

אלי מיטב

מבחני בגרות במתמטיקה לשאלון **481** (804)

עם פתרונות מלאים

356	6 - קיץ תש"ע - 2010 - (המבחן הגנוז)	_____	בעיות מילוליות
362	7 - חורף תשע"א - 2011	_____	1 - תנועה
369	8 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד א	_____	15 - קניה ומכירה
377	9 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד ב	_____	26 - גאומטריות
384	10 - חורף תשע"ב - 2012	_____	33 - גאומטריה אנליטית - נקודות וישרים
393	11 - קיץ תשע"ב - 2012 - מועד א	_____	51 - מעגל
404	12 - קיץ תשע"ב - 2012 - מועד ב	_____	87 - הסתברות
412	13 - חורף תשע"ג - 2013	_____	גאומטריה אוקלידית
420	14 - חורף תשע"ג - 2013 - לוחמים	_____	125 א - פרופורציה ללא מעגל
428	15 - קיץ תשע"ג - 2013 - מועד א	_____	155 ב - מעגל ללא פרופורציה
437	16 - קיץ תשע"ג - 2013 - מועד ב	_____	171 ג - פרופורציה עם מעגל
446	17 - קיץ תשע"ג - 2013 - לוחמים	_____	טריגונומטריה במישור
455	18 - חורף תשע"ד - 2014	_____	198 - ללא מעגל
463	19 - חורף תשע"ד - 2014 - לוחמים	_____	205 - סכום שתי זוויות
470	20 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד א	_____	224 - עם מעגל
478	21 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד ב	_____	חשבון דיפרנציאלי
486	22 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד ג	_____	237 - פונקציות רציונליות
493	23 - סתו תשע"ה - 2014 - מועד ד	_____	261 - פונקציות עם שורש ריבועי
501	24 - חורף תשע"ה - 2015	_____	276 - בעיות קיצון
510	25 - חורף תשע"ה - 2015 - לוחמים	_____	חשבון אינטגרלי
519	26 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד א	_____	291 - מציאת הפונקציה - פולינום
529	27 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד ב	_____	299 - שטחים - פולינום
539	28 - חורף תשע"ו - 2016	_____	מבחני בגרות
548	29 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד א	_____	מבנה מבחן הבגרות
557	30 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד ב	_____	317
566	31 - חורף תשע"ז - 2017	_____	318 1 - קיץ ס"ט - 2009 - מועד א
575	32 - קיץ תשע"ז - 2017 - מועד א	_____	325 2 - קיץ ס"ט - 2009 - מועד ב
583	33 - קיץ תשע"ז - 2017 - מועד ב	_____	332 3 - חורף תש"ע - 2010
593	המשפטים בגאומטריה	_____	340 4 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד א
596	נוסחאון הבגרות לארבע יחידות	_____	349 5 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד ב

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יצאו גם לשאלונים 382-482-581-582

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יצאו לשאלונים 481-482-581-582

מספר מילים לפני

ספר זה מכיל שאלות ממבחני בגרות מהשנים 2004-2013 שנערכו במתכונת ה'צבירה', המתאימות לשאלון 481 (804) בהתאם לערכון האחרון של תכנית הלימודים. לכל השאלות תשובות סופיות בעמוד השאלה ופתרון מלא בהמשך עם הפניה לעמוד המתאים (המספר המעובה בסוגריים משמאל לכל שאלה). בחלקו השני של ספר זה מובאים 33 מבחני הבגרות לשאלון 481 שנערכו עד כה במתכונת הנוכחית עם פתרון מלא. סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

\forall - לכל, \in - שייך, \nearrow - עליה, \searrow - ירידה

\cup - איחוד; היחס 'או', \cap - חיתוך; היחס 'וגם', \emptyset - קבוצה ריקה (אין פתרון)

$\sqrt{\quad}$ - אישור למה שבקשנו לברוק או להוכיח, ab - מוחלט, $ep.$ - נקודת קצה (end point)

'ללא הגבלת הכלליות' - קביעה ערך מייצג, במקום פרמטר (שאמור ל'היעלם' בהמשך).

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוץ עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוץ עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו ככוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ-2012 (נכון להיום), כפי שהם מופיעים בספר, נמצאים באתר ההוצאה במְרְשָׁת (internet), בעלות שנתית מגוחכת של 20 (עשרים) שקלים בלבד. ראו בגב הכריכה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדוא"ל.

כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורה שריף אמארה מכפר זָלְפָה.

לאחר כל מבחן בגרות שיערך בשנה הקרובה (התשע"ח - 2018), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים.

המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את חלק מהחללים שבין השאלות והפתרונות לְחִלְחֵתִי בהבוקר אנקדוטות וסיפורים. רוב ה'הבוקים' קשורים למתמטיקה, חלקם אינו כזה, וכיניהם גם אנקדוטות בעלות אופי לאומי או יהודי.

הספר מופיע גם במהדורה דיגיטלית על-ידי חברת 'קל-ספר' (classoos). ראו קישור באתר ההוצאה.

ב ה צ ל ח ה

א'ס'א

16. (4 יח, חורף תשמ"ז - 86) רוכב אופניים יצא בשעה 5.30 בבוקר לחיפה מקיבוץ המרוחק ממנה ב- 35 km .
 בשעה 6.00 בבוקר יצא רוכב אופניים שני לחיפה מאותו קיבוץ.
 הרוכב השני נע במהירות הגדולה מזו של הראשון ב-2 קמ"ש לשעה ופגש את הרוכב הראשון לפני
 הגיעו לחיפה. חצי שעה לאחר הפגישה הגיע הרוכב הראשון לחיפה.
 מצא את מהירותו של הרוכב הראשון. (13)

17. (4 יח, קיץ תשמ"ז - 87) המרחק בין שני מקומות A ו-B הוא 81 km .
 שני רוכבי אופניים יצאו בריזמנית, האחד מנקודה A והשני מנקודה B, ונסעו זה לקראת זה.
 אחרי שעה אחת ו-40 דקות עדיין לא נפגשו, אך המרחק ביניהם הצטמצם ל- 6 km בלבד.
 הרוכב שיצא מ-A עבר את כל הדרך עד B בשעה וחצי פחות מאשר הרוכב שיצא מ-B ל-A.
 מצא את המהירות של כל אחד מרוכבי האופניים. (13)

18. (4 יח, קיץ תשמ"ח - 88) המרחק בין שתי ערים הוא 450 km .
 משאית יצאה לדרכה מעיר אחת לשנייה.
 לאחר שנסעה במהירות קבועה במשך שתיים, נאלצה להתעכב במשך 40 דקות בגלל תקלה.
 לאחר התיקון המשיכה המשאית מיד בדרכה, במהירות הגדולה ב-5 קמ"ש ממהירותה הקודמת.
 המשאית הגיעה לעיר השנייה 25 דקות לאחר הזמן שתוכנן מראש.
 מה היתה מהירות המשאית לפני התקלה? (14)

19. (4 יח, קיץ תשנ"ז - 97) סירת משוטים יצאה מ-A עם הזרם ל-B.
 שעה אחריה יצאה בעקבותיה מ-A סירת מנוע, הגיעה לסירת המשוטים וחזרה ל-A.
 סירת המנוע הגיעה ל-B כאשר סירת המשוטים הגיעה ל-B.
 מהירות סירת המשוטים היא 16 קמ"ש. מהירות סירת המנוע היא 20 קמ"ש.
 מהירות הזרם היא 4 קמ"ש. חשב את המרחק בין A ל-B. (14)

השניה הראשונה

00:00:01

השאלות

18. 75 km/h 16. 10 km/h
19. $AB = 270 \text{ km}$ 17. $A \rightarrow B: 27 \text{ km/h}, B \rightarrow A: 18 \text{ km/h}$

16. (4 יח', חורף תשנ"ג - 92) נתונה מקבילית ABCD. משוואת הצלע AB היא $7y = x + 26$.

משוואת הצלע AD היא $y = x + 2$. נקודת המפגש של האלכסונים במקבילית היא $(-3, 2)$.

א. מצא את אורך האלכסון AC.

ב. מצא את המשוואות של הצלעות BC ו-CD. (47)

17. (4 יח', חורף תשנ"ז - 96) משולש ABE הוא משולש ישר-זווית, $\angle BAE = 90^\circ$.

נתון כי השיעורים של שני קדקודים הם $A(8, 9)$, $B(12, 1)$, והקדקוד E נמצא על ציר y.

א. מצא את שיעור הקדקוד E.

ב. הראה כי המשולש ABE הוא משולש שווה-שוקיים.

ג. מצא מה צריכים להיות שיעורי נקודה D, כדי שהמרובע ABDE יהיה ריבוע. (48)

18. (4 יח', חורף תשנ"ז - 97) הצלע AD בריבוע ABCD מונחת על הישר $y = 2x$.

שיעורי הקדקוד B הם $(11, 2)$. מצא את:

א. שיעורי הקדקוד A.

ב. שיעורי הקדקוד D. מצא את שני הפתרונות האפשריים. (48)

19. (4 יח', קיץ תשנ"ז - 97) האלכסון AC במעוין ABCD מונח על הישר $y = 2x - 8$.

הצלע AB מונחת על הישר $y = -8x + 2$. אלכסוני המעוין נחתכים על ציר x.

מצא את קדקודי המעוין. (49)

20. (4 יח', חורף תשנ"ט - 99)

במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) משוואת הבסיס BC היא $x - 4y = 14$.

שניים מקדקודי המשולש הם: $A(-8, 3)$, $B(-10, -6)$.

א. מצא את משוואת הגובה לבסיס במשולש זה.

ב. חשב את שטח המשולש ABC. (49)

תשובות

16. א. $\sqrt{116}$ ב. $y_{BC} = x + 8$, $y_{CD} = \frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$

17. א. $E(0, 5)$ ג. $D(4, -3)$

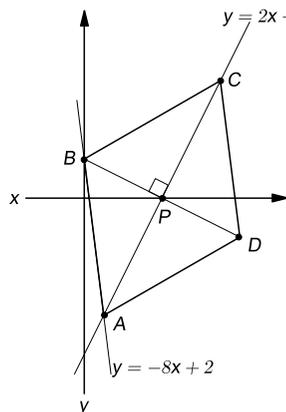
18. א. $(3, 6)$ ב. $D(-1, -2)$, $D(7, 14)$ (1)

19. $A(1, -6)$, $B(0, 2)$, $C(7, 6)$, $D(8, -2)$

20. א. $y = -4x - 29$ ב. $S = 34$ (י"ר)



19.



$$\underline{A}: -8x + 2 = 2x - 8 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 2 \cdot 1 - 8 = -6 \Rightarrow \mathbf{A(1, -6)}$$

$$\underline{C}: AP = PC, y_P = 0 \Rightarrow \frac{-6 + y_C}{2} = 0 \Rightarrow y_C = 6$$

$$y = 2x - 8 = 6 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow \mathbf{C(7, 6)}$$

$$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + 7}{2} = 4 \Rightarrow \mathbf{P(4, 0)}$$

$$\underline{y_{BC}}: BC \perp AC, m_{AC} = 2 \Rightarrow m_{BC} = -\frac{1}{2}$$

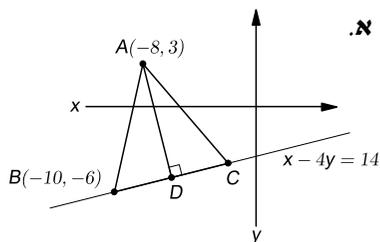
$$P(4, 0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y_{BC} = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\underline{B}: -8x + 2 = -\frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow -16x + 4 = -x + 4 \Rightarrow x = 0$$

$$y = -8 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow \mathbf{B(0, 2)}$$

$$\underline{D}: BP = PD \Rightarrow \frac{0 + x_D}{2} = 4, \frac{2 + y_D}{2} = 0 \Rightarrow x_D = 8, y_D = -2 \Rightarrow \mathbf{D(8, -2)}$$

20.



$$\underline{BC}: x - 4y = 14 \Rightarrow 4y = x - 14 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$$

$$\underline{y_{AD}}: m_{BC} = \frac{1}{4}, BC \perp AD \Rightarrow m_{AD} = -4$$

$$A(-8, 3) \Rightarrow y - 3 = -4(x + 8) \Rightarrow \mathbf{y = -4x - 29}$$

ב.

$$\underline{D}: -4x - 29 = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2} \Rightarrow -16x - 116 = x - 14 \Rightarrow -17x = 102 \Rightarrow x = -6$$

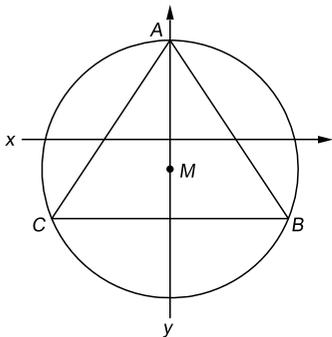
$$y = -4 \cdot (-6) - 29 = -5 \Rightarrow \mathbf{D(-6, -5)}$$

$$AD = \sqrt{(-6 + 8)^2 + (-5 - 3)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(-6 + 10)^2 + (-5 + 6)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$S_{\triangle ABC} = 2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{AD \cdot BD}{2} = \sqrt{68} \cdot \sqrt{17} \Rightarrow \mathbf{S_{\triangle ABC} = 34}$$
 (יחידות ריבועיות)

את המספר הראשוני 7129 ניתן להציג תוך שימוש בכל הספרות פעם אחת בלבד: $7129 = 5^0 + 6^1 + 7^2 + 8^3 + 9^4$



(79)

27. (803, קיץ תשע"א - 2011, מועד א)

המעגל $x^2 + (y + 3)^2 = 169$ חותך את החלק החיובי של ציר y בנקודה A .

B ו- C הן נקודות על המעגל,

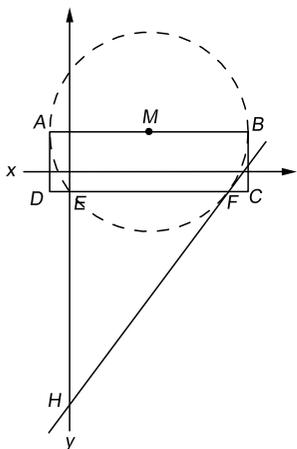
כך ש- BC מקביל לציר x . $C(-12, -8)$.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .

ב. חשב את אורך הקטע BC .

ג. חשב את שטח המשולש ABC .

ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A .



(80)

28. (003, סתיו תשע"ב - 2011, לוחמים)

בציור מלבן $ABCD$ שצלעותיו מקבילות לצירים.

$A(-1, 2)$, $C(9, -1)$

צלע המלבן AB היא קוטר במעגל שמרכזו M .

המעגל חותך את הצלע DC בנקודות E ו- F .

דרך F העבירו משיק למעגל החותך את ציר y ב- H .

א. (1) מצא את שיעורי הנקודות B ו- D .

(2) מצא את משוואת המעגל.

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודות E ו- F .

(2) מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה F .

ג. מצא את שטח המשולש EFH .

29. (4 יח', קיץ תשמ"ח - 88) קדקודי משולש הם: $A(8, 5)$, $B(7, -2)$, $C(-1, 2)$.

א. מצא את משוואת האנך האמצעי לצלע BC ואת משוואת האנך האמצעי לצלע AC .

(81)

ב. מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש ABC .

תשובות

27. א. $A(0, 10)$, $B(12, -8)$ ב. $BC = 24$ (יחידות אורך) ג. $S_{\Delta} = 216$ (יחידות ריבועיות) ד. $y = 10$

28. א. (1) $B(9, 2)$, $D(-1, -1)$ (2) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$

ב. (1) $E(0, -1)$, $F(8, -1)$ (2) $y = \frac{4}{3}x - 11\frac{2}{3}$ ג. $S_{\Delta EFH} = 42\frac{2}{3}$ (יחידות ריבועיות)

29. א. $y_{AC} = -3x + 14$, $y_{BC} = 2x - 6$ ב. $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$

28. א. (1)

$$y_B = y_A = 2, \quad x_B = x_C = 9 \Rightarrow B(9, 2)$$

$$x_D = x_A = -1, \quad y_D = y_C = -1 \Rightarrow D(-1, -1)$$

$$R = MA = MB \Rightarrow x_M = \frac{-1+9}{2} = 4$$

$$y_M = y_B = 2 \Rightarrow M(4, 2)$$

$$R = MB = x_B - x_M = 9 - 4 = 5 \Rightarrow R^2 = 25$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$y_E = y_F = y_C = -1 \Rightarrow (x-4)^2 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = 16 \Rightarrow x-4 = \pm 4$$

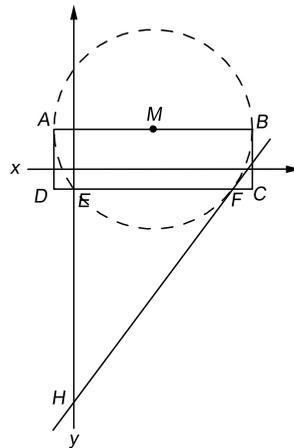
$$x_1 = 8, \quad x_2 = 0, \quad x_F > x_E \Rightarrow E(0, -1), \quad F(8, -1)$$

$$m_{MF} = \frac{2-(-1)}{4-8} = \frac{3}{-4} \Rightarrow m_{FH} = \frac{4}{3}, \quad F(8, -1) \Rightarrow y - (-1) = \frac{4}{3}(x - 8)$$

$$\Rightarrow y + 1 = \frac{4}{3}x - \frac{32}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - 11\frac{2}{3}$$

$$y_H = -11\frac{2}{3} \Rightarrow EH = y_E - y_H = -1 - (-11\frac{2}{3}) = 10\frac{2}{3}, \quad EF = x_F - x_E = 8 - 0 = 8$$

$$S_{\triangle EFH} = \frac{EF \cdot EH}{2} = \frac{8 \cdot 10\frac{2}{3}}{2} = 4 \cdot 10\frac{2}{3} \Rightarrow S_{\triangle EFH} = 42\frac{2}{3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$



(2)

ב. (1)

(2)

ג.

Googol - ע נ ק ש ב ע נ ק י ם !!!

הגוגול מוכר בעולם כמנוע חיפוש באינטרנט, ואולם מושג זה מקורו מתמטי.

את גוגול הגדיר מתמטיקאי אמריקאי, Edward Kasner, בשנות הארבעים.

כדי לעניין את אחיינו בן התשע במספרים גדולים.

הגוגול הוא המספר האסטרונומי 10^{100} .

מספר זה חסר משמעות מעשית כלשהי.

עד כמה אין למספר זה משמעות מעשית, נוכח מהדוגמאות הבאות:

שטח כדור הארץ בממ"ר הוא מחצית המספר 10^{21} .

מספר טיפות המים בים התיכון הוא 10^{24} .

מרחק כדור הארץ מהכוכב נוגה במיליונית המילימטר (!) הוא: 10^{27} .

מספר גרגרי החול שכדור הארץ יכול להכיל הוא 10^{31} .

היחס בין אורך קוטר כל היקום המוכר לנו היום לבין אורך הקוטר של גרעין האטום הוא 10^{42} .

משקל כדור הארץ בגרמים הוא 10^{27} .

משקל כל היקום כולו בגרמים הוא 10^{56} !!!

מספר האטומים ביקום כולו מוערך ב- 10^{80} .

לעומת זאת: מספר המצבים בשחמט הוא: 10^{120} !!!

36. (קיץ תשע"ב - 2012, מועד א)

בחנות ספרים ערכו הגרלת ספרים. כל משתתף בהגרלה מקבל כרטיס שיש בו 16 משבצות, שצבען נחשף על ידי גירוד.

בכל כרטיס יש אותו מספר משבצות אדומות, ושאר המשבצות צבען אחר.

כל משתתף מגרד משבצת אחת ולאחריה עוד אחת.

אם בכל אחד משני הגירודים נחשפת משבצת אדומה, המשתתף זוכה בספר.

ההסתברות שמשתתף יזכה בספר היא $\frac{1}{20}$.

א. כמה מבין 16 המשבצות בכרטיס הן אדומות?

ב. בהגרלה השתתפו 11 אנשים.

(1) מהי ההסתברות שלכל היותר 2 משתתפים יזכו בספר?

(2) מהי ההסתברות שבדיוק 2 משתתפים זכו בספר,

אם ידוע כי לכל היותר 2 משתתפים זכו בספר? (123)

37. (005, קיץ תשע"ב - 2012, מועד ב)

בשכבה י' בבית ספר מסוים יש שלוש כיתות: י/1, י/2, י/3.

בכל כיתה יש 20 בנים ו-12 בנות.

א. מוציאים באקראי 3 תלמידים מכיתה י/1 בזה אחר זה. תלמיד שהוצא אינו חוזר לכיתה.

מהי ההסתברות להוציא 3 בנים?

ב. אחרי ששלושת התלמידים שהוצאו חזרו לכיתה שלהם,

הוציאו באקראי תלמיד אחד מכיתה י/1, תלמיד אחד מכיתה י/2 ותלמיד אחד מכיתה י/3.

(1) מהי ההסתברות להוציא לפחות 2 בנים?

(2) ידוע שהוציאו לפחות 2 בנים. מהי ההסתברות שלא כל השלושה שהוצאו היו בנים?

(123)

132 הוא המספר הקטן ביותר השווה לסכום כל המספרים בני שתי ספרות

שניתן להרכיב מספרותיו: $132 = 13 + 32 + 21 + 31 + 23 + 12$

(ספר המספרים / דייוויד וולס - הוצאת מי-אן)

תשובות

36. א. 4 (משבצות אדומות) ב. 1) $P = 0.9848$ 2) $P = 0.088$

37. א. $P = \frac{57}{248} = 0.2298$ ב. 1) $P = \frac{175}{256} = 0.6836$ 2) $P = \frac{9}{14}$

$$P = P(2 + 10) + P(10 + 2) + P(4 + 8) + P(8 + 4) + P(6 + 6) \quad \text{33. א. (1)}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{25} \Rightarrow P = \frac{1}{5}$$

$$P = \frac{P(2+10)+P(10+2)}{P(12)} = \frac{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{25} : \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5}{25} \Rightarrow P = \frac{2}{5} \quad \text{(2)}$$

ג. ההסתברות המבוקשת: אף לא הוצאה אחת 'נותנת' סכום 12, שזה פשוט: $(\frac{4}{5})^n$

א: הוצאה אחת בלבד 'נותנת' סכום 12: הפעלת ברנולי על הצלחה אחת:

$$P = (\frac{4}{5})^n + \binom{n}{1} \cdot (\frac{1}{5})^1 \cdot (\frac{4}{5})^{n-1} \Rightarrow P = (\frac{4}{5})^n + n \cdot (\frac{4}{5})^{n-1}$$

34. נסמן: W(hite) - לבן, R(ed) - אדום, a - כד א, b - כד ב, 1 - פעם ראשונה, 2 - פעם שנייה

א.

$$P(W_2) = P(W_{a1} \cap W_{b2}) \cup P(R_{a1} \cap W_{a2}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{20} + \frac{15}{56} \Rightarrow P = \frac{117}{280}$$

ב.

$$P(W_{b2}/W_2) = \frac{P(W_{b2} \cap W_2)}{P(W_2)} = \frac{P(W_{b2})}{P(W_2)} = \frac{\frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 10}}{\frac{117}{280}} = \frac{3}{20} : \frac{117}{280} = \frac{3 \cdot 280}{20 \cdot 117} \Rightarrow P = \frac{14}{39}$$

(*) המאורע: לבן מרב בפעם השנייה (W_{b2}) הוא קבוצה חלקית של: לבן בפעם השנייה (W_2) .

לכן הסתברות החיתוך ביניהם היא הסתברות המאורע של הקבוצה החלקית $P(W_{b2})$.

ג.

$$P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot (\frac{14}{39})^3 \cdot (\frac{25}{39})^2 \Rightarrow P = 0.1901$$

35. A - שיעור אוהדי קבוצה א', B - שיעור הבנים. נתון: $P(B) = 0.6$, $P(A/B) = 0.7$, $P(A/\bar{B}) = 0.8$

	A	\bar{A}	Σ
B	(1) 0.42	$0.6 - 0.42 = 0.18$	0.6
\bar{B}	(2) 0.32	$0.4 - 0.32 = 0.08$	0.4
Σ	$0.42 + 0.32 = 0.74$	$1 - 0.74 = 0.26$	1

$$(1) P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0.6} = 0.7 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.42$$

$$(2) P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{0.4} = 0.8 \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0.32$$

א. ישירות מהטבלה:

$$P(\bar{A}) = 0.26 = 26\%$$

ב.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.42}{0.74} \Rightarrow P(B/A) = \frac{21}{37}$$

ג. המאורע שהסתברותו מבוקשת הוא המשלים

של מאורע: 'כל העשרה הינם בנים או בדיוק 9 מהם בנים'

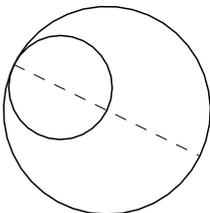
$$\Rightarrow P = 1 - (P_{10}(10) + P_{10}(9)) = 1 - (\frac{21}{37})^{10} - \binom{10}{9} \cdot (\frac{21}{37})^9 \cdot (\frac{16}{37})^1 \Rightarrow P = 0.9701$$

גאומטריה אוקלידית - א - פרופורציה ללא מעגל

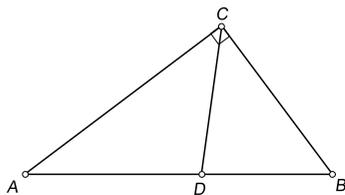
לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות. המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה. כל השאלות שאין מצוין אחרת - נלקחו משאלון 005. שאלות עם קו נטוי - מתייחסות למבחנים. דוגמה: $3/4$ - מבחן מס' 3 שאלה מספר 4. את החלוקה הכין שרון חיים.

משולשים	קטעים מיוחדים ונקודות מפגש
- חפיפה	- קטע אמצעים במשולש
7, 8, 16, 19, 24, 25, $4/4$, $17/5$	6, 15, 27, $5/5$, $14/5$
- משולש שווה-צלעות	- קטע אמצעים בטרפז
18, 27	18, 23, $6/5$
- משולש $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$	- תיכון ליתר
18	23, 27, $10/4$
- משפט פיתגורס	- מפגש תיכונים במשולש
2, 4, 7, 16, 20, 22, $17/5$	4, 5, 20
מרובעים	שטחים
- דלתון	1, 12, 13, 17, 21, 23, $4/4_{a,b}$
19	פרופורציה
- מקבילית	- משפט חוצה-זווית במשולש
6, 12, 17, 23, 24, $10/4$	4, 9, 10, 22, $3/4$, $5/5$, $25/4$
- מלבן	- משפט תאלס
20, $12/4$, $23/4$	1, 3, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 19, 21, 25, 26, 27, $5/5$, $23/4$, $25/4$
- ריבוע	- דמיון
2, 7, 8	1, 2, 6, 7, 9, 11, 12, 17, 20, 21, 22, 24, $3/4$, $6/5$, $14/5$, $17/5$, $25/4$, $26/4$
- טרפז	- יחס בין שטחי משולשים דומים
1, 3, 9, 14, 15, 18, 21, 26, $6/5$, $10/4$	5, 6, 9, $10/4$, $14/5$, $25/4$
- טרפז שווה-שוקיים	- משפט דמיון צלע-זווית-צלע
4, 19, 23, 25, $6/5$	2, 3, 5, 16, $4/4_{a,b}$, $23/4$
	יחס היקפים במשולשים דומים
	11

מעגל שמשרטט קו ישר



בציור מעגל קטן משיק למעגל גדול מבפנים. אורך רדיוס המעגל הגדול גדול פי שניים מאורך רדיוס המעגל הקטן. אם ננעץ כלי כתיבה על המעגל הקטן בנקודת ההשקה, ונסובב אותו לאורך היקף המעגל הגדול מבפנים תוך כדי המשך השקתו לו, המסלול שישרטט כלי הכתיבה יהיה קו ישר!



22. (005, קיץ תש"ע - 2010, המבחן הגנזי)

CD הוא חוצה-זווית ACB

במשולש ישר-זווית ACB ($\angle ACB = 90^\circ$)

א. (1) הוכח: $DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$

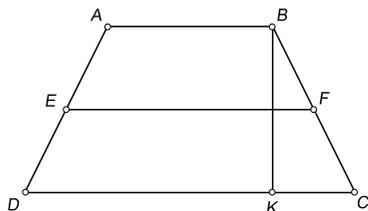
ב. נתון: $AC = 28\text{cm}$, $BC = 21\text{cm}$. חשב את אורך הקטע DB.

ג. מקדוד C מורידים אנך ליתר AB.

(150)

האנך חותך את היתר בנקודה N. הוכח: $\frac{CN}{AC} = \frac{BC}{AB}$

ג. חשב את אורך הקטע DN.



23. (005, חורף תשע"ב - 2012, לוחמים)

בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel DC$),

BK הוא גובה לבסיס DC.

EF הוא קטע אמצעים.

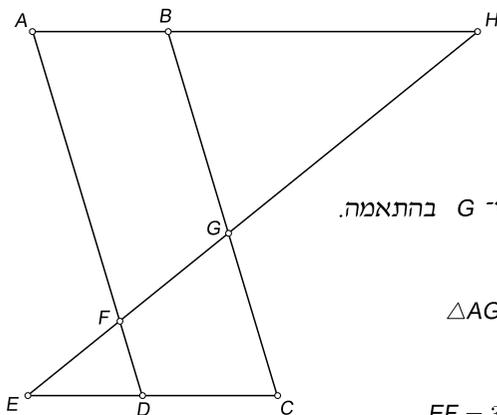
א. הוכח כי המשולש KFC הוא שווה-שוקיים.

ב. הוכח כי המרובע EFKD הוא מקבילית.

ג. נתון: $DC = 2AB$.

(151)

חשב את היחס בין שטח המרובע ABFE לבין שטח המרובע EFCD.



24. (806, קיץ תשע"ב - 2012, מועד א)

נתונה מקבילית ABCD.

E ו-H הן נקודות על המשכי

הצלעות CD ו-AB בהתאמה.

EH חותך את AD ואת BC בנקודות F ו-G בהתאמה.

נתון: $ED = EF$.

א. הוכח: (1) $HG = HB$ (2) $\triangle AGH \cong \triangle FBH$

ב. נתון גם:

$EF = 3\text{cm}$, $FD = 2\text{cm}$, $AB = 4\text{cm}$, $BG = 7\text{cm}$

(152)

(1) מצא את האורך של BH. (2) מצא את היחס $\frac{AF}{GC}$.

תולדות

$\frac{AF}{GC} = \frac{29}{14}$ (2)

BH = 10.5cm (1) ג. 24

22. א. (2) DB = 15cm ג. DN = 2.4cm

23. ג. $\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{5}{7}$

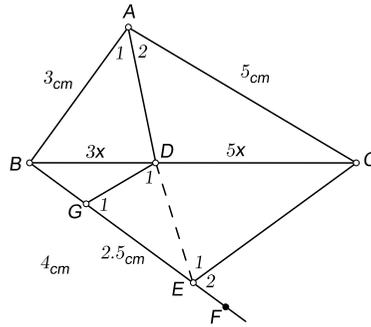
10. א.

$$(1) \angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow (2) \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$(3) BD = 3x \Rightarrow DC = 5x$$

$$(1) GD \parallel EC \Rightarrow (4) \frac{BG}{GE} = \frac{BD}{DC} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

$$(1) BE = 4 \Rightarrow GE = \frac{4}{8} \cdot 5 \Rightarrow GE = 2.5 \text{ cm}$$



ב.

$$\angle G_1 \stackrel{(5)}{=} \angle E_2 \stackrel{(1)}{=} \angle E_1, \angle D_1 \stackrel{(5)}{=} \angle E_1 \Rightarrow \angle G_1 = \angle D_1 \Rightarrow (6) ED = GE (\checkmark)$$

אפשר גם:

$$(1) \angle E_1 = \angle E_2 \Rightarrow (7) \frac{BC}{DC} = \frac{BE}{ED} \Rightarrow \frac{8x}{5x} = \frac{4}{ED} \Rightarrow ED = \frac{4 \cdot 5}{8} = 2.5 \text{ cm}$$

$$(8) GE = 2.5 \text{ cm} \Rightarrow ED = GE (\checkmark)$$

(1) נתון (2) משפט חוצה-זווית במשולש (3) סימון (4) משפט תאלס

(5) זוויות מתאימות או מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי - שוות זו לזו

(6) משולש ששתים מזוויותיו שוות זו לזו - הוא משולש שווה-שוקיים

(7) משפט חוצה-זווית חיצונית במשולש ($\triangle BDE$) (מחוץ לחומר). (8) הוכח בסעיף א

11. א.

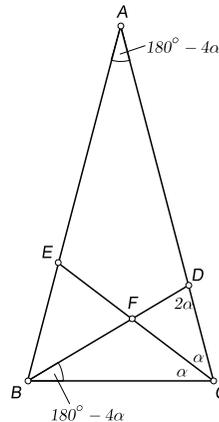
$$(1) \angle BCE = \angle ACE = \alpha \Rightarrow (2) \angle BDC = 2\alpha, \angle ABC = 2\alpha$$

$$\triangle BDC: (3) \angle DBC = 180^\circ - 4\alpha$$

$$\triangle ABC: (3) \angle BAC = 180^\circ - 4\alpha \Rightarrow (4) \triangle AEC \sim \triangle BFC (\checkmark)$$

$$\triangle AEC \sim \triangle BFC \Rightarrow \text{יחס הדמיון} = \frac{AC}{BC} = \frac{4a}{2a} = 2$$

$$\Rightarrow (5) \frac{AE+EC+CA}{BF+FC+CB} = 2$$



ב.

$$\triangle AEC \sim \triangle BFC \Rightarrow \frac{EC}{FC} = 2 \Rightarrow EF = FC (\checkmark)$$

(1) סימון (2) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו (3) השלמה ל- 180° במשולש

(4) משפט דמיון זווית-זווית (5) יחס היקף משולשים דומים שווה ליחס הדמיון

גאומטריה אוקלידית - ב - מעגל ללא פרופורציה

לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות. המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה. כל השאלות שאין מצוין אחרת - נלקחו משאלון 005. שאלות עם כוכביות ניתן לפותרן גם בכלים טריגונומטריים.

שאלות עם קו נטוי - מתייחסות למבחנים. דוגמה: $3/4$ - מבחן מס' 3 שאלה מספר 4.

כוכבית מציינת שאלות מעורבות גאומטריה-טריגונומטריה. את החלוקה הכין שרון חיים.

מטעמים מיוחדים ונקודות מפגש	משולשים
- מפגש תיכונים	- חפיפה
12	7, 11, 12, $1/4$, $3/5$, $10/5^*$, $11/5$, $19/4$, $21/4$
- קטע אמצעים במשולש	- משולש שווה-צלעות
$5/4$	1, 5, 9, 13, $5/4$, $10/5^*$
- תיכון ליתר	- משולש $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$
6, $17/4$	1, 10
שטחים	- משפט פיתגורס
$6/4$, $17/4$	11, $7/5^*$
מעגל	מרובעים
- משולש חסום במעגל (מעגל חוסם משולש)	- דלתון
5, $3/5$, $21/4$	2, $6/4$, $11/5$
- מרובע חסום במעגל (מעגל חוסם מרובע)	- מקבילית
5, 9, 12, $4/5$, $5/4$, $6/4$, $22/4$, $26/4$	9, 13
- מעגל חסום במרובע (מרובע חוסם מעגל)	- מעוין
$8/5^*$, $11/5$	8, $10/5^*$, $22/4$
- שני מעגלים	- ריבוע
3, 6, $4/5$	4
- קטע מרכזים	- טרפז
6	$8/5^*$
	- טרפז שווה-שוקיים
	7, $11/5$



בעיית אתגר

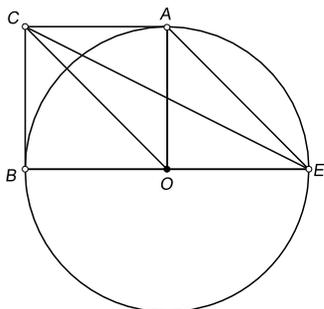
PQ הוא מיתר במעגל. $PO = OQ$.

דרך O עוברים המיתרים AB ו- CD .

המיתרים AD ו- BC חותכים את PQ בנקודות E ו- F בהתאמה.

הוכח: $EO = OF$.

הפתרון בכלים אוקלידיים (לא טריגונומטריה!).



4. (אביב ס"ח - 2008, לוחמים)

BE הוא קוטר מעגל שמרכזו O.

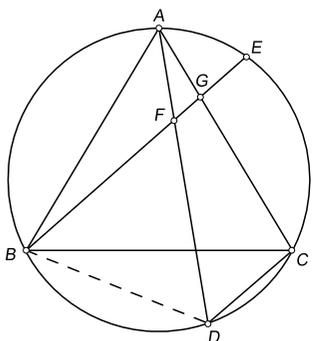
CA ו- CB הם שני משיקים למעגל המאונכים

זה לזה.

הוכח: א. המרובע ACBO הוא ריבוע

ב. $\angle AEC = \angle OCE$

ג. נתון: $S_{\triangle ACE} = 32 \text{ cm}^2$. חשב את רדיוס המעגל. (163)



5. (קיץ תש"ע - 2010, לוחמים)

ABC הוא משולש שווה-צלעות החסום במעגל.

D היא נקודה על הקשת \widehat{BC} , ו- E היא נקודה

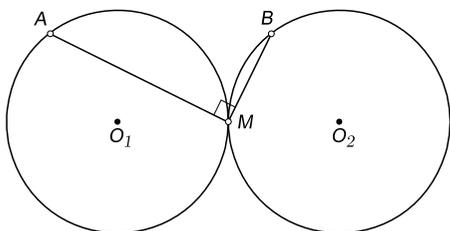
על הקשת \widehat{AC} כך ש- DC מקביל ל- BE.

BE חותך את AD בנקודה F ואת AC בנקודה G.

א. הוכח: $\angle ADC = 60^\circ$.

ב. הוכח: המשולש BFD הוא שווה-צלעות.

ג. הוכח שלא קיים מעגל העובר דרך קדקודי המרובע BGCD. (163)



6. (806, קיץ תש"ע - 2010, מועד ב)

שני מעגלים, שיש להם אותו רדיוס R,

משיקים זה לזה בנקודה M.

מעבירים מיתר MB במעגל שמרכזו O_2 ,

ומיתר MA במעגל שמרכזו O_1 ,

כך ש- $\angle AMB = 90^\circ$.

א. (1) נמק מדוע $\angle O_1MO_2 = 180^\circ$

(2) הוכח: $AO_1 \parallel BO_2$

ב. במשולש AMB העבירו תיכון לצלע AB.

הבע באמצעות R את אורך התיכון. נמק. (164)

הריבוע של 74,162 מורכב מ'זוגות' של ספרות: 5,500,002,244



6. ג. R (יחידות אורך)

4. ג. $R = 8 \text{ cm}$

6. א. (1) נקודת ההשקה של שני המעגלים נמצאת על קטע המרכזים שלהם. שאם לא כן - במשולש MO_1O_2 מתקיים:

$$MO_1 + MO_2 = 2R < O_1O_2$$

סתירה - כי סכום אורכי שתי צלעות במשולש גדול מאורך הצלע השלישית. מכאן ש- $\angle O_1MO_2$ שטוחה ולכן שווה ל- 180° .

(2)

(1) $\angle AMO_1 = \alpha \Rightarrow^{(2)} \angle MAO_1 = \alpha$
 (3) $\angle AO_1M = 180^\circ - 2\alpha$
 (4) $\angle BMO_2 = 90^\circ - \alpha \Rightarrow^{(3)} \angle O_2 = 2\alpha$
 $\Rightarrow \angle O_1 + \angle O_2 = 180^\circ \Rightarrow^{(5)} AO_1 \parallel BO_2 \quad (\checkmark)$

ב.
 $AO_1 = BO_2 = R$, $AO_1 \parallel BO_2 \Rightarrow^{(6)} AB = O_1O_2 = 2R \Rightarrow^{(7)} MC = R$ (יחידות אורך)

- (1) סימון (2) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו (3) השלמה ל- 180° במשולש
 (4) השלמה ל- 180° של זווית שטוחה (5) אם זוויות חד-צדדיות משלימות ל- 180° - הישרים מקבילים
 (6) ABO_2O_1 מקבילית (זוג צלעות מקבילות ושוות), צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו
 (7) תיכון ליתר במשולש ישר-זווית שווה למחצית היתר

7. א.

(1) $AE = BE$, $AD = BC$, (2) $\angle A = \angle B$
 (3) $\triangle EAD \cong \triangle EBC \Rightarrow^{(4)} ED = EC$
 (1) $DF = CF \Rightarrow^{(5)} EF \perp DC \quad (\checkmark)$

ב.
 (1) $OB = OC (= R)$, (6) $OG \perp EF$, (7) $\angle F_1 = 90^\circ \Rightarrow^{(8)} OG \parallel FC$

(9) $GE = GF \Rightarrow^{(10)} GO = \frac{1}{2}(EB + FC) \Rightarrow EB + FC = 2GO \quad (\checkmark)$

- (1) נתון (2) זוויות אותו בסיס בטרפז שווה-שוקיים שוות זו לזו (3) משפט חפיפה צלע-זווית-צלע
 (4) צלעות מתאימות במשולשים חופפים (5) תיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם גובה
 (6) זווית ישרה בין משיק-למעגל לבין רדיוס בנקודת ההשקה (7) מסעיף קודם
 (8) אם זוויות חד-צדדיות בישרים נחתכים ע"י ישר שלישי משלימות ל- 180° - הישרים מקבילים
 (9) ישר המחבר אמצע שוק בטרפז ומקביל לבסיסים - הוא קטע אמצעים בטרפז (EBCF)

גאומטריה אוקלידית - ג - פרופורציה עם מעגל

לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות. המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה. כל השאלות שאין מצוין אחרת - נלקחו משאלון 005. שאלות עם קו נטוי - מתייחסות למבחנים. דוגמה: $3/4$ - מבחן מס' 3 שאלה מספר 4. כוכבית מציינת שאלות מעורבות גאומטריה-טריגונומטריה. את החלוקה הכין שרון חיים.

פרופורציה	משולשים
- משפט חוצה-זווית במשולש 1, 7, 13, 20, 24	- חפיפה 4, 13, 16, 18, 22, $4/4_c$, $27/4$
- משפט תאלס 22, 26, 27	- משפט חפיפה רביעי 24
- דמיון 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 27, $2/5$, $7/4$, $8/4$, $14/4$, $15/4$, $16/5$, $18/4$, $20/4$, $24/4$, $27/4$	- משולש שווה-צלעות 4
- יחס בין שטחי משולשים דומים 6, 10, 16, $2/5$, $14/4$, $15/4$, $24/4$	- משפט פיתגורס 3, 7, 8, 9, 12, 15, 24, $27/4$, $14/4$
- יחס בין היקפי משולשים דומים 24/4	מרובעים - מלבן 9
- משפט דמיון צלע-זווית-צלע 14, $20/4$	- ריבוע 3, 22
מעגל - משולש חסום במעגל (מעגל חוסם משולש) 1, 2, 5, 6, 7, 8, 11, 17, 20, $7/4$	- טרפז 18
- משולש חוסם מעגל (מעגל חסום במשולש) 11	קטעים מיוחדים ונקודות מפגש - קטע אמצעים במשולש 4
- מרובע חסום במעגל (מעגל חוסם מרובע) 14, 16, 18, 22, 25, 26, $4/4_c$, $15/4$, $20/4$, $24/4$	שטחים $4/4$
- מעגל חסום במרובע (מרובע חוסם מעגל) 10/5	בן כמה אמרת שקוראים לך?
- שני מעגלים 10, 25, $8/4$, $15/4$, $27/4$	

המחסר, המחוסר וההפרש

$$1980 - 0891 = 1089 \quad , \quad 5823 - 3285 = 2538 \quad , \quad 7641 - 1467 = 6174$$

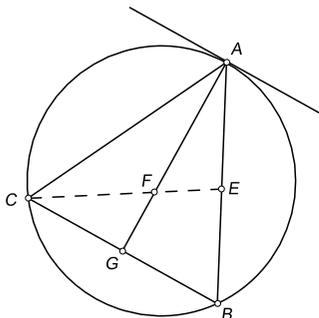
$$3870 - 0783 = 3087 \quad , \quad 2961 - 1692 = 1269 \quad , \quad 9108 - 8019 = 1089$$

המחסר, המחוסר וההפרש מורכבים מאותן ספרות.

אלו כל המספרים בעלי 4 ספרות המקיימים תכונה זו.

(ספר המספרים / דייוויד וולס - הוצאת מי-אן)

7. (סתיו ס"ט - 2009, מועד לוחמים)



משולש ABC חסום במעגל.

המשיק למעגל בנקודה A מקביל לצלע BC.

א. הוכח: $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקים.

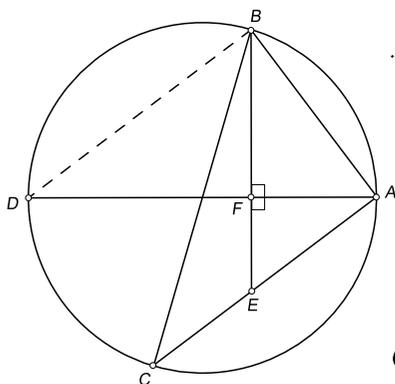
ב. במשולש ABC, הישר AG הוא גובה לצלע BC.

הישר CE הוא חוצה-זווית ACB.

הישרים AG ו-CE נחתכים בנקודה F.

נתון: $AC = 13\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$. חשב את האורך של FG. (185)

8. (חורף ס"ט - 2009)



משולש ABC חסום במעגל. AD הוא קוטר במעגל זה.

דרך הקדקוד B העבירו אנך ל-AD.

האנך חותך את הקוטר בנקודה F.

ואת הצלע AC בנקודה E.

א. הוכח: $\triangle AEB \sim \triangle ABC$.

ב. נתון: $AF = 3.6\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$.

מצא את האורך של: AE (1) BE (2). (185)

9. (חורף ס"ט - 2009, מועד מיוחד)

מרובע ABCD הוא מלבן.

הקדקודים של המלבן, B ו-C, נמצאים על המעגל.

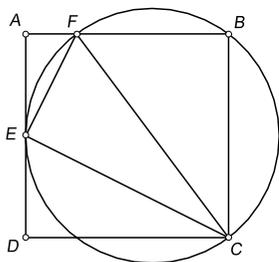
הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E.

והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה F.

א. הוכח כי $\triangle DCE \sim \triangle ECF$.

נתון: $EC = 3.8\text{cm}$, $ED = 1.5\text{cm}$.

חשב את האורך של: א. AE ב. FC ג. AE. (186)



7. ב. $FG = 3\frac{1}{3}\text{cm}$

8. ב. (1) $AE = 4.5\text{cm}$ (2) $BE = 7.5\text{cm}$

9. ב. $FC = 4.14\text{cm}$ ג. $AE = 1.5\text{cm}$

(1) $\angle B = \angle D = 90^\circ \Rightarrow (2) FC = 2R \Rightarrow (3) \angle FEC = 90^\circ$

(4) $\angle DEC = \angle EFC \Rightarrow (5) \triangle DCE \sim \triangle ECF (\checkmark)$

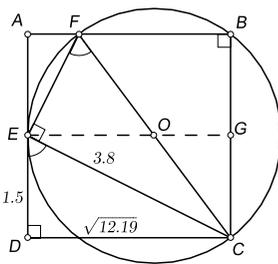
$\triangle EDC$: (6) $DC = \sqrt{3.8^2 - 1.5^2} = \sqrt{12.19}$

$\triangle DCE \sim \triangle ECF \Rightarrow (7) \frac{DC}{EC} = \frac{CE}{CF} \Rightarrow \frac{\sqrt{12.19}}{3.8} = \frac{3.8}{CF}$

$\Rightarrow CF = \frac{3.8^2}{\sqrt{12.19}} \Rightarrow CF = 4.14 \text{cm}$

(8) $\angle OED = 90^\circ \Rightarrow (9) \angle OGC = 90^\circ$.ג. ב"ע: הישר EOG (O - מרכז המעגל).

(10) $CG = GB \Rightarrow (11) ED = CG = GB = AE \Rightarrow AE = 1.5 \text{cm}$



9.9 א.

ב.

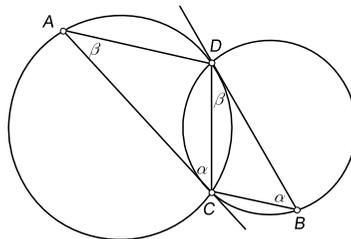
- (1) זוויות מלבן ישרות (2) זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר (3) זווית היקפית הנשענת על קוטר - ישרה (4) זווית בין מיתר למשיק שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני (5) משפט דמיון זווית-זווית (6) משפט פיתגורס (7) יחס הדמיון (8) זווית בין רדיוס למשיק - ישרה (9) השלמה ל- 360° במרובע EGCD (10) קטע ממרכז מעגל המאונך למיתר - חוצה את המיתר (11) ABGE ו-EDCG מלבנים

(1) $\angle ACD = \angle CBD = (2) \alpha$, (1) $\angle CDB = \angle CAD = (2) \beta$

$\triangle BCD$: (3) $\angle BCD = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$\triangle ADC$: (3) $\angle ADC = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$\Rightarrow \angle BCD = \angle ADC \Rightarrow (4) AD \parallel BC (\checkmark)$

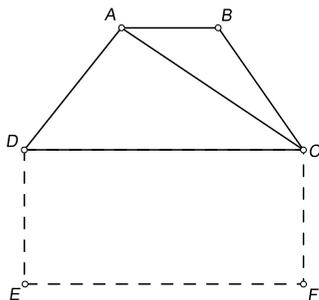


ב.

(5) $\triangle ADC \sim \triangle DCB \Rightarrow (6) \frac{AD}{DC} = \frac{DC}{CB} \Rightarrow \frac{9}{DC} = \frac{DC}{4} \Rightarrow DC^2 = 36 \Rightarrow CD = 6 \text{cm}$

$\frac{AD}{DC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow (7) S_{\triangle ADC} : S_{\triangle DCB} = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow S_{\triangle ADC} : S_{\triangle DCB} = 2\frac{1}{4}$

- (1) זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו האחר (2) סימון (3) השלמה ל- 180° במשולש (4) שני ישרים הנחתכים ע"י ישר שלישי, זוג זוויות מתאימות שוות זל"ז - שני הישרים מקבילים זל"ז (5) משפט דמיון זווית-זווית (6) יחס הדמיון (7) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון



11. (חורף ס"ט - 2009, לוחמים)

בציור שלפניך AC הוא אלכסון בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$).

$AB = 8\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, $DC = 23\text{cm}$, $\angle BCD = 57^\circ$.

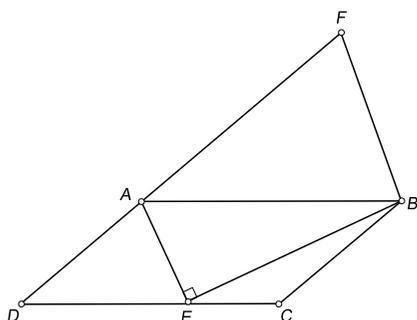
א. חשב את אורך האלכסון AC של הטרפז.

ב. חשב את גודל הזווית ACD.

ג. על הצלע CD של הטרפז בנו מלבן CDEF

ששטחו 253 סמ"ר.

(211) חשב את אורך הקטע AF.



12. (קיץ ס"ט - 2009, מועד א)

במקבילית ABCD נתון: נקודה E נמצאת

על הצלע DC כך ש- $\angle AEB = 90^\circ$.

נקודה F נמצאת על המשך הצלע AD.

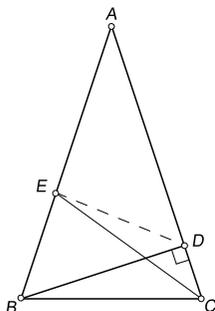
נתון: $AD = 10\text{cm}$, $\angle ABE = 25^\circ$

$\angle DFB = 70^\circ$, $\angle ADC = \alpha$

א. (1) הבע באמצעות α את אורך הקטע AE.

(2) הבע באמצעות α את שטח המשולש ABF.

ב. נתון גם כי $AF = AB$. חשב את שטח המקבילית ABCD (ערך מספרי). (212)



13. (קיץ ס"ט - 2009, מועד ב) במשולש שווה-שוקיים ABC נתון:

$AB = AC = 10\text{cm}$, $\angle ACB = \beta$

BD הוא גובה לשוק, ו- CE חוצה את הזווית ACB.

א. הבע באמצעות β את האורך של הקטע AE.

ב. הבע באמצעות β את שטח המשולש AED.

ג. נתון גם $\angle DBC = \frac{\beta}{4}$.

חשב את שטח המשולש AED (ערך מספרי). (213)

תשובות

11. א. $AC = 17.68\text{cm}$ ב. $\angle ACD = 34.7^\circ$ ג. $AF = 25.59\text{cm}$

12. א. (1) $AE = 11.03 \sin \alpha \text{ cm}$ (2) $S_{\Delta} = 362.53 \sin^3 \alpha \sin (110^\circ - \alpha) \text{ cm}^2$ ב. $S_{ABCD} = 107.9 \text{ cm}^2$

13. א. $AE = \frac{10 \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{3\beta}{2}} \text{ cm}$ ב. $S_{\Delta AED} = -\frac{50 \sin \frac{\beta}{2} \cos 2\beta \sin 2\beta}{\sin \frac{3\beta}{2}} \text{ cm}^2$ ג. $S_{\Delta AED} = 14.69 \text{ cm}^2$

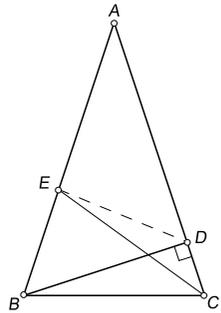
$\triangle AEC$: (1, 2) $\angle A = 180^\circ - 2\beta$, (3) $\angle ACE = \frac{\beta}{2} \Rightarrow$ (2) $\angle AEC = \frac{3\beta}{2}$ **13. א.**

(4) $\frac{AE}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{10}{\sin \frac{3\beta}{2}} \Rightarrow AE = \frac{10 \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{3\beta}{2}} \text{ cm}$

$\triangle ADB$: $\frac{AD}{10} = \cos (180^\circ - 2\beta) \stackrel{(5)}{=} -\cos 2\beta \Rightarrow AD = -10 \cos 2\beta$

$S_{\triangle AED} \stackrel{(6)}{=} \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AD \cdot \sin (180^\circ - 2\beta) \stackrel{(7)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{3\beta}{2}} \cdot (-10 \cos 2\beta) \cdot \sin 2\beta$

$S_{\triangle AED} = -\frac{50 \sin \frac{\beta}{2} \cos 2\beta \sin 2\beta}{\sin \frac{3\beta}{2}} \text{ cm}^2$



ג.

(2) $\angle DBC = 90^\circ - \beta = \frac{\beta}{4} \Rightarrow \frac{5\beta}{4} = 90^\circ \Rightarrow \beta = \frac{90^\circ \cdot 4}{5} = 72^\circ$

$S_{\triangle AED} = -\frac{50 \sin \frac{\beta}{2} \cos 2\beta \sin 2\beta}{\sin \frac{3\beta}{2}} = -\frac{50 \sin 36^\circ \cos 144^\circ \sin 144^\circ}{\sin 108^\circ} \Rightarrow S_{\triangle AED} = 14.69 \text{ cm}^2$

(1) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו (2) השלמה ל- 180° במשולש (3) נתון

(4) משפט הסינוסים (5) זהות: $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ (6) נוסחת שטח משולש

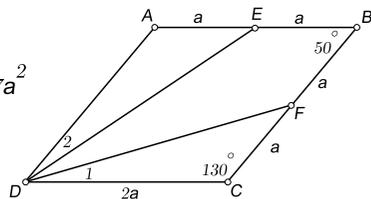
(7) זהות: $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

14. א.

$\triangle DCF$: (1) $CF = a$, $DC = 2a$, (2) $\angle C = 130^\circ$

(3) $DF^2 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos 130^\circ = 5a^2 + 2.57a^2$

$DF^2 = 7.57a^2 \Rightarrow DF = 2.75a$ (יחידות אורך)



ב.

$\triangle DCF$: (4) $\frac{CF}{\sin \angle D_1} = \frac{DF}{\sin 130^\circ} \Rightarrow \sin \angle D_1 = \frac{a \sin 130^\circ}{2.75a} = 0.2784 \Rightarrow \angle D_1 = 16.16^\circ$

(5) $\angle D_1 = \angle D_2 \Rightarrow \angle EDF = 50^\circ - 2 \cdot 16.16^\circ \Rightarrow \angle EDF = 17.67^\circ$

$2a = 4 \text{ cm} \Rightarrow a = 2 \text{ cm}$

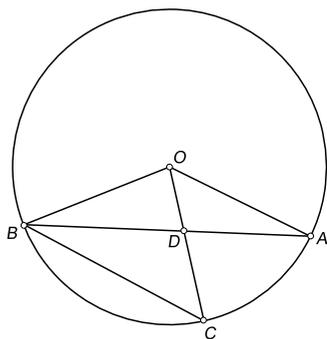
ג.

$S_{EBFD} = S_{ABCD} - 2 S_{\triangle DCF} = 2a \cdot 2a \cdot \sin 50^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot 2a \cdot \sin 130^\circ$

$S_{EBFD} = 16 \cdot \sin 50^\circ - 8 \sin 130^\circ \Rightarrow S_{EBFD} = 6.13 \text{ cm}^2$

(1) נתון (2) השלמה ל- 180° של זוויות חד-צדדיות במקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי

(3) משפט הקוסינוסים (4) משפט הסינוסים (5) $\triangle EAD \cong \triangle FCD$ (צלע-זווית-צלע)



5. (קיץ ס"ח - 2008, מועד א) AB ו-BC הם מיתרים במעגל

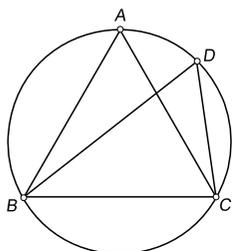
שמרכזו O. OC ו-AB נחתכים בנקודה D.

נתון: $\angle OAD = \beta$, $\angle AOD = \alpha$, $OB = R$

א. הבע באמצעות α ו- β את היחס: $\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOC}}$.

ב. נתון גם: $\alpha = \beta$ וכן: $\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{2}{3}$

מצא את הזווית α . (230)



6. (קיץ ס"ח - 2008, מועד לוחמים) ABC הוא משולש שווה-שוקים

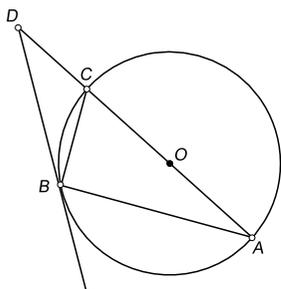
($AB = AC$) החסום במעגל. D היא נקודה על הקשת AC.

נתון: $DC = 5\text{cm}$, $AB = 7\text{cm}$, $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{49}{40}$.

כל הזוויות בשני המשולשים הן זוויות חדות.

א. חשב את האורך של הצלע BD.

ב. חשב את זוויות המשולש BDC, אם נתון כי שטח המשולש BDC הוא $10\sqrt{3}$ י"ר. (230)



7. (סתיו תש"ע - 2009, מועד לוחמים)

משולש ABC חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.

AC הוא קוטר במעגל. המשיק למעגל בנקודה B

חותך את המשך הקוטר AC בנקודה D.

נתון: $\angle BAC = \alpha$.

א. (1) בטא באמצעות α את זוויות המשולש BDC.

(2) בטא באמצעות R ו- α את האורך של שתי הצלעות הקצרות במשולש BDC.

ב. נתון גם כי המשולש CBD הוא שווה-שוקיים. מצא את α . (231)

סכום מינימלי של מרחקים

מהי הנקודה במרובע קמור שסכום מרחקיה מכל אחד מקדקודי המרובע הוא מינימלי?
תשובה (בצופן א"ת ב"ש): יורב תכפטמ ציגפשו (צפלוס!)

תהלות

5. א. $\frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ ב. $\alpha = 41.41^\circ$

6. א. $BD = 8\text{cm}$ ב. $\angle C = 81.79^\circ$, $\angle D = 60^\circ$, $\angle B = 38.21^\circ$

7. א. (1) $\angle D = 90^\circ - 2\alpha$, $\angle C = 90^\circ + \alpha$, $\angle B = \alpha$ (2) $BC = 2R \sin \alpha$, $CD = \frac{2R \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$ ב. $\alpha = 30^\circ$

5. א.

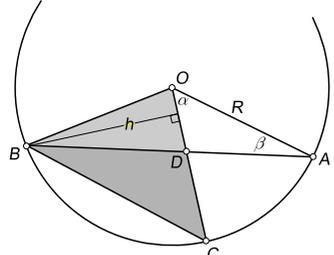
הצלעות OD ו-OC במשולשים BOD ו-BOC נמצאות על ישר אחד.
 הקודקוד מולן (B) משותף. לכן הגובה לאותן צלעות משותף.
 לכן היחס בין שטחיהם שווה ליחס הצלעות המתאימות: $\frac{OD}{OC}$.

$\triangle DAO$: (1) $\angle D = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

(2) $\frac{OD}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin (180^\circ - (\alpha + \beta))} \stackrel{(3)}{=} \frac{R}{\sin (\alpha + \beta)}$

$\Rightarrow OD = \frac{R \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$

$\frac{OD}{OC} = \frac{\frac{R \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}}{R} \Rightarrow \frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$



ב.

$\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{2}{3}$, $\alpha = \beta \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2}{3}$

$0^\circ < \alpha < 180^\circ$

(4) $\frac{\sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{3} \cdot 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 41.41^\circ$

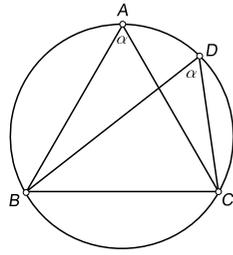
(1) השלמה ל- 180° במשולש (2) משפט הסינוסים

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ (4) $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ (3)

6. א.

(1) $\angle A = \angle D \stackrel{(2)}{=} \alpha$, (3) $AB = AC = 7\text{cm}$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{\frac{7 \cdot 7 \cdot \sin \alpha}{2}}{\frac{5 \cdot BD \cdot \sin \alpha}{2}} = \frac{49}{40} \Rightarrow \frac{49}{5 \cdot BD} = \frac{49}{40} \Rightarrow BD = 8\text{cm}$



ב.

$S_{\triangle BDC} = \frac{8 \cdot 5 \cdot \sin \alpha}{2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

$\angle A = 60^\circ \Rightarrow \stackrel{(3)}{\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ} \Rightarrow \stackrel{(4)}{AB = AC = BC = 7\text{cm}}$

$\triangle BDC$: (5) $\frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{5}{\sin \angle B} \Rightarrow \sin \angle B = 0.6186 \Rightarrow \angle B = 38.21^\circ$ (נתון: הזוויות חדות)

$\angle C = 180^\circ - 60^\circ - 38.21^\circ = 81.79^\circ \rightarrow \angle B = 38.21^\circ, \angle D = 60^\circ, \angle C = 81.79^\circ$

(1) זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת - שוות זו לזו (2) סימון

(3) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו ($\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$)

(4) משולש שזוויותיו הן 60° הוא משולש שווה-צלעות (5) משפט הסינוסים

14. (קיץ תשע"א - 2011, מועד א) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2} + a$, $a > 0$. פרמטר.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את האסימפטוטה של גרף הפונקציה המקבילה לציר x .

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ג. (1) האם נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת מעל האסימפטוטה או מתחתיה? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה. (256)

15. (קיץ תשע"א - 2011, לוחמים) נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2-3}{(x+1)^2}$.

א. מצא את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) האסימפטוטות של הפונקציה, המקבילות לצירים.

(3) נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(4) נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

(5) תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נסמן ב- A את נקודת החיתוך של האסימפטוטה האופקית של הפונקציה עם גרף הפונקציה.

נסמן ב- C את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y . (257)

הראה כי הישר העובר דרך הנקודות A ו- C משיק לגרף הפונקציה בנקודה A .

הפרדוקסים של זנון - למה אכילס לא ישיג את הצב

זנון, פילוסוף יווני, 435-495 לפנה"ס, נהג להציג פרדוקסים מתמטיים רבים.

אחד מהמפורסמים שבהם הוא זה: אכילס והצב עורכים ביניהם תחרות ריצה. אכילס נותן לצב מקדמה של 100 מ'.

אכילס מהיר מהצב פי 10. התחרות מתחילה. כשאכילס עובר 100 מ', הצב משיג אותו ב-10 מ'. כשאכילס עובר את

אותם 10 מ', הצב משיג אותו במטר. כשאכילס עובר את המטר, משיג אותו הצב ב-10 ס"מ וכך הלאה עד אינסוף.

יוצא מכאן, שכל פעם שאכילס ידביק את הפער שבינו לבין הצב - הצב ישיג אותו בעשירית הפער האחרון שהיה

ביניהם. אם כך אכילס לא יצליח להשיג את הצב לעולם. . .

מצד שני ברור שהוא ישיג אותו.

נו, טוב, לכן זה פרדוקס . . . (בסוף אכילס מת, בלי קשר לצב).

תשובות

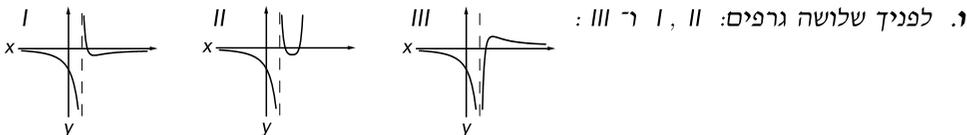
14. א. $\forall x$ ב. (1) $y = a + 1$ (2) $(0, a)$ (3) $\min(0, a)$ ג. (1) מתחת לאסימפטוטה

15. א. (1) $x \neq -1$ (2) $x = -1, y = 1$ (3) $(\pm\sqrt{3}, 0), (0, -3)$ (4) $\max(-3, 1\frac{1}{2})$

(5) $\nearrow: (x < -3) \cup (x > 1), \searrow: -3 < x < -1$

16. (חורף תשע"ב - 2011) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-2}{(2x-2)^2}$

- מצא את: א. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 ג. האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
 ד. השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).
 ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



(258) איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמק.

17. (חורף תשע"ב - 2012, לוחמים)

נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2}{x^2+a} - \frac{1}{2}$, $a \neq 0$ פרמטר. הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 1$.
 א. מצא את הערך של a . נמק.



הצב $a = -1$, וענה על הסעיפים הבאים:

- ב. מצא את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.
 (2) האסימפטוטות של גרף הפונקציה המקבילות לצירים.
 (3) נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
 (4) תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ד. רשום את תחום הערכים של x , שבו y חיובי וגם y' חיובי.

(259)

גוגל ראשוני

6006LE

אם תהפכו את הכיתוב של גוגל שבציור, תקבלו את המספר הראשוני: 379,009.

(Prime curios)

תהלות

16. א. $x \neq 1$ ב. $(0, -\frac{1}{2}), (2, 0)$ ג. $x = 1, y = 0$ ד. $\max(3, \frac{1}{16})$ ו. 1

17. א. $a = -1$ ב. $x \neq \pm 1$ (1) $x = \pm 1, y = \frac{1}{2}$ (2) $\max(0, -\frac{1}{2})$ (3)

ב. (4) $(0 < x < 1) \cup (x > 1)$, $\searrow: (x < -1) \cup (-1 < x < 0)$, $\nearrow: x < -1$ ד.

חשבון דיפרנציאלי - פונקציות רציונאליות - פתרונות

א. 1. $f(x) = -\frac{1}{x^2 - 4x + m}$

$x = 1 \Rightarrow 1^2 - 4 \cdot 1 + m = 0 \Rightarrow m = 3$

ב.

$y = -\frac{1}{x^2 - 4x + 3}$, $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$
 $\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1 \Rightarrow x = 3$

ג.

$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})} = -\frac{1}{\infty(1-0+0)} = -\frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$

$f'(x) = (-\frac{1}{x^2 - 4x + 3})' = -(-\frac{2x-4}{(x^2-4x+3)^2}) = \frac{2x-4}{(x^2-4x+3)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 2$

$(2x-4)' = 2 \Rightarrow f''(2) > 0 \Rightarrow x_{\min} = 2$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2^2 - 4 \cdot 2 + 3} = -\frac{1}{-1} = 1 \Rightarrow \min(2, 1)$

א. 2. $g(x) = \frac{x^2 - k}{x + 5}$, $g'(-2) = -\frac{7}{9}$; $k = ?$

$g'(x) = \frac{2x(x+5) - 1 \cdot (x^2 - k)}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x + k}{(x+5)^2}$

$g'(-2) = \frac{4 - 20 + k}{3^2} = \frac{k - 16}{9} = -\frac{7}{9} \Rightarrow k = -7 + 16 \Rightarrow k = 9$

ב. (1)

$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 5} \Rightarrow x \neq -5$

(2)

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{9}{5} \Rightarrow (0, -1\frac{4}{5})$; $y = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow (\pm 3, 0)$

(3)

$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 9}{x + 5} = \frac{16}{0} = \infty \Rightarrow$ אסימפטוטה אנכית $x = -5$

(4)

$g'(x) = \frac{x^2 + 10x + k}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x + 9}{(x+5)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-10 \pm 8}{2} = -5 \pm 4$

$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -9$

מכנה הנגזרת הראשונה חיובי. לכן מספיק לגזור את מונה הנגזרת הראשונה:

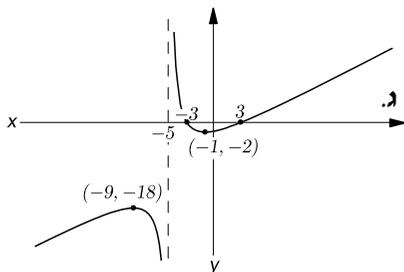
$(x^2 + 10x + 9)' = 2x + 10$

$2 \cdot (-1) + 10 > 0 \Rightarrow g''(-1) > 0 \Rightarrow x_{\min} = -1$

$2 \cdot (-9) + 10 < 0 \Rightarrow g''(-9) < 0 \Rightarrow x_{\max} = -9$

$g(-1) = \frac{1-9}{4} = -\frac{8}{4} = -2 \Rightarrow \min : (-1, -2)$

$g(-9) = \frac{81-9}{-4} = \frac{72}{-4} = -18 \Rightarrow \max : (-9, -18)$



2. א. $y = \frac{1}{x^2 - Ax}$, $y'(1) = \frac{2}{9}$; $A = ?$

$y' = -\frac{1}{(x^2 - Ax)^2} \cdot (2x - A) \Rightarrow y'(1) = -\frac{2-A}{(1-A)^2} = \frac{2}{9} \Rightarrow 9A - 18 = 2 - 4A + 2A^2$

$2A^2 - 13A + 20 = 0 \Rightarrow A_{1,2} = \frac{13 \pm 3}{4} \Rightarrow A_1 = 4, A_2 = 2\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{x^2 - 4x} \Rightarrow x^2 - 4x \neq 0 \Rightarrow x(x - 4) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, x \neq 4$

$y' = -\frac{1}{(x^2 - 4x)^2} \cdot (2x - 4) = \frac{4 - 2x}{(x^2 - 4x)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$

המכנה של הנגזרת הראשונה חיובי בנקודה החשודה,

לכן מספיק לגזור את מונה הנגזרת הראשונה:

$(4 - 2x)' = -2 \Rightarrow y''(2) < 0 \Rightarrow x_{\max} = 2$

$y(2) = \frac{1}{2^2 - 4 \cdot 2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \max(2, -\frac{1}{4})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - 4x} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$ אסט. אנכית $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x^2 - 4x} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$ אסט. אנכית $x = 4$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2(1 - \frac{4}{x})} = \frac{1}{\infty(1-0)} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$ אסט. אופקית $y = 0$

x		0		2		4	
y'	$\frac{+}{+} = +$	\emptyset	$\frac{+}{+} = +$	0	$\frac{-}{+} = -$	\emptyset	$\frac{-}{+} = -$
y	\nearrow	asym.	\nearrow	max	\searrow	asym.	\searrow

$\Rightarrow \nearrow: (x < 0) \cup (0 < x < 2)$, $\searrow: (2 < x < 4) \cup (4 < x)$

ג'ון וואליס (John Wallis 1616-1703) היה אחד המתמטיקאים המוכשרים והמקוריים ביותר של המאה ה-17.

הוא הראשון שהשתמש בסימון ' ∞ ' לציון אינסוף.

הוא היה מסוגל למצוא בעל פה את החלק השלם של השורש הריבועי של $3 \cdot 10^4$ או של מספר בעל 53 ספרות!

חודש ימים לאחר שחישב את המספר, הוא היה מסוגל להכתיב אותו ללא שגיאה.

בנוסף לכך, היתה לו יכולת בלתי רגילה לפענח צפנים.

הוא הצליח לפענח מסרים מקודדים לטובת חברי הפרלמנט שהתנגדו למלך צ'רלס הראשון בתקופת מלחמת

האזרחים באנגליה (1642-1649).

קיצור תולדות המתמטיקה - פרופסור בנו ארבל

$$y = 1 + \frac{Ax^2}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{Ax^2}{x^2 - 4}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{Ax^2}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}\right) = 1 + \frac{A}{1-0} = 1 + A = 4 \Rightarrow A = 3$$

ג. (1)

$$y = 1 + \frac{3x^2}{x^2 - 4} \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

(2)

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 + \frac{0}{-4} = 1 + 0 \Rightarrow (0, 1)$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4 + 3x^2}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow (\pm 1, 0)$$

(3)

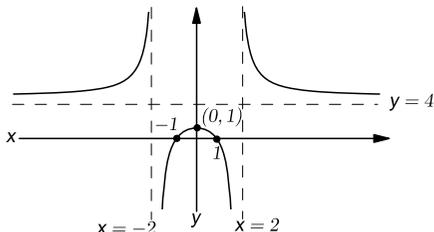
$$\lim_{x \rightarrow \pm 2} \left(1 + \frac{3x^2}{x^2 - 4}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm 2} \left(1 + \frac{12}{0}\right) = 1 + \infty = \infty \Rightarrow x = \pm 2$$

(4)

$$y' = 0 + \frac{6x(x^2 - 4) - 2x \cdot 3x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-24x}{(x^2 - 4)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

x		-2		0		2	
f'	$\frac{-}{+} = +$	\emptyset	$\frac{-}{+} = +$	0	$\frac{-}{+} = -$	\emptyset	$\frac{-}{+} = -$
f	\nearrow	asym.	\nearrow	max	\searrow	asym.	\searrow

$\Rightarrow \max(0, 1)$



ג.

הוכחה מהספר'

המתמטיקאי היהודי-הונגרי פאול ארדש (Paul Erdos, 1913-1996) טען שלבורא העולם יש ספר שבו הוא שומר את כל ההוכחות המתמטיות היפות ביותר, האלגנטיות ביותר וגם את כל התשובות לשאלות במתמטיקה שעדיין פתוחות, שטרם נמצא להן מענה. כשהוא היה רוצה להחמיא להוכחה שהיא יפה, הוא היה אומר שזו הוכחה מהספר'.
דוגמה:

משפט: כל בחירה של $k + 1$ מספרים מבין $2k$ מספרים טבעיים עוקבים, תכיל שני מספרים זרים זה לזה.
הוכחה: שני מספרים טבעיים עוקבים - זרים זה לזה (השלם את ההוכחה, זה מאוד פשוט).

כדי לבחור k מספרים זרים מתוך $2k$ המספרים העוקבים, יש לבחור את k המספרים במקומות הווגיים, או את k המספרים במקומות הלא-ווגיים.

לכן: אם בוחרים $k + 1$ מספרים, בהכרח שניים מהם עוקבים, ולכן הם זרים. מה שהיה להוכיח.

5. א. נתון: $y' = \frac{x^2}{a-x}$, $y'(6) = 0$

$$y' = \frac{2x(a-x)+x^2}{(a-x)^2}$$

$$y'(6) = \frac{12(a-6)+36}{(a-6)^2} = \frac{12a-36}{(a-6)^2} = \frac{12(a-3)}{(a-6)^2} = 0 \Rightarrow 12(a-3) = 0 \Rightarrow a = 3$$

1. ב.

$$y = \frac{x^2}{3-x} \Rightarrow x \neq 3$$

2.

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{3} = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

3.

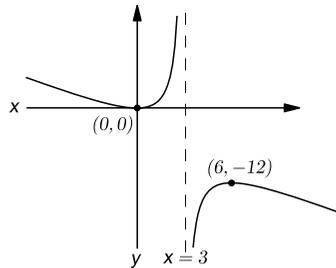
$$y' = \frac{2x(3-x)+x^2}{(3-x)^2} = \frac{x(2(3-x)+x)}{(3-x)^2} = \frac{x(6-x)}{(3-x)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6$$

x		0		3		6	
y'	$\frac{-}{+} = -$	0	$\frac{+}{+} = +$	\emptyset	$\frac{+}{+} = +$	0	$\frac{-}{+} = -$
y	\searrow	min	\nearrow	asym.	\nearrow	max	\searrow

$$y(6) = \frac{36}{3-6} = -12 \Rightarrow (0, 0) \text{ min } (6, -12) \text{ max}$$

4.

$$x = 3 \Rightarrow y = \frac{9}{0} = \infty \Rightarrow x = 3$$



ג.

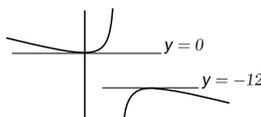
ד. הישר $y = k$ הוא קו אופקי.

בהנחיות משרד החינוך: משיק נקרא גם 'חותך'.

לישר ולפונקציה יש נקודה משותפת אחת בלבד כאשר הישר משיק לגרף הפונקציה,

בנתוני השאלה:

ישר אופקי משיק לגרף הפונקציה בנקודות שבהן $y' = 0$: $(0, 0)$ ו- $(6, -12)$.



$$k_1 = 0, k_2 = -12 \Leftarrow$$

$$f(x) = \frac{5+2x}{4-x^2}$$

$$(1) \quad 4 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

$$(2) \quad x = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow (0, 1\frac{1}{4})$$

$$y = 0 \Rightarrow 5 + 2x = 0 \Rightarrow x = -2\frac{1}{2} \Rightarrow (-2\frac{1}{2}, 0)$$

$$(3) \quad x = 2 \Rightarrow y = \frac{9}{0} = \infty \Rightarrow x = 2$$

$$x = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow x = -2$$

$$x = \infty \Rightarrow y = \frac{5+2x}{4-x^2} = \frac{x(\frac{5}{x} + 2)}{x^2(\frac{4}{x^2} - 1)} = \frac{\frac{5}{x} + 2}{x(\frac{4}{x^2} - 1)} = \frac{0+2}{\infty(0-1)} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$(4) \quad f'(x) = \frac{2(4-x^2) - (-2x)(5+2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{8-2x^2+10x+4x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{2x^2+10x+8}{(4-x^2)^2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$2x^2 + 10x + 8 = 0 \quad / : 2 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -4$$

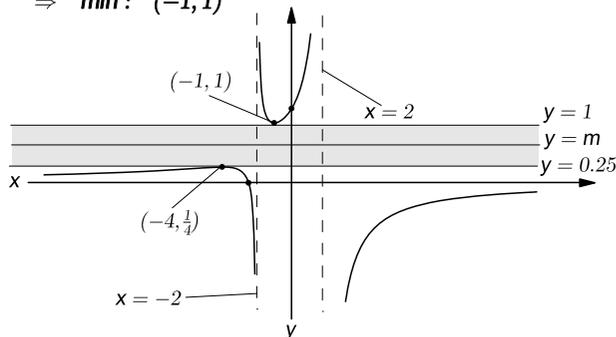
סימן (\pm) הנגזרת השניה בנקודות החשודות שווה לסימן הנגזרת של מונה הנגזרת הראשונה באותן נקודות, כי: סימן המכנה של הנגזרת הראשונה בהן הוא חיובי. ניתן להתעלם גם מהגורם המשותף 2 כי הוא אינו משפיע על הסימן:

$$(x^2 + 5x + 4)' = 2x + 5, \quad 2 \cdot (-4) + 5 < 0 \Rightarrow f''(-4) < 0 \Rightarrow x_{\max} = -4$$

$$2 \cdot (-1) + 5 > 0 \Rightarrow f''(-1) > 0 \Rightarrow x_{\min} = -1$$

$$f(-4) = \frac{5-8}{4-16} = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4} \Rightarrow \max: (-4, \frac{1}{4})$$

$$f(-1) = \frac{5-2}{4-1} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \min: (-1, 1)$$



ב.

$$\frac{1}{4} < m < 1 \Leftrightarrow \text{ג. ראה ציור}$$

13. א. (1)

$$f(x) = \frac{ax}{x+a}, \quad x+a \neq 0 \Rightarrow x \neq -a$$

(2)

$$f'(x) = \frac{a(x+a) - 1 \cdot ax}{(x+a)^2} = \frac{ax+a^2-ax}{(x+a)^2} = \frac{a^2}{(x+a)^2} = \frac{+}{+} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (\checkmark)$$

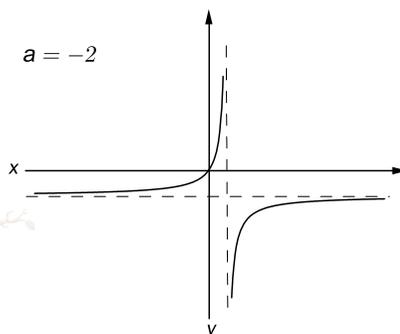
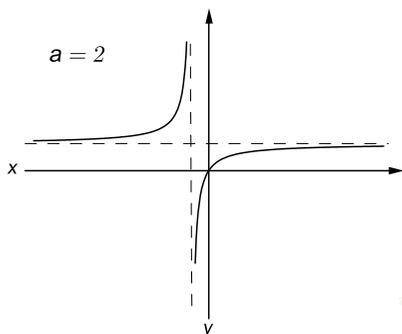
(3)

$$\frac{ax}{x+a} = 0 \Rightarrow ax = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow -a} \frac{ax}{x+a} = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{-a^2}{0} = \infty \Rightarrow x = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{a+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x(\frac{a}{x} + 1)} = \frac{a}{\rightarrow 0 + 1} = \frac{a}{1} = a \Rightarrow y = a$$



ב.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+2} + a, \quad a > 0, \quad x^2 \geq 0, \quad 2 > 0 \Rightarrow x^2 + 2 \neq 0 \Rightarrow \forall x$$

14. א.

(1) ב.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2+2} + a \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2(1 + \frac{2}{x^2})} + a \right) = \frac{\rightarrow 1}{\rightarrow (1+0)} + a = a + 1 \Rightarrow y = a + 1$$

(2)

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 + a = a \Rightarrow (0, a)$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+2} + a = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + ax^2 + 2a}{x^2+2} = 0$$

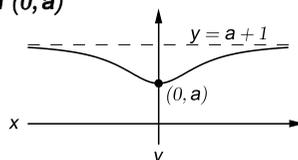
$$\Rightarrow x^2(1+a) + 2a = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-2a}{1+a} < 0 \Rightarrow \emptyset$$

(3)

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+2) - 2x \cdot x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{4x}{(x^2+2)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

x		0	
f'	$\frac{-}{+} = -$	0	$\frac{+}{+} = +$
f	\searrow	min	\nearrow

$$f(0) = a \Rightarrow \min(0, a)$$



ג. (1)-(2)

$$y_{\min} = a, \quad y_{\text{as.}} = a + 1$$

$a < a + 1 \Rightarrow$ מתחת לאסימפטוטה

10. (קיץ תש"ע - 2010, מועד א, המבחן הגנז) נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{a-x^2}$, $a > 0$ פרמטר.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=0$ הוא 2. (273)

א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. הצב את ערך a שמצאת, ומצא את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(3) נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. העבירו שני ישרים המשיקים לגרף הפונקציה ומקבילים לציר x .

מצא את המרחק בין שני המשיקים.

11. (קיץ תשע"ב - 2012, מועד ב) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

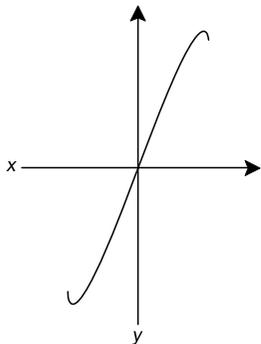
ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. מצא את האסימפטוטה המאונכת לציר x של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$. (274)

ו. מצא עבור אילו ערכי k , הישר $x=k$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.



12. (004, חורף תשע"ג - 2013)

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x + x\sqrt{4-x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. לפונקציה יש מינימום מוחלט ומקסימום מוחלט כמתואר בציור.

מצא את השיעורים של נקודת המקסימום המוחלט

ושל נקודת המינימום המוחלט.

(275)

ג. נתון הישר $y=k$, $k > 0$.

עבור אילו ערכים של k , הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות?

תשובות

10. א. $a=4$ ב. $-2 \leq x \leq 2$ (1) $(\pm 2, 0)$ (2) $(0, 0)$ (3) $\min(-\sqrt{2}, -2)$, $\max(\sqrt{2}, 2)$ ד. $d=4$ (א')

11. א. $(-4 \leq x < 0) \cup (x > 0)$ ב. $(-4, 0)$ ג. $x=0$ ד. $(-4 < x < 0) \cup (x > 0)$ ז': \emptyset , ז'': \emptyset

ו. $(k=0) \cup (k < -4)$

12. א. $-2 \leq x \leq 2$ ב. $\min_{ab}(-1.86, -8.81)$, $\max_{ab}(1.86, 8.81)$ ג. $8 \leq k < 8.81$

9. א.

$$f(x) = -3x\sqrt{x^2 - x}, \quad x^2 - x \geq 0, \quad x_{1,2} = 0, 1 \Rightarrow \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \\ 1 \\ + \end{array} \Rightarrow (x \leq 0) \cup (x \geq 1)$$

ב.

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0), \quad y = 0 \Rightarrow x = 0, 1 \Rightarrow (1, 0)$$

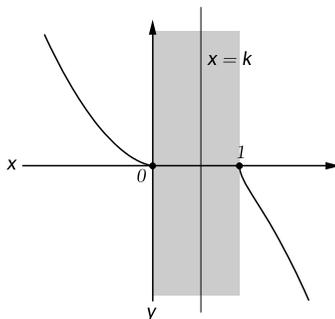
ג.

$$f'(x) = -3(1 \cdot \sqrt{x^2 - x} + x \cdot \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}) = -3 \cdot \frac{2x^2 - 2x + 2x^2 - x}{2\sqrt{x^2-x}} = \frac{-3(4x^2 - 3x)}{2\sqrt{x^2-x}} \stackrel{?}{=} 0$$

$$x_1 = 0 \quad (\checkmark), \quad x_2 = \frac{3}{4} \quad (\times): \quad x = \frac{3}{4} \notin \{(x \leq 0) \cup (x \geq 1)\}$$

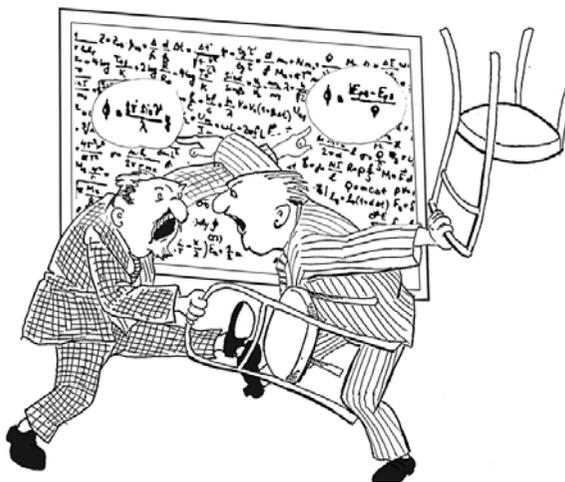
x		0		1	
y'	$\frac{-}{+} = -$	0	\emptyset	0	$\frac{-}{+} = -$
y	\searrow	min _{ep.}	\emptyset	max _{ep.}	\searrow

ד.



ה. ישירות מהגרף

ומהגדרת הפונקציה: $0 < k < 1$



בעיה פיתגורית פתוחה

בהינתן שלִּשָּׁה פיתגורית $x^2 + y^2 = z^2$ (x, y, z טבעיים).

ניתן למצוא מימדי תיבה $a \times b \times h$, כך שכל מימדיה מספרים טבעיים.

וגם כל אלכסוני פיאותיה טבעיים.

הנוסחאות הן אלו: $a = x(4y^2 - z^2)$, $b = y(4x^2 - z^2)$, $h = 4xyz$.

דוגמה: $3^2 + 4^2 = 5^2$ (שלִּשָּׁה פיתגורית). $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.

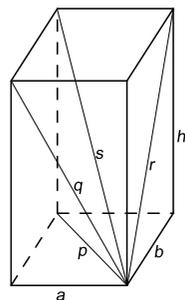
אזי: $a = 3(4 \cdot 4^2 - 5^2) = 117$, $b = 4(4 \cdot 3^2 - 5^2) = 44$, $h = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 240$

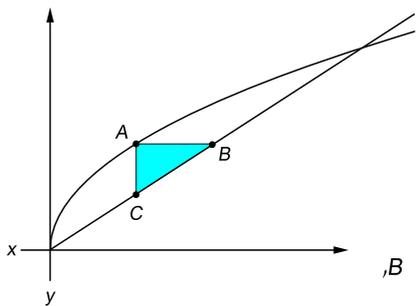
מתקיים:

$$p = \sqrt{117^2 + 44^2} = 125, \quad q = \sqrt{117^2 + 240^2} = 267, \quad r = \sqrt{44^2 + 240^2} = 244 \quad (\checkmark)$$

השאלה הפתוחה (כלומר: שטרם יודעים את פתרונה) היא, האם ניתן למצוא a, b, c טבעיים, כך שגם אלכסון

התיבה (s) יהיה טבעי, בנוסף לאלכסוני הפאות.





17. (004, סתיו ס"ט - 2008, מועד לוחמים)

בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{6}x \quad \text{בתחום } x \geq 0$$

מהנקודה A שעל גרף הפונקציה $f(x)$

מעבירים ישר המקביל לציר x , וישר המאונך לציר x .

הישר המקביל חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B,

והישר המאונך חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה C.

נתון כי שיעור x של הנקודה A הוא t^2 ($0 < t < 6$).

א. הבע באמצעות t את שיעורי הנקודות B ו-C.

ב. הבע באמצעות t את שטח המשולש ABC.

ג. מצא עבור איזה ערך של t , שטח המשולש ABC הוא מקסימלי. (288)

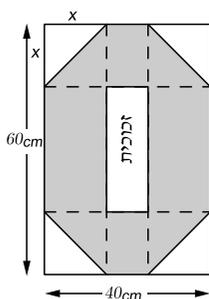
18. (803-003, קיץ תש"ע - 2010, מועד א, המבחן הגנוז)

א. מבין כל המספרים x ו- y החיוביים המקיימים $xy = 75$,

מצא את שני המספרים שעבורם הסכום $3x + y$ הוא מינימלי.

ב. מצא את הערך המינימלי של סכום זה.

(288)



19. (003, סתיו תשע"ב - 2011, לוחמים) אדם הזמין לביתו מרצפות.

כל מרצפת היא בצורת מלבן, אורכה 60cm ורוחבה 40cm .

המרצפת שהוזמנה מורכבת מחרסינה אפורה,

זכוכית לבנה בצורת מלבן במרכז וחרסינה לבנה בפינות

בצורת משולשים זהים שוויושוקיים שאורך השוק שלהם

הוא $x\text{cm}$ ($x > 0$).

א. (1) בטא את סך כל השטח הלבן שבמרצפת באמצעות x .

(2) מה צריך להיות הגודל של x כדי ששטח החרסינה האפורה

(289)

במרצפת יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי שיכול להיות לחרסינה האפורה במרצפת?

תשובות

17. א. $C(t^2, \frac{t^2}{6})$, B(6t, t) ב. $S = \frac{1}{12}(6t - t^2)^2$ ג. $t = 3$

18. א. $x = 5$, $y = 15$ ב. $\min(3x + y) = 30$

19. א. (1) $S = 6x^2 - 200x + 2400$ (סמך) (2) $x = 16\frac{2}{3}\text{cm}$ ב. $S = 1666\frac{2}{3}$ (סמך)

19. א. (1)

4. $\frac{x \cdot x}{2} = 2x^2$ שטח ארבעת המשולשים

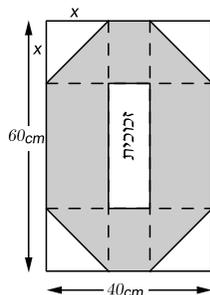
רוחב הזכוכית $40 - 2x =$

אורך הזכוכית $60 - 2x =$

שטח הזכוכית $(40 - 2x)(60 - 2x) =$

$$= 2400 - 80x - 120x + 4x^2 = 4x^2 - 200x + 2400$$

$S = 2x^2 + 4x^2 - 200x + 2400 \Rightarrow S = 6x^2 - 200x + 2400$ (סמך)



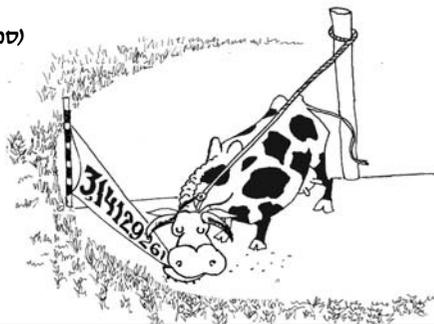
(2)

$S = f(x) = 40 \cdot 60 - (6x^2 - 200x + 2400) = -6x^2 + 200x$

$f'(x) = -12x + 200 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 12x = 200 \Rightarrow x = 16\frac{2}{3}$

$f''(x) = (-12x + 200)' = -12 \Rightarrow f''(16\frac{2}{3}) = -12 < 0 \Rightarrow \max(\checkmark) \Rightarrow x = 16\frac{2}{3} \text{ cm}$

$S = f(16\frac{2}{3}) = -6 \cdot (16\frac{2}{3})^2 + 200 \cdot 16\frac{2}{3} \Rightarrow S = 1666\frac{2}{3}$ (סמך)



ניתן להציג כל מספר שלם (0, ±1, ±2, ...) על-ידי שימוש בשלוש פעמים המספר 2, ללא שימוש ב '-':

$$0 = \frac{\ln 2}{2}$$

$$1 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{2}}}{\ln 2}, \quad -1 = \frac{\ln \frac{\ln \sqrt{2}}{\ln 2}}{\ln 2}$$

$$2 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{\sqrt{2}}}}{2}, \quad -2 = \frac{\ln \frac{\ln \sqrt{\sqrt{2}}}{\ln 2}}{\ln 2}$$

$$3 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}{2}, \quad -2 = \frac{\ln \frac{\ln \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}{\ln 2}}{\ln 2}$$

⋮

9. (חורף תשע"ב - 2012)

משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $(-1, 5)$ היא $y = 12x + 17$.
 נגזרת הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f'(x) = ax + 18$ (a פרמטר).
א. חשב את ערך הפרמטר a.

הצב $a = 6$ ב- $f'(x)$, וענה על הסעיפים ב-ג:

ב. חשב את שיעור x של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

(297)

10. (חורף תשע"ב - 2012, לוחמים)

הנקודה $B(-3, -16.5)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$. נתון: $f'(x) = ax^2 + 3x + 1$.
 שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה B הוא 10.
א. מצא את הערך של a.

ב. הצב $a = 2$, וענה על תת-סעיפים (1)-(2).

(1) מצא את הפונקציה $f(x)$.

(297)

(2) מצא את שיעור x של נקודה נוספת על גרף הפונקציה $f(x)$, שבה שיפוע המשיק הוא 10.

11. (קיץ תשע"ב - 2012, מועד ב)

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = x^2 + x - k$ (k הוא פרמטר).
 בנקודה שבה $x = 2$ יש לפונקציה נקודת קיצון.
א. מצא את הערך של k.

ב. מצא את שיעור x של נקודת הקיצון הנוספת של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ג. נתון כי ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום הוא 14.5.

(298)

מצא את הפונקציה $f(x)$.

הביטוי $991n^2 + 1$ נותן ריבוע שלם ראשון עבור $n = 12, 055, 735, 790, 331, 359, 447, 442, 238, 767$.

תולדות

9. **א.** $a = 6$ **ב.** $x_{\min} = -3$ **ג.** $f(x) = 3x^2 + 18x + 20$

10. **א.** $a = 2$ **ב.** $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 9$ **(1)** **ג.** $x = 1\frac{1}{2}$ **(2)**

11. **א.** $k = 6$ **ב.** $x_{\max} = -3$ **ג.** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$

.6

$$f'(x) = ax^2 - 12, \quad f'(2) = 0, \quad f(0) = 4 \quad \text{נתון:}$$

$$f'(2) = a \cdot 2^2 - 12 = 0 \Rightarrow 4a - 12 = 0 \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = \int (3x^2 - 12) dx = x^3 - 12x + c$$

$$f(0) = 0^3 - 12 \cdot 0 + c = c = 4 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow f(x) = x^3 - 12x + 4$$

נתון

.7 א.

$$m = 1 \Rightarrow f'(1.5) = 1$$

$$f(x) = -x^2 + ax - 3 \Rightarrow f'(x) = -2x + a \Rightarrow f'(1.5) = -2 \cdot 1.5 + a = 1$$

$$-3 + a = 1 \quad / + 3 \Rightarrow a = 4$$

ב.

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

$$f(1.5) = -1.5^2 + 4 \cdot 1.5 - 3 = -2.25 + 6 - 3 = 0.75 \Rightarrow A(1.5, 0.75)$$

$$m = 1, \quad A(1.5, 0.75) \Rightarrow y - 0.75 = 1 \cdot (x - 1.5) \quad / + 0.75 \Rightarrow y = x - \frac{3}{4}$$

ג.

$$m = -1, \quad A(1.5, 0.75) \Rightarrow y - 0.75 = (-1) \cdot (x - 1.5)$$

$$y - 0.75 = -x + 1.5 \quad / + 0.75 \Rightarrow y = -x + 2.25$$

.8 א.

$$f'(x) = -x^2 + 6x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow -x(x - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 6$$

(1) ב.

$$f''(x) = -2x + 6 \Rightarrow f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow x_{\min} = 0 \Rightarrow \min(0, 1)$$

$$f(x) = \int (-x^2 + 6x) dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 + c, \quad (0, 1) \Rightarrow -0 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 1$$

(2)

$$x_{\min} = 0 \Rightarrow x_{\max} = 6 \Rightarrow y_{\max} = -72 + 108 + 1 \Rightarrow y_{\max} = 37$$

20. א.

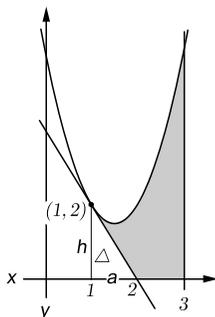
$$y = 2x^2 + 3ax + 6 \Rightarrow y' = 4x + 3a \Rightarrow y'(1) = 4 + 3a$$

$$m = -2 \Rightarrow 4 + 3a = -2 \Rightarrow 3a = -6 \Rightarrow a = -2$$

$$a = -2 \Rightarrow y = 2x^2 - 6x + 6$$

$$\Rightarrow y(1) = 2 - 6 + 6 = 2 \Rightarrow (1, 2)$$

$$y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x + 4$$



ב.

(1) ג.

$$-2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$$

(2)

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{(2-1) \cdot 2}{2} = 1$$

$$S = \int_1^3 (2x^2 - 6x + 6) dx - S_{\Delta} = \left(\frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 6x \right) \Big|_1^3 - 1$$

$$S = (18 - 27 + 18) - \left(\frac{2}{3} - 3 + 6 \right) - 1 = 9 - 3\frac{2}{3} - 1 \Rightarrow S = 4\frac{1}{3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

$$y = -x^2 - 6x + a, \quad x_{\max} = -\frac{-6}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x_{\max} = -3$$

$$y_{\max} = y(-3) = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) + a = -9 + 18 + a$$

$$= 9 + a = 4 \quad / -9 \Rightarrow a = -5$$

$$y = -x^2 - 6x - 5$$

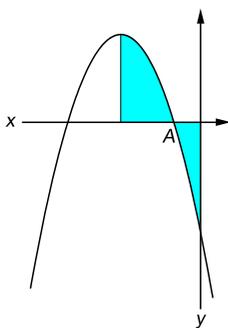
$$\underline{x_A}: -x^2 - 6x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{-2} \Rightarrow x_1 = -5, \quad x_2 = -1$$

$$S_1 = \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 6x - 5) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - 3x^2 - 5x \right) \Big|_{-3}^{-1} \quad -1 > -5 \Rightarrow \underline{x_A = -1}$$

$$= \left(-\frac{-1}{3} - 3 + 5 \right) - \left(-\frac{-27}{3} - 27 + 15 \right) = \frac{1}{3} + 2 - 9 + 27 - 15 \Rightarrow S_1 = 5\frac{1}{3}$$

$$S_2 = \left| \int_{-1}^0 (-x^2 - 6x - 5) dx \right| = \left| \left(-\frac{x^3}{3} - 3x^2 - 5x \right) \Big|_{-1}^0 \right| = \left| 0 - \left(-\frac{-1}{3} - 3 + 5 \right) \right| = 2\frac{1}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = 5\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} \Rightarrow S = 7\frac{2}{3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$



21. א. (1)

(2)

ב.

מבנה מבחן הבגרות לשאלון 804

שאלון ד' (35804) מהווה 65% מהציון הסופי.

שאלון ה' (35805) מהווה 35% מהציון הסופי.

משך זמן המבחן: שלוש שעות וחצי.

פרק א - בחירה: שתי שאלות מתוך שלוש שאלות.

שאלה 1: שאלה מילוליות

שאלה 2: גאומטריה אנליטית

שאלה 3: הסתברות.

פרק ב - בחירה: שאלה אחת מתוך שתיים: גאומטריה וטריגונומטריה במישור.

שאלה 4: גיאומטריה.

שאלה 5: טריגונומטריה.

פרק ג - בחירה: שתי שאלות מתוך שלוש שאלות.

חדר"א של פולינומים, שורש ריבועי ופונקציות רציונליות.



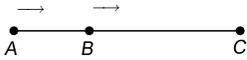
ניקומכוס (Nicomachus) היה מתמטיקאי מהעיר גֶרֶש שבעבר הירדן. הוא פעל בסביבות שנת 100 לספירה. התעסק בעיקר בחשבון ובאלגברה. הגה משהו נחמד שהוא גילה: אם ניקח את המספרים הלא זוגיים באופן הבא: פעם ראשונה ניקח את 1, אח"כ את שני הבאים אחרי 1, אח"כ את שלושת הבאים אחריהם וכו' - אזי סכום כל סדרת מספרים כזאת הינה חזקה שלישית לפי הסדר, כפי שמתואר להלן:

$$\begin{aligned}
 1 &= 1^3 \\
 3 + 5 &= 8 = 2^3 \\
 7 + 9 + 11 &= 27 = 3^3 \\
 13 + 15 + 17 + 19 &= 64 = 4^3 \\
 21 + 23 + 25 + 27 + 29 &= 125 = 5^3 \\
 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 &= 216 = 6^3 \\
 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 &= 343 = 7^3 \\
 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 &= 512 = 8^3 \\
 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 &= 729 = 9^3 \\
 91 + 93 + 95 + 97 + 99 + 101 + 103 + 105 + 107 + 109 &= 1000 = 10^3 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

מבחן 30 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד ב

בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3, שאלה אחת מהשאלות 4-5, שתי שאלות מהשאלות 6-8.

פרק ראשון - אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות



1. יואב רכב על אופניים.

הוא יצא מהעיר A, עבר דרך העיר B, והגיע לעיר C.

המרחק מ-B ל-C גדול ב-40 km מן המרחק מ-A ל-B.

יואב רכב מ-B ל-C במהירות קבועה הגדולה ב-20%

מן המהירות הקבועה שבה רכב מ-A ל-B.

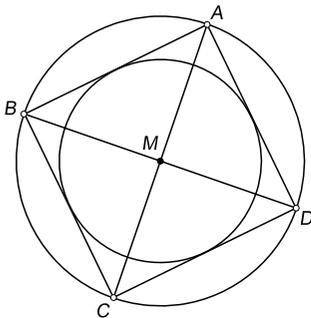
זמן הרכיבה של יואב מ-B ל-C ארוך פי 1.25 מזמן הרכיבה שלו מ-A ל-B.

אילו רכב יואב מ-B ל-C במהירות שבה רכב מ-A ל-B,

היה עובר את הדרך מ-B ל-C ב-6 שעות.

א. מצא את מהירות הרכיבה של יואב בדרך מ-A ל-B.

ב. מצא את המרחק AB.



2. אלכסוני הריבוע ABCD נפגשים בנקודה M.

שעורי הקדקוד A הם (5, 5).

משוואת האלכסון BD היא $y = -\frac{1}{3}x$.

א. מצא את משוואת האלכסון AC.

ב. מצא את משוואת המעגל החוסם את הריבוע.

ג. חשב את האורך של צלע הריבוע.

ד. חשב את אורך הרדיוס של המעגל החוסם בריבוע.

מאמרותיו של הרבי מקוצק

"אין ישר מסולם המונח באלכסון, אין שלם מלב שבור, וזועק - מן הדממה."

"בלתי שווה הוא טיפול שווה בדברים בלתי שווים."

ר' נחמן מנדל מורגנשטרן מקוצק (1787-1859)

תשובות

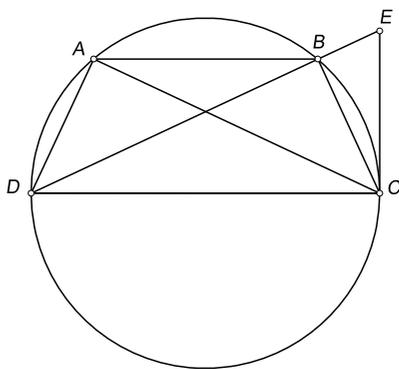
1. א. 20 km/h ב. AB = 80 km

2. א. $y = 3x - 10$ ב. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 40$

ג. $AB = \sqrt{80} = 8.94$ (יחידות אורך) ד. $r = 2\sqrt{5} = \sqrt{20} = 4.47$ (יחידות אורך)

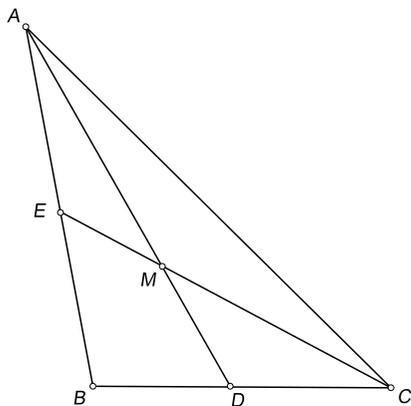
3. שחר קנה קופסה שיש בה כדורי טניס בשני צבעים: 4 כדורים צהובים ו-6 כדורים ירוקים. שחר הוציא מן הקופסה באקראי 3 כדורים זה אחר זה (ללא החזרה).

- א. (1) מהי ההסתברות ששחר הוציא 3 כדורים צהובים?
 (2) מהי ההסתברות ששחר הוציא 3 כדורים באותו צבע?
 ב. דנה קנתה 3 קופסאות של כדורי טניס.
 כל אחת מן הקופסאות שקנתה זהה לקופסה שקנה שחר.
 דנה הוציאה באקראי כדור אחד מכל אחת מן הקופסאות.
 (1) מהי ההסתברות שדנה הוציאה 3 כדורים צהובים?
 (2) מהי ההסתברות שדנה הוציאה לפחות כדור אחד ירוק?



פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. טרפז שווה-שוקיים ABCD חסום במעגל. המשיק למעגל בנקודה C נפגש בנקודה E עם המשך האלכסון DB. CD הוא קוטר במעגל.
 א. הוכח: $\triangle DAC \sim \triangle ECD$.
 ב. נתון: $AC = 25\text{cm}$, $DE = 36\text{cm}$.
 חשב את רדיוס המעגל.
 ג. חשב את שטח המשולש DAC.



5. AD ו-CE הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M. נתון: $AD = 12\text{cm}$, $CE = 9\text{cm}$, $\angle CMD = 40^\circ$.
 א. חשב את אורכי הקטעים MD ו-MC.
 ב. חשב את אורך הצלע BC.
 ג. חשב את גודל הזווית $\angle MCD$.
 ד. חשב את שטח המשולש ADB.

תשובות

3. א. (1) $P = \frac{1}{30}$ (2) $P = \frac{1}{5}$ ב. (1) $P = \frac{8}{125} = 0.064$ (2) $P = \frac{117}{125} = 0.936$
 4. א. $R = 15\text{cm}$ ב. $S_{\triangle DAC} = 207.29$ (סמ"ר)
 5. א. $MC = 6\text{cm}$, $MD = 4\text{cm}$, $BC = 7.81\text{cm}$ ג. $\angle MCD = 41.21^\circ$ ד. $S_{\triangle ADB} = 23.15$ (סמ"ר)

פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

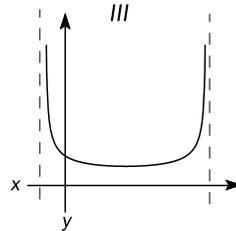
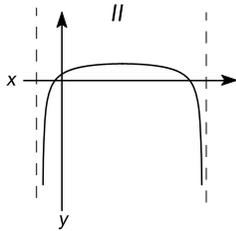
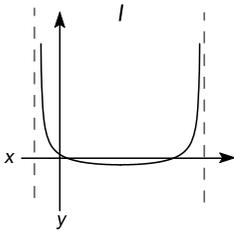
ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מבין שלושת הגרפים שלפניך, איזה גרף מייצג סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. נמק.



7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2-x}{(x-1)^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

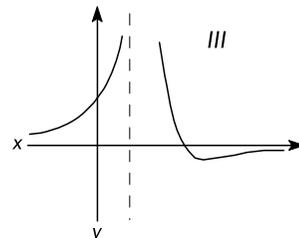
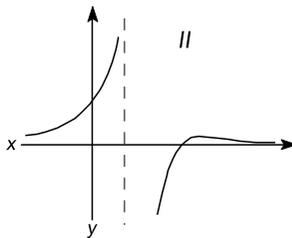
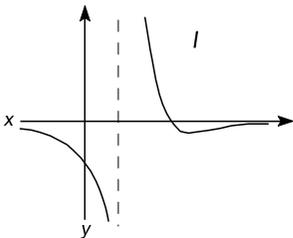
ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את האסימפטוטות של גרף הפונקציה המאונכות לצירים.

ד. מצא את תחומי העליה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. איזה מבין שלושת הגרפים שלפניך מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמק.

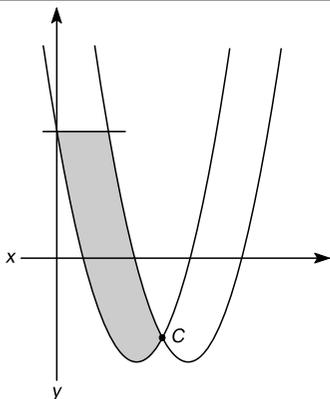


תשובות

6. א. $-1 \leq x \leq 7$ ב. $\min_{ab.}(-1,0)$, $\max_{ab.}(3,4)$, $\min_{ab.}(7,0)$ ד. (1) $-1 < x < 7$ (2) III

7. א. $x \neq 1$ ב. $(0,2)$, $(2,0)$ ג. $x=1$, $y=0$

ד. \swarrow : $1 < x < 3$, \searrow : $(x < 1) \cup (x > 3)$ ו. II



8. בציור שלפניך מתוארים גרפים של שתי פונקציות:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \quad \text{ו} \quad g(x) = x^2 - 10x + a$$

a הוא פרמטר.

הגרפים נחתכים בנקודה C .

שיעור x של הנקודה C שווה ל-4.

א. מצא את הערך של a .

ב. דרך נקודת החיתוך של אחד הגרפים עם ציר y

העבירו ישר המקביל לציר x , כמתואר בציור.

מצא את השטח המוגבל על-ידי הגרפים של שתי הפונקציות

ועל-ידי הישר המקביל לציר x .

בהצלחה

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט



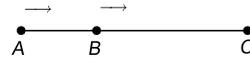
איך עושה כלב?

אווז - מגעגע, אות - נאנח, אָיל - צוהל, אָייל - עורג, אפרוח - מצייץ, אריה - שואג, ברווז - מגעגע, גמל - מחרחר, דבורה - מזומזמת, דב - נוהם, דוכיפת - מהדהדת, זאב - מיילל, זבוב - מזומזם, זמיר - מסלסל, זרויר - מפטפט, חרגול - מנסר, חזיר - נוחר, חמור - נוער (גם: נוהק), חסידה - מלקלקת, חתול - מיילל (וגם: מגרגר), יונה - הומה, ינשוף - נושף, יתוש - מזומזם, כבשה - פועה, כלב - נובח, נחש - לוחש, נמר - שואג, נץ - מצפצף, סוס - צוהל, עגור - מצפצף, עורב - קורא, עז - פועה, עיט - צועק, עכבר - מצייץ, עפרוני - מסלסל, פיל - מריע (וגם: תוקע, נוהם, מחצצר), פרא - נוהק, פרה - גועה, צבוע - צוחק (גם מיילל), צבי - מפרט, ציפור - מצייצת, צפרדע - מקרקרת, צרצר - מצרצר, קוף - לוהג, ראם - מצלצל, שועל - מיילל, שור - גועה, שרקן - שורק, תוכי - מדבר (גם: שורק, מפטפט, מקשקש), תן - מיילל, תנשמת - נושמת, תרנגול - קורא, תרנגול-הודו - מהלצר,

פתרון מבחן 30

	V	S	T
A → B	x	y	$\Rightarrow \frac{y}{x}$
B → C	1.2x	y + 40	$\Rightarrow (I) \frac{y+40}{1.2x} = 1.25 \frac{y}{x}$
B → C	x	y + 40	$\Rightarrow (II) \frac{y+40}{x} = 6$

א. 1



(II) $y + 40 = 6x \Rightarrow y = 6x - 40$

(I) $\frac{6x-40+40}{1.2x} = 1.25 \cdot \frac{6x-40}{x} \cdot \frac{1}{1.2x} \Rightarrow 6x = 9x - 60 \Rightarrow 3x = 60 \Rightarrow x = 20 \text{ km/h}$

ב.

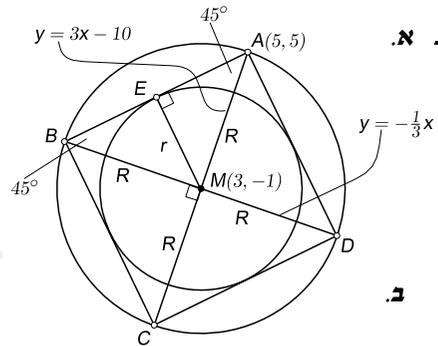
$AB = y = 6 \cdot 20 - 40 \Rightarrow AB = 80 \text{ km}$

א. 2

(1) $m_{BD} = -\frac{1}{3}$, (2) $AC \perp BD \Rightarrow (3) m_{AC} = 3$

(1) $A(5, 5) \Rightarrow y - 5 = 3(x - 5) \quad / + 5$

$\Rightarrow y = 3x - 10$



ב.

$M: 3x - 10 = -\frac{1}{3}x \Rightarrow 3\frac{1}{3}x = 10 \Rightarrow x = 3$

$y = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1 \Rightarrow M(3, -1)$

$R^2 = MA^2 = (5 - 3)^2 + (5 + 1)^2 = 4 + 36 = 40 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 40$

ג.

$\triangle AMB$: (4) $AB^2 = R^2 + R^2 = 40 + 40 = 80 \quad / \sqrt{} \Rightarrow AB = \sqrt{80} = 8.94$ (יחידות אורך)

ד.

$\triangle AMB$: (5, 6) $\angle MAB = \angle MBA = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$

$\triangle AEM$: (7) $ME \perp AB \Rightarrow (5) \angle EMA = \angle EAM = 45^\circ \Rightarrow (8, 9) ME = AE = \frac{\sqrt{80}}{2}$

$ME = r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{80}}{2} = \frac{\sqrt{16 \cdot 5}}{2} = \frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{2} \Rightarrow r = 2\sqrt{5} = \sqrt{20} = 4.47$ (יחידות אורך)

(1) נתון (2) אלכסוני ריבוע שווים זה לזה, חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה

(3) תנאי לניצבות ישרים שאינם מקבילים לצירים - שיפוע של האחד הופכי ונגדי לשיפוע האחר

(4) פיתגורס (5) השלמה ל- 180° במשולש (6) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו

(7) רדיוס מאונך למשיק למעגל בנקודת ההשקה (8) מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות

(9) גובה (ME) לבסיס (AB) במשולש שווה-שוקיים (MAB) הוא גם תיכון

3. א. (1) 4 צהובים, 6 ירוקים, Y - צהוב, G - ירוק

$$P = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \Rightarrow P = \frac{1}{30}$$

(2)

$$P = P(Y_1 Y_2 Y_3) + P(G_1 G_2 G_3) = \frac{1}{30} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{30} + \frac{1}{6} \Rightarrow P = \frac{1}{5}$$

ב. (1)

$$P = P(Y_1) \cdot P(Y_2) \cdot P(Y_3) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \Rightarrow P = \frac{8}{125} = 0.064$$

(2)

$$P = 1 - \frac{8}{125} \Rightarrow P = \frac{117}{125} = 0.936$$

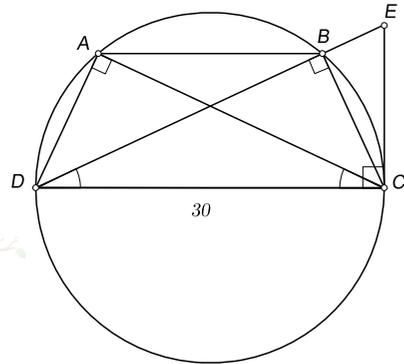
4. א.

$$(1) \angle DAC = 90^\circ, (2) \angle ECD = 90^\circ$$

$$\Rightarrow (3) \angle DAC = \angle ECD$$

$$\angle ACD = (4) \angle CAB = (5) \angle BDC$$

$$(3) \angle ACD = \angle BDC \Rightarrow (6) \triangle DAC \sim \triangle ECD (\checkmark)$$



ב.

$$(7) \frac{DC}{ED} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{DC}{36} = \frac{25}{CD}$$

$$\Rightarrow CD^2 = 25 \cdot 36 \Rightarrow CD = 5 \cdot 6 = 2R \Rightarrow R = 15 \text{ cm}$$

ג.

$$(8) AD = \sqrt{30^2 - 25^2} = \sqrt{275}$$

$$S_{\triangle DAC} = \frac{AD \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{275} \cdot 25}{2} \Rightarrow S_{\triangle DAC} = 207.29 \text{ (סמ"ר)}$$

(1) זווית היקפית הנשענת על קוטר (2) משיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה

(3) כלל המעבר (4) זוויות מתחלפות במקבילים הנחתכים על-ידי ישר שלישי

(5) זוויות היקפיות במעגל הנשענות על אותה קשת (6) משפט דמיון זווית-זווית

(7) יחס הדמיון (8) פיתגורס

צדקה סימטרית

המילה צדקה נרשמת בצופן א'ת ב"ש כך: 'הקדצ'. כלומר: אותן אותיות מהסוף להתחלה. כי מי שנותן - גם מקבל.

גם שורש המילה 'נתינה' הוא 'נתנ' שהיא פלינדרומית ומביעה את אותו רעיון.

גם במצוות מחצית השקל שניתנה לצדקה עבור מנין העם הציווי הוא: 'ונתנו' שהיא פלינדרומית.

וטעמי המקרא עליה הם 'קדמא ואולא' המביעים את אותו רעיון פלינדרומי, שמי שנותן - מקבל.

5. א.

$$(1) MD = \frac{1}{3}AD = \frac{12}{3} \Rightarrow MD = 4\text{cm}$$

$$(1) MC = \frac{2}{3}CE = \frac{2}{3} \cdot 9 \Rightarrow MC = 6\text{cm}$$

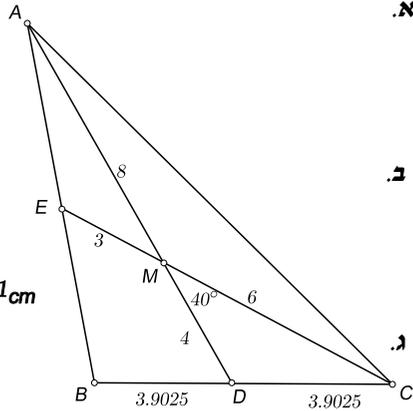
$$\triangle CMD: (2) DC^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 40^\circ = 15.223$$

$$\Rightarrow DC = BD = 3.9025, BC = 2 DC \Rightarrow BC = 7.81\text{cm}$$

$$\triangle CMD: (3) \frac{4}{\sin \angle C} = \frac{3.9025}{\sin 40^\circ}$$

$$\sin \angle C = \frac{4 \sin 40^\circ}{3.9025} = 0.6588 \Rightarrow \angle MCD = 41.21^\circ$$

ב.



ג.

ד.

$$(4) \angle MDC = 180^\circ - 40^\circ - 41.21^\circ = 98.79^\circ \Rightarrow (5) \angle ADB = 180^\circ - 98.79^\circ = 81.21^\circ$$

$$S = \frac{AD \cdot BD \cdot \sin \angle ADB}{2} = \frac{12 \cdot 3.905 \cdot \sin 81.21^\circ}{2} \Rightarrow S_{\triangle ADB} = 23.15 \text{ (סמ"ר)}$$

(1) מפגש תיכוניים מחלק אותם ביחס 1 : 2 כשהחלק הגדול קרוב לקדקוד (2) משפט הקוסינוסים

(3) משפט הסינוסים (4) השלמה ל- 180° ב- $\triangle MDC$ (5) השלמה ל- 180° של זווית שטוחה

6. א.

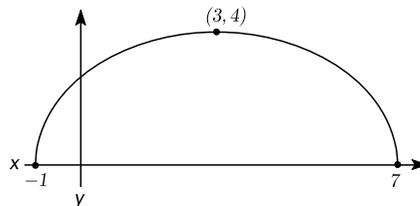
$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}, \quad -x^2 + 6x + 7 \geq 0, \quad x_{1,2} = \frac{-6 \pm 8}{-2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 7$$

$$a = -1 < 0 \Rightarrow \begin{array}{c} + \\ - \quad - \\ -1 \quad 7 \end{array} \Rightarrow -1 \leq x \leq 7$$

ב.

$$f'(x) = \frac{-2x+6}{2\sqrt{-x^2+6x+7}} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 3, \quad f(-1) = f(7) = 0, \quad f(3) = \sqrt{-9+18+7} = 4$$

$$\min_{ab.}(-1, 0), \quad \max_{ab.}(3, 4), \quad \min_{ab.}(7, 0)$$



ג.

(1) ד.

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad f(x) \neq 0 \Rightarrow -1 < x < 7$$

(2) שורש ריבועי אינו שלילי. גרפים I ו-II מציגים גם ערכים שליליים של $\frac{1}{f(x)}$

ולכן הם נפסלים. גרף III מציג רק ערכי פונקציה חיוביים - ולכן הוא המייצג את $g(x)$.

7. א.

$$f(x) = \frac{2-x}{(x-1)^2}, \quad (x-1)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

ב.

$$x=0 \Rightarrow y = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow (0, 2), \quad y=0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2, 0)$$

ג.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \frac{\rightarrow 1}{\rightarrow 0} = \infty \Rightarrow x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}(\frac{2}{x}-1)}{\cancel{x}(x-2+\frac{1}{x})} = \frac{\rightarrow(0-1)}{\rightarrow(\infty-2+0)} = \frac{\rightarrow(-1)}{\rightarrow\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$$

ד.

$$f'(x) = \frac{(-1)(x-1)^2 - 2(x-1)(2-x)}{(x-1)^4} = \frac{-(x-1) - 2(2-x)}{(x-1)^3} = \frac{-x+1-4+2x}{(x-1)^3} = \frac{x-3}{(x-1)^3} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 3$$

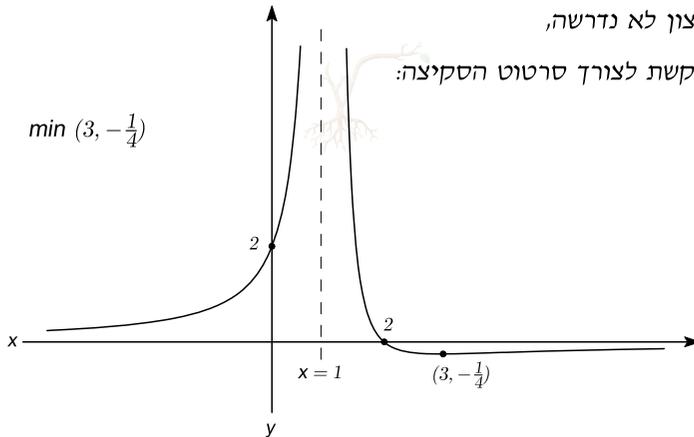
x		1		3	
f'	$\bar{=} = +$	\emptyset	$\bar{=} = -$	0	$\bar{=} = +$
f	\nearrow	asym.	\searrow	min	\nearrow

$\Rightarrow \nearrow: (x < 1) \cup (x > 3), \searrow: 1 < x < 3$

ה. נקודת קיצון לא נדרשה,

אבל מתבקשת לצורך סרטוט הסקיצה:

$$f(3) = \frac{-1}{4} \Rightarrow \min(3, -\frac{1}{4})$$



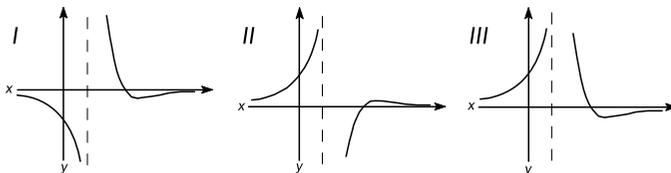
1. גרף I נפסל כי הוא מציג נגזרת שלילית עבור $x < 1$, ששם הפונקציה עולה.

גרף III נפסל כי בסביבת הנקודה שבה $f'(x) = 0$ הוא מראה מעבר נגזרת מחיוביות לשליליות,

ולכן $f(x)$ עוברת מעליה לירידה ולכן יש לה שם נקודת מקסימום מקומית, בניגוד לממצאנו.

גרף II מתאים בכל הממצאים: נגזרת חיובית עבור $x < 1$, ובסביבת הנקודה שבה $f'(x) = 0$

היא עוברת משליליות לחיוביות, ולכן $f(x)$ עוברת מירידה לעליה, מה שמתאים למינימום שמצאנו.



8. א.

$$f(x) = x^2 - 6x + 5, \quad g(x) = x^2 - 10x + a$$

$$f(4) = g(4) \Rightarrow 16 - 24 + 5 = 16 - 40 + a$$

$$-3 = -24 + a \quad / + 24 \Rightarrow a = 21$$

$$g(x) = x^2 - 10x + 21$$

$$f(x): (0, 5), \quad g(x): (0, 21) \Rightarrow A(0, 5)$$

$$x_B: y = 5 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 5 \quad / - 21$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2} = 5 \pm 3 \Rightarrow x_B = 2$$

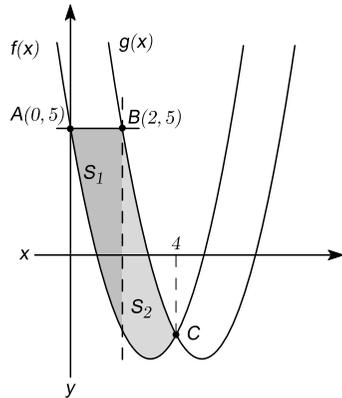
$$S_1 = \int_0^2 (5 - (x^2 - 6x + 5)) dx = \int_0^2 (-x^2 + 6x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right) \Big|_0^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 12 \right) - 0 \Rightarrow S_1 = 9\frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_2^4 (g(x) - f(x)) dx = \int_2^4 ((x^2 - 10x + 21) - (x^2 - 6x + 5)) dx = \int_2^4 (-4x + 16) dx$$

$$= (-2x^2 + 16x) \Big|_2^4 = (-32 + 64) - (-8 + 32) = 32 - 24 \Rightarrow S_2 = 8$$

$$S = S_1 + S_2 = 9\frac{1}{3} + 8 \Rightarrow S = 17\frac{1}{3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$



ב.

מתמטיקה מסיתה

גולש במרשתת, **איזק פרימן**, כתב (2015, ישראל) בעמוד שלו בפייסבוק:

"נתוני הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה מוכיחים: אחד מכל שני ישראלים משתכר מתחת לשכר החציוני".

ברשת החברתית התחוללה מהומה אודות נתון מוזעזע זה שהתאפיינה בהתנפלות רבתי על ראש הממשלה,

על הממשלה ועל מדיניותה הכלכלית שהביאתנו עד הלום. איום ונורא. מוזעזע.

לאחר זמן, כשהסביר את עצמו - התברר שזו היתה בדיחה ומשל לאיך ניתן לנווט את דעת הקהל ולעשות

מניפולציה על נתוני אמת.

מדוע? מכיון שכך בדייוק מוגדר החציון: הערך שחצי מהקבוצה הנבדקת מעליו וחציה - מתחתיו . . .

מה שאומר שאם נקחת את 100 המיליארדרים הגדולים ביותר בעולם ונחשב את הונם החציוני - הרי שהונו של כל

אחד מכל שניים מהם יהיה מתחת להון החציוני . . . אוי ואבוי !!!