**.6**

| דרך | | זמן | | מהירות | |
|---|---|---|---|---|---|
| $90$ | $\Rightarrow$ | $\frac{90}{x}$ | $\Leftarrow$ | $x$ | אופנוע |
| $\frac{90}{3}=30$ | $\Rightarrow$ | $\frac{30}{x+30}$ | $\Leftarrow$ | $x+30$ | מכונית |
| $0$ | $\Leftarrow$ | $0.5$ | | $0$ | |
| $90-30=60$ | $\Rightarrow$ | $\frac{60}{0.8(x+30)}$ | $\Leftarrow$ | $0.8(x+30)$ | |

$$\Rightarrow \quad \frac{30}{x+30}+\frac{1}{2}+\frac{60}{0.8(x+30)}+\frac{1}{4}=\frac{90}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{x+30}+\frac{3}{4}+\frac{75}{x+30}=\frac{90}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{105}{x+30}+\frac{3}{4}=\frac{90}{x} \quad / :3$$

$$\frac{35}{x+30}+\frac{1}{4}=\frac{30}{x} \quad /\cdot 4x(x+30) \quad \Rightarrow \quad 140x+x(x+30)=120(x+30)$$

$$140x+x^2+30x=120x+3600 \quad \Rightarrow \quad x^2+50x-3600=0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-50\pm 130}{2}=-25\pm 65 \quad , \quad x>0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x=40_{km/h}}$$

---

**.7**

| דרך | | זמן | | מהירות | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $10$ | $\Rightarrow$ | $\frac{10}{x}$ | $\Leftarrow$ | $x$ | הראשון | עד הפגישה הראשונה |
| $10$ | $\Rightarrow$ | $\frac{10}{y}$ | $\Leftarrow$ | $y$ | השני | |
| $10x$ | $\Leftarrow$ | $10$ | | $x$ | הראשון | כל הדרך |
| $50+(50-10x)$ | | $9$ | | $y$ | השני | |

$$(I) \quad \frac{10}{x}-1=\frac{10}{y} \quad /\cdot xy \quad \Rightarrow \quad 10y-xy=10x \quad \Rightarrow \quad y(10-x)=10x \quad \Rightarrow \quad y=\frac{10x}{10-x}$$

$$(II) \quad 100-10x=9y \quad \Rightarrow \quad y=\frac{100-10x}{9}=\frac{10x}{10-x} \quad /\cdot\frac{9(10-x)}{10} \quad \Rightarrow \quad (10-x)^2=9x$$

$$100-20x+x^2=9x \quad \Rightarrow \quad x^2-29x+100=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{29\pm 21}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=\boxed{25}\,,\ x_2=4$$

$$y_1=\frac{10\cdot\boxed{25}}{10-\boxed{25}}<0 \quad \Rightarrow \quad \times \quad , \quad y_2=\frac{10\cdot 4}{10-4}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}>0 \quad \Rightarrow \quad \checkmark \quad \Rightarrow \quad x=4$$

$$d=50-10x=50-10\cdot 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d=10_m}$$

**.15 א.** מספר השולחנות שנקנו על־ידי הסוחר הוא $\frac{2400}{x}$ .

שולחן שנמכר בהפסד של 10% , נמכר ב־ 90% מערכו.

מחיר המכירה של שולחן כזה הוא $0.9x$ ש׳ $= x \cdot \frac{90}{100} = x \cdot 90\%$ .

מחיר המכירה של חמש השולחנות שנמכרו בהפסד הוא $\underline{4.5x}$ ש׳ $= 0.9x \cdot 5$ .

שולחן שנמכר ברווח של 20% , נמכר ב־ 120% מערכו.

מחיר המכירה של שולחן כזה הוא $1.2x$ ש׳ $= x \cdot \frac{120}{100} = x \cdot 120\%$ .

מספר השולחנות שנמכרו ברווח הוא $\frac{2400}{x} - 5$ .

מחיר המכירה של כל השולחנות שנמכרו ברווח הוא $\underline{1.2x \cdot \left(\frac{2400}{x} - 5\right)}$ .

$$4.5x + 1.2x \cdot \left(\frac{2400}{x} - 5\right) = \underset{\text{נתון}}{2700} \quad \Rightarrow \quad 4.5x + 2880 - 6x = 2700$$

$$2880 - 1.5x = 2700 \quad / -2880 \quad \Rightarrow \quad -1.5x = -180 \quad / : (-1.5) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 120_{sh}}$$

**ב.**

$$\frac{2400}{x} = \frac{2400}{120} = \mathbf{20} \quad \text{(שולחנות)}$$

**12345679**

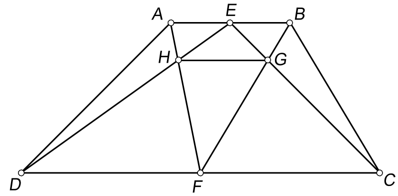
למספר זה מספר תכונות מעניינות:

1. **הכפלה ב־1 נותנת את כל הספרות מ־1 עד 9 למעט 8 :** $12345679 \times 1 = 12345679$
   **הכפלה ב־8 נותנת את כל הספרות מ־1 עד 9 למעט 1 :** $12345679 \times 8 = 98765432$
2. **הכפלה ב־2 נותנת את כל הספרות מ־1 עד 9 למעט 7 :** $12345679 \times 2 = 24691358$
   **הכפלה ב־7 נותנת את כל הספרות מ־1 עד 9 למעט 2 :** $12345679 \times 7 = 86419753$
3. **הכפלה ב־4 נותנת את כל הספרות מ־1 עד 9 למעט 5 :** $12345679 \times 4 = 49382716$
   **הכפלה ב־5 נותנת את כל הספרות מ־1 עד 9 למעט 4 :** $12345679 \times 5 = 61728395$
4. **כל הכפלה של מספר זה במספר המתחלק ב־3 (עד 78) נותנת מספר שספרותיו מחזוריות**
   $12345679 \times 3 = 37037037$ ; $12345679 \times 6 = 74074074$ ; $12345679 \times 12 = 148148148$
   $12345679 \times 15 = 185185185$ ; $12345679 \times 21 = 259259259$ ; $12345679 \times 296296296$
5. **כל הכפלה של מספר זה במספר המתחלק ב־9 (עד 81) נותנת מספר שכל ספרותיו שוות**
   $12345679 \times 9 = 111111111$ ; $12345679 \times 18 = 222222222$ ; $12345679 \times 27 = 333333333$
   $12345679 \times 36 = 444444444$ ; $12345679 \times 45 = 555555555$ ; $12345679 \times 54 = 666666666$
   $12345679 \times 63 = 777777777$ ; $12345679 \times 72 = 888888888$ ; $12345679 \times 81 = 999999999$

**3. א.**

(1) $AE = EB = \frac{8}{2} = 4$ , $DF = FC = \frac{24}{2} = 12$

(2) $EB \parallel FC \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{EG}{GC} = \frac{BG}{GF}$




(4) $\boxed{\angle EGB = \angle CGF} \overset{(5)}{\Rightarrow} \triangle EBG \sim \triangle CFG$

(5) $\frac{EG}{CG} = \frac{EB}{CF} = \frac{4}{12} \Rightarrow \mathbf{\frac{EG}{CG} = \frac{1}{3}}$

**ב.**

(6) $\frac{EH}{HD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EH}{HD} = \frac{EG}{CG} \overset{(7)}{\Rightarrow}$ **$HG \parallel CD$** $(\checkmark)$

**ג.**

$\frac{EH}{HD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EH}{ED} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

(5) $\triangle EHG \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{HG}{DC} = \frac{EH}{ED} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{HG}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow \mathbf{HG = 6_{cm}}$

---

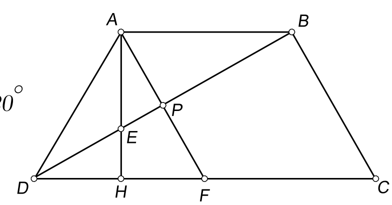
(1) נתון (2) הגדרת טרפז (3) משפט תאלס המורחב (4) זוויות קודקודיות שוות זו לזו

(5) משפט דמיון צלע־זווית־צלע (6) כמו ההוכחה שבסעיף א' (7) משפט תאלס הפוך

---

**4. א.** בנית עזר: $AF \parallel BC$ לכן: $ABCF$ מקבילית לפי הגדרה.

(1) $AF = BC = a$ , $FC = AB = a \Rightarrow DF = 2a - a = a$




$AD = DF = AF = a \overset{(2)}{\Rightarrow} \angle ADF = 60^\circ \overset{(3)}{\Rightarrow} \angle BAD = 120^\circ$

(4) $AD = AB \overset{(5)}{\Rightarrow} \angle ADB = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle PDF = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ \Rightarrow$ $DP$ חוצה זווית ב־ $\triangle ADF$ $\overset{(6)}{\Rightarrow}$ $DP$ תיכון ב־ $\triangle ADF$

(4) $AH \perp DF \overset{(6)}{\Rightarrow} DH = HF \overset{(7)}{\Rightarrow} \mathbf{\frac{AE}{EH} = 2}$

אפשר גם: הוכח: $DH = \frac{a}{2}$ , $DE$ חוצה זווית ב־ $\triangle ADH$. הפעל את משפט חוצה הזווית ב־ $\triangle ADH$.

**ב.**

$\underline{\triangle ADH:}$ $DH = \frac{a}{2} \overset{(8)}{\Rightarrow} AH = \sqrt{AD^2 - HD^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

(7) $AE = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathbf{AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}}$ **(יחידות אורך)**

---

(1) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו (2) זווית במשולש שווה־צלעות $(\triangle ADF)$ היא בת $60^\circ$

(3) השלמה ל־ $180^\circ$ של זוויות על שוק בטרפז (4) נתון (5) זוויות בסיס במש"ש שוות זו לזו

(6) במשולש שווה־צלעות חוצה הזווית, הגובה והתיכון מתלכדים

(7) נקודת מפגש תיכונים במשולש מחלקת אותם ביחס של $1:2$ כשהחלק הגדול קרוב לקודקוד

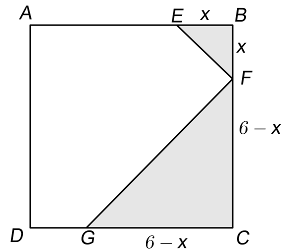
(8) משפט פיתגורס

## בעיות קיצון - פתרונות

**.1 א.**

$$S_{\triangle EBF}+S_{\triangle FCG}=\frac{x^2}{2}+\frac{(6-x)^2}{2}=\frac{x^2+36-12x+x^2}{2}=\frac{2x^2-12x+36}{2}$$

$$\mathbf{S_{\triangle EBF}+S_{\triangle FCG}=x^2-6x+18}$$ **(יחידות ריבועיות)**




**ב. (1)**

$y=x^2-6x+18$

$y'=2x-6\overset{?}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=3$

$y''=2 \quad\Rightarrow\quad y''(3)>0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x_{min}=3}$

**(2)**

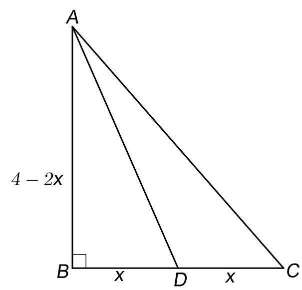
$S_{min}=3^2-6\cdot3+18=9-18+18 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S_{min}=9}$ **(יחידות ריבועיות)**

---

**.2 א.**

$BD=DC\ ,\ BD=x \quad\Rightarrow\quad \mathbf{BC=2x}$

$AB+BC=4 \quad\Rightarrow\quad AB=4-BC \quad\Rightarrow\quad \mathbf{AB=4-2x}$




**ב.**

$\underline{\triangle ABD:}\ \ AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{(4-2x)^2+\boxed{x^2}}$

לפונקציה חיובית ולריבוע של אותה פונקציה יש ערכים קיצוניים בנקודות ששיעור $x$ שלהן שווה.

זאת אומרת: אם ל־$y=f(x)$ נקודת קיצון מינימלית (/מקסימלית) בנקודה $(a,b)$,

אזי לפונקצית <u>הריבוע</u> שלה תהיה נקודת קיצון מינימלית (/מקסימלית) בנקודה $(a,b^2)$.

$y=AD$ היא פונקצית מרחק ולכן היא חיובית. נגדיר, אם־כן:

$y=\left(\sqrt{(4-2x)^2+x^2}\ \right)^2=16-16x+4x^2+x^2=5x^2-16x+16$

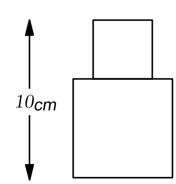
$y'=10x-16=2(5x-8)\overset{?}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{8}{5}=1.6$

$y''=10 \quad\Rightarrow\quad y''(1.6)=10>0 \quad\Rightarrow\quad$ **min :** $\mathbf{x=1.6_{cm}}$

---

**.3** נסמן: $x$ - אורך צלע הריבוע התחתון

$\Rightarrow\quad (10-x)_{cm}=$ אורך צלע הריבוע העליון




$S=f(x)=x^2+(10-x)^2=x^2+100-20x+x^2=2x^2-20x+100$

$f'(x)=4x-20\overset{?}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=5$

$f''(x)=4 \quad\Rightarrow\quad f''(5)=4>0 \quad\Rightarrow\quad \min\ (\surd) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=5_{cm}}$

**.7 א. (1)**

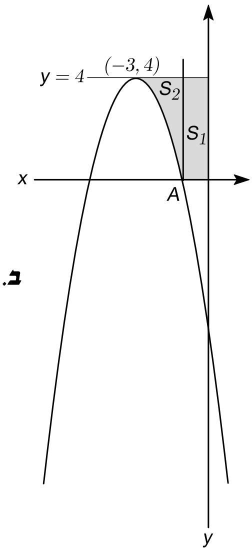
$y = -x^2 - 6x + b$

$y' = -2x - 6 \stackrel{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3$

$a = -1 \quad \Rightarrow \quad max \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_{max} = -3}$

**(2)**

$y(-3) = -(-3)^2 - 6\cdot(-3) + b = -9 + 18 + b = 9 + b = \underset{\text{נתון}}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b = -5}$




**ב.**

$\mathbf{y = -x^2 - 6x - 5} \stackrel{?}{=} 0 \ , \ x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{-2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -5 \ , \ x_2 = -1 = x_A$

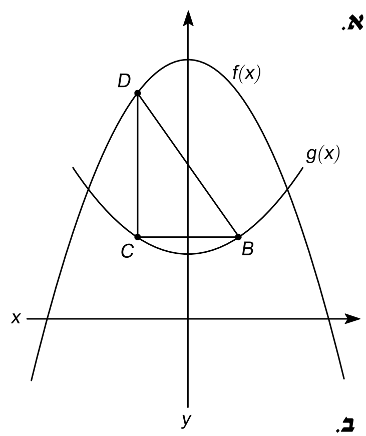
$\Rightarrow \quad S_1 = 1\cdot 4 = 4 \ , \ S_2 = \int_{-3}^{-1} (4 - (-x^2 - 6x - 5))\, dx$

$S_2 = (\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x) \Big|_{-3}^{-1} = (\frac{-1}{3} + 3 - 9) - (-9 + 27 - 27) = 2\frac{2}{3}$

$S = S_1 + S_2 = 4 + 2\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S = 6\frac{2}{3}}$ **(יחידות ריבועיות)**

---

**.8 א.**




$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 8 \ , \ g(x) = \frac{1}{6}x^2 + 2$

$\underline{B:}\ x = t \ , \ B \in g(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B(t\, , \frac{1}{6}t^2 + 2)}$

$\underline{C:}\ y_C = y_B = \frac{1}{6}t^2 + 2 \ , \ C \in g(x) \quad \Rightarrow \quad x_C = -t$

$\Rightarrow \quad \mathbf{C(-t\, , \frac{1}{6}t^2 + 2)}$

$\underline{D:}\ x_D = x_C = -t \ , \ D \in f(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D(-t\, , -\frac{1}{3}t^2 + 8)}$

**ב.**

$CB = x_B - x_C = t - (-t) = 2t$

$CD = y_D - y_C = -\frac{1}{3}t^2 + 8 - (\frac{1}{6}t^2 + 2) = 6 - \frac{1}{2}t^2$

$S_{\triangle BCD} = \frac{BC\cdot CD}{2} = \frac{2t\cdot(6 - \frac{1}{2}t^2)}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{\triangle BCD} = 6t - \frac{1}{2}t^3}$ **(יחידות ריבועיות)**

**ג.**

$h(t) = 6t - \frac{1}{2}t^3$

$h'(t) = 6 - \frac{3}{2}t^2 \stackrel{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}t^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 6\cdot\frac{2}{3} = 4 \ , \ t > 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2$

$h''(t) = -3t \quad \Rightarrow \quad h''(2) = -3\cdot 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad max \ (\surd) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t_{max} = 2}$

**6. א. (1)**

$f(x)=\frac{x-2}{2x+4}\quad , \quad 2x+4\neq 0 \quad\Rightarrow\quad 2x\neq -4 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x\neq -2}$

**(2)**

$x=0 \quad\Rightarrow\quad f(0)=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{(0,-\tfrac{1}{2})}$

$y=0 \quad\Rightarrow\quad x-2=0 \quad\Rightarrow\quad x=2 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{(2,0)}$

**(3)**

$\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{2x+4}=\frac{\to -4}{\to 0}=\infty \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=-2}$

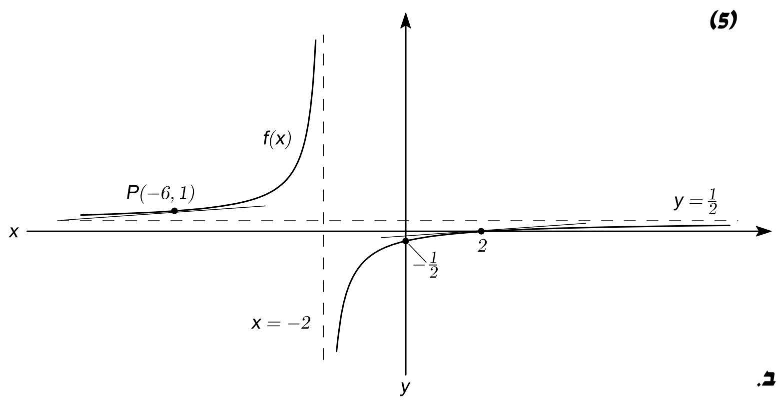
$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{2x+4}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}{\cancel{x}(2+\frac{4}{x})}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{y=\tfrac{1}{2}}$

**(4)**

$f'(x)=\frac{1\cdot(2x+4)-2\cdot(x-2)}{(2x+4)^2}=\frac{8}{(2x+4)^2}>0 \quad \forall\, \{x\neq -2\} \quad\Rightarrow$ אין נקודות קיצון

$\Rightarrow\quad \nearrow: \ \mathbf{(x<-2)\cup(x>-2)} \quad , \quad \searrow: \ \emptyset$

**(5)**




**ב.**

$x=2 \quad\Rightarrow\quad m=f'(2)=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$

$m=f'(x)=\frac{8}{(2x+4)^2}\overset{?}{=}\frac{1}{8} \quad\Rightarrow\quad (2x+4)^2=64$

$2x+4=\pm 8 \quad\Rightarrow\quad x_1=\frac{8-4}{2}=2 \ , \ x_2=\frac{-8-4}{2}=-6 \ , \ f(-6)=\frac{-8}{-8}=1 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P(-6,1)}$

**ג.**

הקבוע $C$ של הפונקציה $g(x)=f(x)+C$ מעלה או מוריד את $f(x)$ ב־ $C$ יחידות (שְׁנָתוֹת),

בהתאם לסימנו: חיובי - מעלה, שלילי - מוריד.

לכן, אם האסימפטוטה האופקית של $g(x)$ מתלכדת עם ציר $x$

- המשמעות היא שאותה אסימפטוטה "ירדה" $\frac{1}{2}$ שֶׁנֶת,

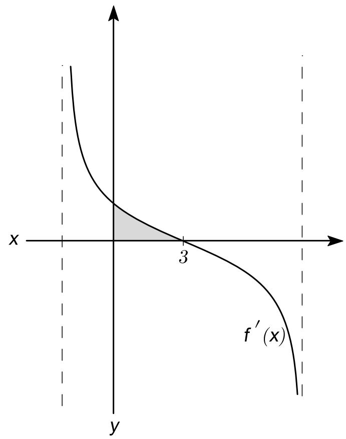
כלומר: $f(x)$ עצמה "ירדה" חצי שֶׁנֶת, ולכן: $\mathbf{C=-\tfrac{1}{2}}$ .

**.7 א. (1)**

על־פי הציור:

| x | ? | | 3 | | ? |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | 0 | − | |
| f | | ↗ | max | ↘ | |

$\Rightarrow\ \boldsymbol{x_{max}=3}$




**(2)**

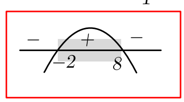
$f(x)=\sqrt{-x^2+bx+16}\ ,\quad f'(x)=\dfrac{-2x+b}{2\sqrt{-x^2+bx+16}}$

$f'(3)=0\quad\Rightarrow\quad -2\cdot 3+b=0\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{b=6}$

**ב.**

$\boldsymbol{f(x)=\sqrt{-x^2+6x+16}}$

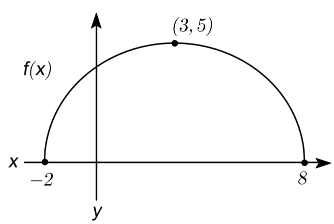
$-x^2+6x+16\ge 0\ ,\quad x_{1,2}=\dfrac{-6\pm10}{-2}=3\mp5\quad\Rightarrow\quad x_1=-2\ ,\ x_2=8$

$a=-1<0\quad\Rightarrow$  $\Rightarrow\quad \boldsymbol{-2\le x\le 8}$


**ג.**

$f(-2)=f(8)=0\ ,\quad f(3)=\sqrt{-9+18+16}=5$

$\Rightarrow\quad \boldsymbol{min_{ep}(-2,0)\ ,\ max\ (3,5)\ ,\ min_{ep}(8,0)}$




**ד.**

**ה.**

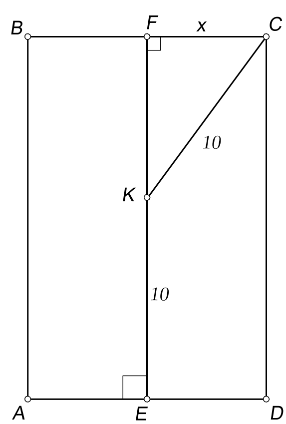
$S=\int_0^3 f'(x)\,dx=f(x)\Big|_0^3=f(3)-f(0)=5-4\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{S=1}$ **(יחידה ריבועית)**

---

**.8 א.**

$KFC=90^\circ$ (מתחלפות במקבילים) $\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{FK=\sqrt{100-x^2}_{cm}}$ (פיתגורס)

**ב.**




$AB=EF=EK+KF=10+\sqrt{100-X^2}$

$2AB+2BC=f(x)=2(10+\sqrt{100-x^2})+2\cdot 2x$

$f(x)=4x+2\sqrt{100-x^2}+20$

$f'(x)=4+2\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=\boxed{4-\dfrac{2x}{\sqrt{100-x^2}}}\overset{?}{=}0$

$\dfrac{2x}{\sqrt{100-x^2}}=4\quad\Rightarrow\quad 4x^2=16(100-x^2)=1600-16x^2$

$20x^2=1600\quad\Rightarrow\quad x^2=80\quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{80}$

| x | 0 | | $\sqrt{80}$ | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | 0 | − | |
| f | | ↗ | max (√) | ↘ | |

$\Rightarrow\quad BC=2x=2\sqrt{80}=2\sqrt{16\cdot5}=2\cdot4\cdot\sqrt5$

$\Rightarrow\quad \boldsymbol{BC=8\sqrt5=17.89_{cm}}$