}$ **(יחידות ריבועיות)**

1213 הוא המספר הראשוני הקטן ביותר, שיש לו ארבע ספרות ומורכב ממספרים עוקבים (12 ו־ 13)

חשבון אינטגרלי - פונקציות שפתרונן לוגריתמי - שאלות

1. (4 יח׳ , קיץ תשס״ב - 2002 - מועד ב׳)

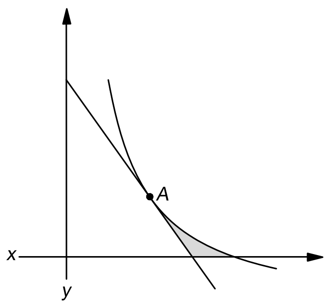
נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{x}-1$ בתחום $x>0$.

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $A(2,1)$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על־ידי גרף הפונקציות,

על־ידי המשיק, ועל־ידי ציר x. **(152)**

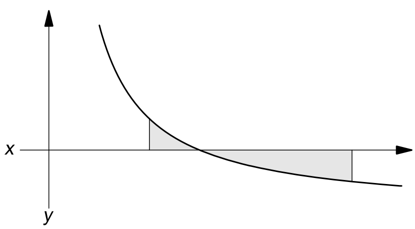


2. (004 , קיץ ס״ד - 2004 , מועד א)

נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{3}{x}-1$ בתחום $x>0$.

חשב את השטח המוגבל ע״י:

גרף הפונקציה, ציר x, והישרים $x=2$ ו־$x=6$. **(152)**



3. (004 , קיץ ס״ד - 2004 , מועד ב)

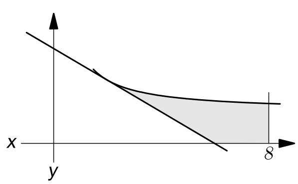
נתונה הפונקציה: $y=\frac{2}{x}+1$.

העבירו משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק, על ידי ציר x, ועל ידי הישר $x=8$. **(153)**



4. (004 , סתיו תשע״ב - 2011 , לוחמים) ראה עמ׳ 82 , שאלה 19 .

ה. אין קשר לסעיפים הקודמים:

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $y=\frac{3}{2x-1}$.

על ידי ציר x ועל ידי הישרים $x=1$ ו־ $x=2$. **(153)**

תשובות

1. **א.** $y=-x+3$ **ב.** $S=\ln 16-2.5=0.2726$ (י״ר)

2. $S=2+\ln\frac{27}{64}=1.137$ (יחידות ריבועיות)

3. **א.** $y=-\frac{1}{2}x+3$ **ב.** $S=2+\ln 16=4.7726$ (יחידות ריבועיות)

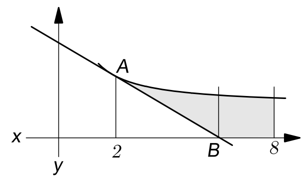
4. **ה.** $S=1.5\ln 3=1.65$ (יחידות ריבועיות)

.3 א. $y=\frac{2}{x}+1\ ,\ x_A=2\ ;\ y_{AB}=?$

$y'=-\frac{2}{x^2}\quad\Rightarrow\quad y'(2)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\ ;\ y(2)=\frac{2}{2}+1=2$

$y-2=-\frac{1}{2}(x-2)\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{y_{AB}=-\frac{1}{2}x+3}$

ב.



$S=?\ ;\ y_B=0\quad\Rightarrow\quad 0=-\frac{1}{2}x_B+3\quad\Rightarrow\quad x_B=6$

$$S=\int_2^6\left(\left(\frac{2}{x}+1\right)-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\right)dx+\int_6^8\left(\frac{2}{x}+1\right)dx$$

$$S=\left(2\ln|x|+\frac{x^2}{4}-2x\right)\Bigg|_2^6+\left(2\ln|x|+x\right)\Bigg|_6^8$$

$$=((2\ln 6+9-12)-(2\ln 2+1-4))+((2\ln 8+8)-(2\ln 6+6))$$

$$=2-2\ln 2+2\ln 8=2+\ln\frac{8^2}{2^2}=2+\ln 16$$

$\Rightarrow\quad \boldsymbol{S=2+\ln 16=4.7726}$ **(יחידות ריבועיות)**

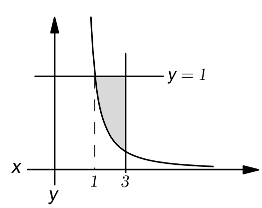
.4 ה. הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=\frac{1}{2}$, אין לה נקודות קיצון, רציפה בתחום $1\le x\le 2$,
מתקיים: $y(1)>0\ ,\ y(2)>0$. לכן כל השטח מעל ציר x :

$$S=\int_1^2\frac{3}{2x-1}\,dx=\frac{3}{2}\ln|2x-1|\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}(\ln 3-\ln 1)=\frac{3}{2}(\ln 3-0)$$

$\Rightarrow\quad \boldsymbol{S=1.5\ln 3=1.65}$ **(יחידות ריבועיות)**

.5

$y=1\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2x-1}=1\quad\Rightarrow\quad 2x-1=1\quad\Rightarrow\quad x=1$



$$S=\int_1^3\left(1-\frac{1}{2x-1}\right)dx=\left(x-\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right)\Bigg|_1^3$$

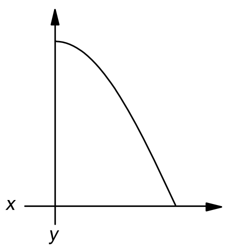
$$=\left(3-\frac{1}{2}\ln 5\right)-\left(1-\frac{1}{2}\ln 1\right)$$

$$=3-\frac{1}{2}\ln 5-1+\frac{1}{2}\cdot 0$$

$\Rightarrow\quad \boldsymbol{S=2-\frac{\ln 5}{2}=1.1953}$ **(יחידות ריבועיות)**

העולם היום כל כך שונה ממה שהיה פעם
אפילו הנוסטלגיה – זה לא מה שהיה פעם . . .

חשבון אינטגרלי - פונקציות טריגונומטריות - שאלות



.1 (004 , חורף ס״ה - 2005)

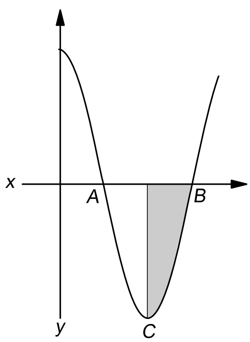
נתונה הפונקציה: $y = \cos 2x$ בתחום: $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק, ועל ידי ציר y. **(175)**



.2 (004 , קיץ ס״ו - 2006 , מועד א)

בציור שלפניך מתואר הגרף של הפונקציה

$y = 3\cos 3x$ בתחום $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$.

נקודות A ו־B הן נקודות החיתוך של הגרף עם ציר x,

ונקודה C היא נקודת מינימום של הפונקציה.

מצא את שיעורי הנקודות: **א.** B **ב.** C.

ג. מהנקודה C הורידו אנך לציר x. חשב את השטח המוגבל

על ידי האנך, ע״י גרף הפונקציה וע״י ציר x. **(175)**

.3 (004 , קיץ ס״ז - 2007 , מועד א)

נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 3 - b\sin 3x$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$.

משוואת המשיק היא $y = -3x + 2\pi$.

א. מצא את הערך של הפרמטר b.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את שיעורי x של נקודות הקיצון של $f(x)$ בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$

וקבע את סוגן. **(176)**

הערך המוחלט של הפולינום $3n^3 - 183n^2 + 3318n - 18757$ **מציג מספר ראשוני לכל** $0 \le n \le 46$

תשובות

.1 א. $y = -2x + \frac{\pi}{2}$ **ב.** $S = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = 0.1169$ (יחידות ריבועיות)

.2 א. $B(\frac{\pi}{2}, 0)$ **ב.** $C(\frac{\pi}{3}, -3)$ **ג.** $S = 1$ (יחידה ריבועית)

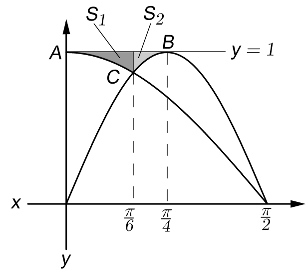
.3 א. $b = 6$ **ב.** $f(x) = 3x + 2\cos 3x + \pi$ **ג.** $x_{min} = \frac{5\pi}{18}$, $x_{max} = \frac{\pi}{18}$

16. נמצא את נקודות החיתוך בין הישר $y=1$ לכל אחת מהפונקציות:

$f(x)=\cos x=1 \quad \Rightarrow \quad x=2\pi k \quad \Rightarrow \quad x=0 \ \ (A)$

$g(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x=1 \quad \Rightarrow \quad 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ \ /:2$

$\Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{4} \ \ (B)$



$\underline{x_C}$: $\cos x=2\sin x\cos x \quad \Rightarrow \quad \cos x\,(2\sin x-1)=0$

$(1)\ \ \cos x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}$

$(2)\ \ 2\sin x=1 \quad \Rightarrow \quad \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$(2_1)\ \ x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{6}$

$(2_2)\ \ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k \quad \Rightarrow \quad \emptyset \quad \Rightarrow \quad x_C=\frac{\pi}{6}$

$$S=S_1+S_2=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin 2x)\,dx=(x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+(x+\tfrac{1}{2}\cos 2x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$S=\left((\tfrac{\pi}{6}-\tfrac{1}{2})-(0-0)\right)+\left((\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\cdot 0)-(\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2})\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}=0.0354}$$ **(יחידה ריבועית)**

---

17. א.

$f(x)=\sin ax \ , \ \ 0\le x\le\frac{2\pi}{3} \ , \ \ 0<a<9 \ , \ \ f'(\frac{\pi}{6})=0$

$f'(x)=a\cos ax \quad \Rightarrow \quad f'(\frac{\pi}{6})=a\cdot\cos\frac{a\pi}{6}=0 \ , \ \ a\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a\pi}{6}=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a=3}$

ב.

$\mathbf{f(x)=\sin 3x} \ , \ \ f'(x)=3\cos 3x \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 3x=0 \quad \Rightarrow \quad 3x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}$

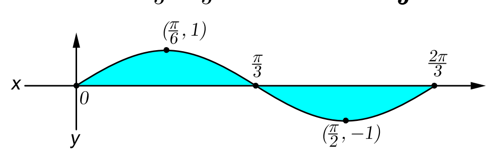
$f(0)=0 \ , \ \ f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{2}=1 \ , \ \ f(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{3\pi}{2}=-1 \ , \ \ f(\frac{2\pi}{3})=\sin 2\pi=0$

$\Rightarrow$ **abs.min** $\mathbf{(\frac{\pi}{2},-1)}$, **abs.max** $\mathbf{(\frac{\pi}{6},1)}$

ג.

$\sin 3x=0 \quad \Rightarrow \quad 3x=k\pi \quad \Rightarrow \quad x=\frac{k\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x=0\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(0,0)\ ,\ (\frac{\pi}{3},0)\ ,\ (\frac{2\pi}{3},0)}$

ד.



ה.

$$S\overset{*}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\,dx=-2\cdot\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{2}{3}(-1-1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S=\frac{4}{3}}$$ **(יחידה ריבועית)**

(*) בגלל הסימטריה סביב $x=\frac{\pi}{3}$: $f(\frac{\pi}{3}-x)=-f(\frac{\pi}{3}+x)$:

$\sin(3(\frac{\pi}{3}-x))=-\sin(3(\frac{\pi}{3}+x)) \iff \sin(\pi-3x)+\sin(\pi+3x)=0$

$\iff 2\sin\pi\cos 3x=0 \ , \ \ \sin\pi=0 \quad \Rightarrow \quad \checkmark$

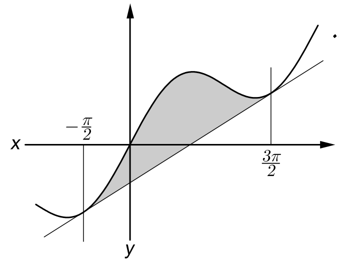
(אפשר, כמובן, גם בלי זה: לחשב כל שטח בנפרד ולסכום אותם.)

18. א.

$f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x \ , \ \ y = \frac{1}{2}x - 1 \ , \ \ -\pi \le x \le 2\pi$

$\frac{1}{2}x + \sin x = \frac{1}{2}x - 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\Rightarrow \ \ \mathbf{x_1 = -\frac{\pi}{2} \ , \ x_2 = \frac{3\pi}{2}}$



ב.

מספיק להראות ששיפוע הישר $m = \frac{1}{2}$ שווה לנגזרת הפונקציה באותן נקודות:

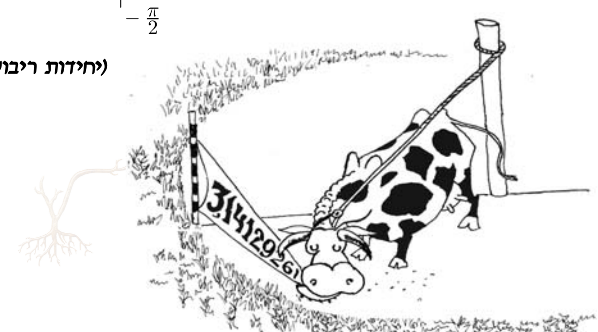
$f'(x) = \frac{1}{2} + \cos x \ , \ \ \underline{x = -\frac{\pi}{2}:} \ \ f'(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f'(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} = m} \ \ (\checkmark)$

$\underline{x = \frac{3\pi}{2}:} \quad f'(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f'(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2} = m} \ \ (\checkmark)$

ג.

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left((\tfrac{1}{2}x + \sin x) - (\tfrac{1}{2}x - 1) \right) dx = (-\cos x + x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$S = (0 + \frac{3\pi}{2}) - (0 - \frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S = 2\pi}$ **(יחידות ריבועיות)**



פָּלִינדרום

'פָּלִינדרוֹם' הוא מחרוזת תווים שניתן לקוראה ישר והפוך (מימין לשמאל ומשמאל לימין) ללא הבדל.

מקור השם ביוון: palin – שוב, dromos – ריצה. לדוגמה: '1234321'.

כמו שיש פלינדרומים מספריים, כך יש גם פלינדרומים מילוליים, כמו: 'דוד', 'סוס', 'היפיפיה'.

ב־1948 פִּרסם **Leigh Mercer** פלינדרום מבריק שחיבר **O.V. Michaelsen** ,

לכבוד הפרוייקט של תעלת פנמה: 'A man, A plan, A canal, Panama'

תעלת פנמה נבנתה בין השנים 1880–1914 , אחד מפלאי ההנדסה. נמצאת במרכז יבשת אמריקה, אורכה 81_{km}

והיא מחברת בין שני אוקינוסים: השקט והאטלנטי.

רבי אברהם אבן עזרא (1093–1167) מחכמי ספרד, פרשן תנ"ך, משורר, מדקדק, פילוסוף, אסטרונום ומתמטיקאי)

מתאר בדו־שיח פלינדרומי בין כנסת ישראל לאבינו שבשמים את הכמיהה לגאולה ואת הבשורה שבדרך:

– 'אבי, א–ל חי שמך, למה מלך משיח לא יבא?'

– 'דעו מאביכם, כי לא בוש אבוש. שוב אשוב אליכם כי בא מועד'.

קִראו כל משפט בדו־שיח מהסוף להתחלה ותיווכחו שהוא אכן פלינדרום.

19. א. צ"ל: $y=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. $f(x)=\sin x+\cos 2x \;,\; \frac{\pi}{2}\le x\le 2\pi$

$f(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi=1+(-1) \Rightarrow \mathbf{f(\frac{\pi}{2})=0}\;(\checkmark)$

$f(\frac{7\pi}{6})=\sin\frac{7\pi}{6}+\cos\frac{7\pi}{3}=\sin(\pi-\frac{7\pi}{6})+\cos\frac{\pi}{3}=\sin(-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{f(\frac{7\pi}{6})=0}\;(\checkmark)$

$f(\frac{11\pi}{6})=\sin\frac{11\pi}{6}+\cos\frac{11\pi}{3}=\sin(\pi-\frac{11\pi}{6})+\cos\frac{5\pi}{3}=\sin(-\frac{5\pi}{6})-\cos(\pi-\frac{5\pi}{3})$

$=-\frac{1}{2}-\cos(-\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2}) \Rightarrow \mathbf{f(\frac{11\pi}{6})=0}\;(\checkmark)$

ב.

$f'(x)=\cos x-2\sin 2x=\cos x-4\sin x\cos x \Rightarrow \boxed{f'(x)=\cos x\,(1-4\sin x)} \overset{?}{=} 0$

$(1)\;\; \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{2}\;,\; x_2=\frac{3\pi}{2}$

$(2)\;\; \sin x=\frac{1}{4}=\sin 0.2527_{rad.} \Rightarrow x=0.2527+2\pi k \Rightarrow \emptyset$

$x=\pi-0.2527+2\pi k=2.8889+2\pi k \Rightarrow x_3=2.89$

x	$\frac{\pi}{2}$		2.89		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'	0	$--=+$	0	$-+=-$	0	$++=+$	
y	$min_{ep.}$	↗	max	↘	min	↗	$max_{ep.}$

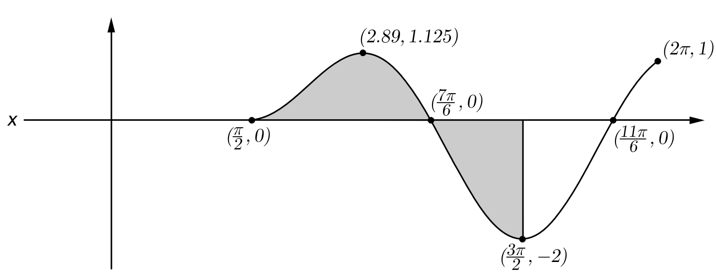
(ep. = end point)

$f(2.89)=0.25+0.875=1.125 \;,\; f(\frac{3\pi}{2})=-1+(-1)=-2 \;,\; f(2\pi)=0+1=1$

$\Rightarrow$ **$min_{ep.}\,(\frac{\pi}{2}\,,\,0)$, $max\,(2.89\,,\,1.125)$, $min\,(\frac{3\pi}{2}\,,\,-2)$, $max_{ep.}\,(2\pi\,,\,1)$**

↗: $(\frac{\pi}{2}<x<2.89)\cup(\frac{3\pi}{2}<x<2\pi)$, ↘: $2.89<x<\frac{3\pi}{2}$

ג. (סימון השטח לטובת סעיף ד.)



ד.

הפיכת גבולות האינטגרציה לנטרול שליליות השטח

$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}}(\sin x+\cos 2x)\,dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}}(\sin x+\cos 2x)\,dx$

$=(-\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}}+(-\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}}$

$S=\Big((\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})-(0+0)\Big)+\Big((\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})-(0+0)\Big) \Rightarrow \mathbf{S=\frac{3\sqrt{3}}{2}=2.6}$ **(יחידות ריבועיות)**

מבנה מבחן הבגרות לשאלון 805

שאלון ד׳ (35804) מהווה 65% מהציון הסופי.

שאלון ה׳ (35805) מהווה 35% מהציון הסופי.

משך זמן המבחן: שעה ושלושה רבעים.

פרק א - בחירה: שאלה אחת מתוך שתי שאלות.

סדרות, טריגונומטריה במרחב.

פרק ב - בחירה: שתי שאלות מתוך 3 שאלות.

בעיות גדילה ודעיכה, חדו״א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות חזקה (עם מעריך רציונלי), פונקציות מעריכיות, פונקציות לוגריתמיות.

הערה חשובה:

מבנה זה מיושם החל ממועד חורף תשע״ג, ולכן מבנה כל המבחנים עד מועד זה המובאים בפרק זה, שונים מהמבנה לעיל.

מגדל של פלינדרומים ראשוניים

2

30203

133020331

1713302033171

12171330203317121

151217133020331712151

1815121713302033171215181

16181512171330203317121518161

331618151217133020331712151816133

9333161815121713302033171215181613339

11933316181512171330203317121518161333911

(**Garland Lee Honaker**, מרצה למתמטיקה בוירג׳יניה, ארה״ב)

לא ידוע אם יש אינסוף פלינדרומים ראשוניים.

מבחן 27 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד ב

בחירה: שלוש שאלות: שאלה אחת מהשאלות 1-2 , שתי שאלות מהשאלות 3-5 .

פרק ראשון - סדרות, טריגונומטריה במרחב

סדרות

1. נתונה סדרה המקיימת את הכלל $a_{n+1} = a_n - 4$ לכל n טבעי.

האיבר השלישי בסדרה הוא 12 .

א. מצא את האיבר הראשון.

בסדרה זו 71 איברים.

ב. חשב את הסכום של 10 האיברים האחרונים בסדרה.

ג. מצא את האיבר האמצעי בסדרה.

טריגונומטריה במרחב

2. נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$.

בסיס המנסרה ABC הוא משולש

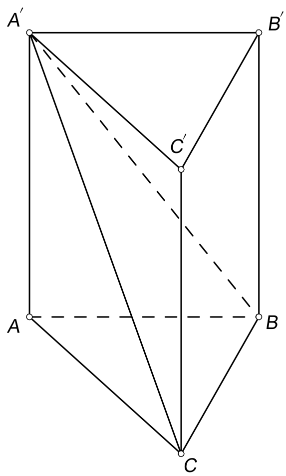
שווה־שוקיים $(AB = AC)$.

זווית הראש של המשולש ABC היא 54° .

האורך של בסיס המשולש הוא $7cm$.

הזווית בין האלכסון $A'C$

ובין בסיס המנסרה ABC היא 65° .



א. חשב את שטח הפאה $ACC'A'$.

ב. חשב את הזווית בין הגובה לצלע BC במשולש $CA'B$ ובין בסיס המנסרה ABC .

ספרטנים

כשפיליפוס מלך מוקדון (המאה הרביעית לפנה"ס) ערך מסע ביוון, הוא שלח אולטימטום לספרטה, ואיים: "אם אפלוש לביתכם, אני אשמיד הכל, כך שלא תוכלו להתאושש ולקום שנית".

במכתב תשובה ששלחו לו הספרטנים היתה מילה אחת: "אם" . . .

כשהפרסים דרשו מהספרטנים למסור את נשקם לאות כניעה, הם ענו להם: "בואו וקחו אותו" . . .

תשובות

1. א. $a_1 = 20$ **ב.** $S = -2420$ **ג.** $a_{36} = -120$

2. א. $S = 127.45$ (סמ"ר) **ב.** 67.43°

פרק שני - גדילה ודעיכה, חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה

3. נתונה הפונקציה $f(x) = 3 - \sin^2 x - \cos x$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. **(1)** על־פי הגרף שסרטטת, סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

(2) מצא את השטח המוגבל על־ידי גרף הנגזרת $f'(x)$ ועל־ידי ציר x בתחום $\frac{\pi}{3} \le x \le \pi$.

4. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = e^x$ ו־ $g(x) = e^{3-x}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מן הפונקציות עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. מצא את תחומי העליה והירידה של כל אחת מן הפונקציות (אם יש כאלה).

ג. **(1)** מצא את השיעורים של נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.

(2) סרטט באותה מערכת צירים סקיצות של כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

(3) חשב את השטח המוגבל על־ידי הגרפים של שתי הפונקציות ועל־ידי הישר $y = e^3$.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^m - \ln x^4$. m הוא מספר טבעי.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון ששיעור x שלה שווה ל־ 1 . מצא את הערך של m .

הצב $m = 4$ וענה על הסעיפים הבאים.

ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x) - 3$.

כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר x ? נמק.

בהצלחה

תשובות

3. **א.** $\max\,(0,2)$, $\min\,(\pm\frac{\pi}{3}, 1\frac{3}{4})$, $\max_{ep.}\,(\pm\pi, 4)$ **ג.** **(2)** $S = 2\frac{1}{4}$ (יחידות ריבועיות)

4. **א.** $f:\ (0,1)$, $g:\ (0,e^3)$ **ב.** $f: \nearrow \forall x$, $g: \searrow \forall x$

ג. **(1)** $(1.5, e^{1.5})$ **(3)** $S = 2e^{1.5} + e^3 = 29.05$ (יחידות ריבועיות)

5. **א.** $x \ne 0$ **ב.** $m = 4$ **ג.** $\min\,(\pm 1, 1)$ **ה.** 4 נקודות

פתרון מבחן 27

1. א.

$a_{n+1} = a_n - 4 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n = -4 \quad \Rightarrow \quad d = -4$ סדרה חשבונית שהפרשה הוא

$a_3 = a_1 + 2d = a_1 + 2\cdot(-4) = a_1 - 8 = \underset{\text{נתון}}{12} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = 20}$

ב.

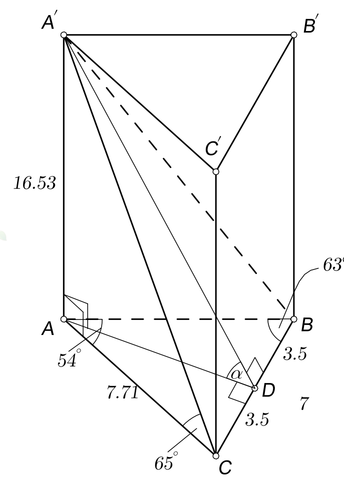
$S = S_{71} - S_{61} = \frac{71}{2}(2\cdot 20 - 4\cdot 70) - \frac{61}{2}(2\cdot 20 - 4\cdot 60) = -8520 - (-6100) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S = -2420}$

ג.

$a_{36} = a_1 + 35\cdot d = 20 - 4\cdot 35 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a_{36} = -120}$

---

2. א.



$\underline{\triangle BAC:}$ (1, 2) $\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 54^\circ}{2} = 63^\circ$

(3) $\frac{7}{\sin 54^\circ} = \frac{AC}{\sin 63^\circ}$

$\Rightarrow \quad AC = AB = 7.71_{cm}$

$\underline{\triangle A'AC:}$ $tg\, 65^\circ = \frac{AA'}{7.71}$

$\Rightarrow \quad AA' = BB' = CC' = 16.53_{cm}$

$S_{ACC'A'} = AC\cdot AA' = 7.71 \cdot 16.53$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S_{ACC'A'} = 127.45}$ **(סמ"ר)**

ב.

$A'C = A'B$, (4) $A'D \perp BC \quad \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad CD = BD = 3.5_{cm}$

(6) $AD \perp BC \quad \Rightarrow \quad \underline{\triangle ADC:}$ (7) $AD = \sqrt{7.71^2 - 3.5^2} = 6.87_{cm}$

$\underline{\triangle A'AD:}$ $tg\, \alpha = \frac{16.53}{6.87} = 2.4061 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 67.43^\circ}$

- -

(1) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו (2) השלמה ל־ 180° במשולש

(3) משפט הסינוסים (4) בניית עזר

(5) גובה לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם תיכון

(6) תיכון לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם גובה (7) פיתגורס

3. א.

$f(x) = 3 - \sin^2 x - \cos x \;\;,\;\; -\pi \le x \le \pi$

$f'(x) = -2\sin x \cos x + \sin x \stackrel{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin x\,(-2\cos x + 1)} = 0$

$(1)\;\; \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k\pi \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\pi\;,\; x_2 = 0\;,\; x_3 = \pi$

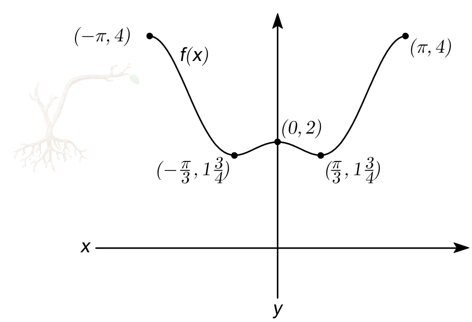
$(2)\;\; \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_4 = -\frac{\pi}{3}\;,\; x_5 = \frac{\pi}{3}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'	0	$-+=-$	0	$--=+$	0	$+-=-$	0	$++=+$	0
f	$max_{ep.}$	↘	min	↗	max	↘	min	↗	$max_{ep.}$

$f(\pm\pi) = 3 - 0 + 1 = 4 \;\;,\;\; f(0) = 3 - 0 - 1 = 2 \;\;,\;\; f(\pm\frac{\pi}{3}) = 3 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 1\frac{3}{4}$

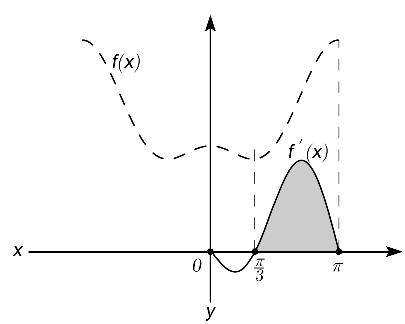
$\Rightarrow \;\; \mathbf{max_{ep.}\,(\pm\pi, 4) \;\;,\;\; min\;(\pm\frac{\pi}{3}, 1\frac{3}{4}) \;,\; max\;(0, 2)}$

ב.



ג. (1)

(סימון השטח - עבור סעיף ג(2))



(2)

$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = f(\pi) - f(\frac{\pi}{3}) = 4 - 1\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S = 2\frac{1}{4}}$ **(יחידות ריבועיות)**

4. א.

$\underline{f(x) = e^x :}\ \ x = 0 \ \Rightarrow \ y = e^0 = 1 \ \Rightarrow \ \mathbf{(0,1)}$

$y = 0 \ \Rightarrow \ e^x = 0 \ \Rightarrow \ \emptyset$

$\underline{g(x) = e^{3-x} :}\ \ x = 0 \ \Rightarrow \ y = e^3 \ \Rightarrow \ \mathbf{(0,e^3)}$

$y = 0 \ \Rightarrow \ e^{3-x} = 0 \ \Rightarrow \ \emptyset$

ב.

$f'(x) = e^x > 0 \ \ \forall x \ \Rightarrow \ \mathbf{f :} \nearrow \ \forall \mathbf{x}$

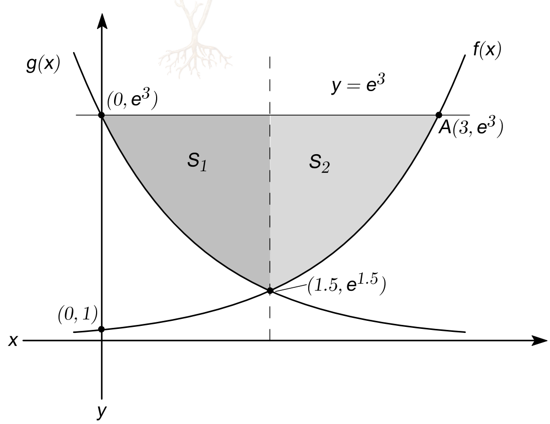
$g'(x) = -e^{3-x} < 0 \ \ \forall x \ \Rightarrow \ \mathbf{g :} \searrow \ \forall \mathbf{x}$

ג. (1)

$e^x = e^{3-x} \ \Rightarrow \ x = 3 - x \ \Rightarrow \ 2x = 3$

$\Rightarrow \ x = \frac{3}{2} \ \Rightarrow \ y = e^{1.5} \ \Rightarrow \ \mathbf{(1\frac{1}{2}, e^{1.5})}$

(2) (סימון השטחים - עבור סעיף ג(1).)



(3)

$\underline{x_A :}\ f(x) = e^x = e^3 \ \Rightarrow \ x_A = 3$

$$S_1 = \int_0^{1.5} (e^3 - e^{3-x})\,dx = (e^3 x + e^{3-x})\Big|_0^{1.5} = (1.5e^3 + e^{1.5}) - (0 + e^3) = e^{1.5} + 0.5\,e^3$$

$$S_2 = \int_{1.5}^{3} (e^3 - e^x)\,dx = (e^3 x - e^x)\Big|_{1.5}^{3} = (3e^3 - e^3) - (1.5e^3 - e^{1.5}) = 0.5\,e^3 + e^{1.5}$$

$S = S_1 + S_2 \ \Rightarrow \ \mathbf{S = 2e^{1.5} + e^3 = 29.05}$ **(יחידות ריבועיות)**

כשאתה מגיע למסקנה שהוריך צדקו, יש לך כבר ילדים שחושבים שאתה טועה . . .

5. א.

$f(x) = x^m - \ln x^4 \quad , \quad x^4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x \neq 0}$

ב.

$f'(x) = mx^{m-1} - \frac{1}{x^4} \cdot 4x^3 = mx^{m-1} - \frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = m - 4 \underset{\text{נתון}}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m = 4}$

ג.

$\boldsymbol{f(x) = x^4 - \ln x^4}$

$\boxed{f'(x) = 4x^3 - \frac{4}{x}} \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 = \frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad x^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$

$\lim_{x \to 0} (x^4 - \ln x^4) = 0 - (-\infty) = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ אסימפטוטה

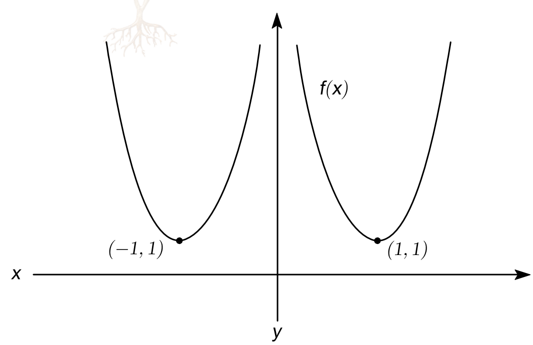
מציאת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה אינה נדרשת, אך מתבקשת

- גם להשלמת טבלת ההתנהגות של הפונקציה, וגם לסרטוט הסקיצה בסעיף ד.

x		-1		0		1	
f'	$-$	0	$+$	$\emptyset$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	asym.	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(\pm 1) = 1 - 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\min (\pm 1, 1)}$

ד.



ה. **ארבע נקודות.** $g(x)$ מורידה את $f(x)$ 3 יחידות אורך כלפי מטה.

מכיון שהערך המינימלי הוא 1,

הרי שהערך המינימלי שלאחר ההורדה,

יהיה $1 - 3 = -2$, מתחת לציר x. ראה ציור: