

**מספרים מרוכבים**

1. (5 יח', קיץ תשל"א - 71) א. במעגל שמרכזו בראשית הצירים חסום ריבוע.  
 אחד מקדקודיו של הריבוע מתאר באופן גרפי את המספר המרוכב  $6 + 8i$ .  
 אילו מספרים מרוכבים מתארים את שאר קדקודיו של הריבוע?  
 ב. הוכח את נוסחת דה-מואבר וחשב בעזרתה את הערך של  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$ .
2. (5 יח', קיץ תש"ם - 80) נתונים 5 האיברים הראשונים של טור הנדסי, של מספרים מרוכבים:  
 $1 + i, 2i, 2 \cdot (i - 1), -4, -4(1 + i)$ . מצא את סכום 20 האיברים הראשונים של הטור.
3. (5 יח', קיץ תשמ"א - 81) מצא את כל הפתרונות המרוכבים של המשוואה:  $x^5 - 32i = 0$ .
4. (5 יח', חורף תשמ"ג - 82) הוכח כי מכפלת שורשי היחידה מסדר 5 היא 1 (אתה יכול להוכיח ישירות את הטענה, או להוכיח באופן כללי כי מכפלת שורשי היחידה מסדר אי-זוגי כלשהו היא 1).
5. (5 יח', קיץ תשמ"ג - 83) נתון:  $S_k = i + i^2 + i^3 + \dots + i^k$ ,  $k$  טבעי.  
 הראה כי  $(S_k)^4$  הוא מספר ממשי לכל  $k$ .
6. (5 יח', קיץ תשמ"ד - 84) בשדה המספרים המרוכבים נתונה המשוואה  $z^3 = 1$ .  
 א. הוכח: אם  $a$  הוא שורש של המשוואה אז גם  $a^n$  הוא שורש של המשוואה לכל  $n$  טבעי.  
 ב. הוכח כי סכום כל השורשים השונים של המשוואה הוא אפס.
7. (5 יח', קיץ תשמ"ה - 85) בסדרה הנדסית של מספרים מרוכבים נתון:  $a_1 = 1 + i$ ;  $a_2 = 2$ .  
 א. הוכח: לכל  $n$  טבעי האיברים העומדים במקום ה- $(2 + 4n)$  הם ממשיים.  
 ב. חשב את  $a_{10}$  א. חשב את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה זו.
8. (5 יח', חורף תשמ"ז - 86) פתור את המשוואה:  $z^4 + 2 + 2\sqrt{3}i = 0$ .

**תשובות**

1. א.  $8 - 6i, -6 - 8i, -8 + 6i$  ב. -1
2.  $S_{20} = -1025 + 1025i$
3.  $2 \operatorname{cis} 306^\circ, 2 \operatorname{cis} 234^\circ, 2 \operatorname{cis} 162^\circ, 2 \operatorname{cis} 90^\circ = 2i, 2 \operatorname{cis} 18^\circ$
7. א.  $a_{10} = 32$  ב.  $S_{10} = 33 + 31i$
8.  $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \sqrt{3}i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3} + i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

23. (5 יח', חורף תשנ"ח - 98) א. פתור את המשוואה:  $z^5 = 16 \cdot (1 - i\sqrt{3})$ .

ב. הוכח כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצא את מנת הסדרה.

24. (5 יח', קיץ תשנ"ח - 98) נתונה סדרת מספרים מרוכבים לכל  $n$  טבעי:  $z_n = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $|z_2 - z_1|$  (הערך המוחלט של  $z_2 - z_1$ ), ואת  $|z_3 - z_2|$ .

ב. הראה כי הביטוי  $|z_{n+1} - z_n|$  אינו תלוי ב- $n$ .

25. (5 יח', חורף תשנ"ט - 99) נתונים שלושה איברים ראשונים של סדרה הנדסית:

$$(m > 0) \quad a_1 = m + 3i, \quad a_2 = -1 + 5i, \quad a_3 = n + 4i$$

א. מצא את ערכי  $m$  ו- $n$ . ב. חשב את היחס בין  $|a_5|$  ל- $|a_3|$ .

26. (5 יח', קיץ תשנ"ט - 99) נתונה המשוואה  $(z - a)^3 = -8$ ,  $z$  - מספר מרוכב ו- $a$  - מספר ממשי.

א. בטא באמצעות  $a$  את שורשי המשוואה:  $z_1, z_2, z_3$ .

ב. נתון:  $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -9$ . מצא את ערכו של  $a$ .

27. (5 יח', חורף תש"ס - 2000)

א. פתור את המשוואה:  $zi + z^2 + |z|^2 + z + \bar{z} = 0$ ,  $z$  הוא מספר מרוכב.

ב. אחד מהפתרונות, שמצאת בסעיף א, הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית שכל איבריה שונים

מאפס. הפרש הסדרה הוא  $1 - \frac{i}{32}$ . האיבר הראשון בסדרה זו הוא מספר ממשי.

חשב את האיבר הראשון בסדרה.

28. (5 יח', קיץ תש"ס - 2000)

א. מצא את המספר המרוכב  $w$ , הנמצא ברביע הרביעי ומקיים את המשוואה:  $|w|i + 2w = \sqrt{3}$ .

ב. מצא את פתרונות המשוואה  $z^3 = w(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$  ( $w$  - המספר המרוכב שמצאת ב"א).

### תשובות

23. א.  $z_k = 2 \operatorname{cis}(60^\circ + 72^\circ k) \quad k=0 \dots 4$ . ב.  $q = \operatorname{cis} 72^\circ$ .

24. א.  $|z_3 - z_2| = |z_2 - z_1| = 2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}$ . ב.  $|z_{n+1} - z_n| = 2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|$ .

25. א.  $m = 2, n = -6$ . ב.  $|a_5| : |a_3| = 2 : 1$ .

26. א.  $z_1 = a + 1 + \sqrt{3}i, z_2 = a + 1 - \sqrt{3}i, z_3 = a - 2$ . ב.  $a = -1$ .

27. א.  $z_1 = 0, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ . ב.  $a_1 = -16\frac{1}{2}$ .

28. א.  $w = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ . ב.  $z_1 = \operatorname{cis} 300^\circ, z_2 = \operatorname{cis} 180^\circ, z_3 = \operatorname{cis} 60^\circ$ .

29. (5 יח', חורף תשס"א - 2001) נתונים שלושה איברים ראשוניים של סדרה הנדסית:  $a_1 = a + 3i$ ,

$$a_2 = -1 + 5i \quad \text{ו} \quad a_3 = b + 4i$$

א. נתון:  $a > b$ . חשב את ערכי  $a$  ו- $b$ . ב. חשב את האיבר ה-11 בסדרה

30. (5 יח', קיץ תשס"א - 2001) נתון הביטוי  $A = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

א. הראה כי  $A$  הוא מספר ממשי טהור לכל  $n$  טבעי.

ב. נתון:  $n = 3k$ ,  $k$  טבעי. הוכח:  $A = 2$ .

31. (5 יח', קיץ תשס"א - 2001, מועד ב) נתונה המשוואה:  $z^3 = -1 + i\sqrt{3}$

א. מצא את שורשי המשוואה:  $z_1, z_2, z_3$ . (אתה רשאי לרשום את הפתרון בכל צורה שתבחר.)

ב. מצא את הסכום:  $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3$ .

ג. הראה כי הסכום  $z_1^9 + z_2^9 + z_3^9$  הוא מספר ממשי.

32. (5 יח', חורף תשס"ב - 2002) נתון מספר מרוכב:  $z = x + yi$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ .

א. הוכח: אם  $z + \frac{1}{z}$  הוא מספר ממשי, אזי  $z$  נמצא על מעגל היחידה ( $r = 1$ ).

ב. הוכח: אם  $z$  נמצא על מעגל היחידה, אזי  $z + \frac{1}{z}$  הוא מספר ממשי.

33. (5 יח', חורף תשס"ג - 2003)

נתונה המשוואה:  $(1+i)z^2 - 2mz + m - 2 = 0$ ,  $z$  - משתנה מרוכב,  $m$  - פרמטר מרוכב

א. מצא עבור אילו ערכי  $m$  יש למשוואה פתרון יחיד.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור אחד הערכים של  $m$  שמצאת בסעיף א.

#### רצוי שהמצוי יהיה כמו הרצוי

למילים 'רצוי' ו'מצוי' יש שלוש אותיות משותפות - 'צ', 'י', ו-'ל'.

ההפרש הגימטרי ביניהן. אם כן, הוא ההפרש בין 'ר' (200) ל-'מ' (40), שהוא 160.

'כסף' בגימטריה זה 160 ( $= 20 + 60 + 80$ ).

מסקנה: ההבדל בין הרצוי למצוי זה... כסף...

#### תולדות

29. א.  $a = 2$ ,  $b = -6$ . ב.  $a_{11} = -96 + 64i$

30. א.  $A = 2 \cos(180^\circ n) \cos(60^\circ n)$

31. א.  $z_1 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 40^\circ$ ,  $z_2 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 160^\circ$ ,  $z_3 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 280^\circ$

ב.  $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3 = 6$ . ג.  $z_1^9 + z_2^9 + z_3^9 = 24$

33. א.  $m_1 = 2i$ ,  $m_2 = 1 - i$ . ב.  $\underline{m = 2i}$ :  $z = 1 + i$ ,  $\underline{m = 1 - i}$ :  $z = -i$

42. (007, קיץ ס"ז - 2006, מועד א)

א.  $z^3 = \cos \theta + i \sin \theta$  הוא אחד מפתרונות המשוואה:

(1) בטא את  $z_0$  באמצעות  $\theta$ .

(2) בטא את הפתרונות הנוספים של המשוואה באמצעות  $z_0$ .

43. (007, קיץ ס"ז - 2006, מועד ב) א. נתון המספר המרוכב  $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

הוכח כי  $z$  מקיים את המשוואה  $z^{3n} + z^{3m+1} + z^{3k+2} = 0$  (  $n, m, k$  טבעיים).

44. (007, קיץ ס"ז - 2006, מועד מיוחד) א. הוכח כי עבור כל מספר מרוכב  $z$  מתקיים:  $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$ .

45. (007, חורף ס"ז - 2007) ב.  $w$  הוא מספר מרוכב שונה מאפס, ו-  $z = \frac{w}{W}$

הוכח כי הארגומנט (הזווית בהצגה הקוטבית) של  $z$  שווה לפעמיים הארגומנט של  $w$ ,

והערך המוחלט של  $z$  הוא 1.

46. (007, קיץ ס"ז - 2007, מועד א) בסדרה הנדסית נתון:  $a_3 = -5 + 3i$ ,  $a_6 = 3 + 5i$

א. הוכח כי  $a_3 = a_{15}$

ב. מצא את כל הערכים השונים שיכולה מנת הסדרה לקבל.

ג. הראה כי כל איברי הסדרה ההנדסית הנתונה נמצאים על מעגל שמרכזו בראשית הצירים,

ומצא את רדיוס המעגל.

47. (007, קיץ ס"ז - 2007, מועד ב מיוחד) ב.  $z$  הוא פתרון המשוואה  $z - |z| = -1 + 3i$

חשב את שטח המשולש שקודקודיו הם:  $z$ ,  $(-\bar{z})$  וראשית הצירים.

48. (007, קיץ ס"ז - 2007, מועד ב)

ב. המספר המרוכב  $z = x + iy$  מקיים את המשוואה:  $|z - (1 - i)|^2 = |z|^2 + |\frac{2}{1+i}|^2$

מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות  $(x, y)$  המקיימות את המשוואה.

### תשובות

42. א. (1)  $\text{cis } \frac{\theta}{3}$ ,  ~~$\text{cis } (\frac{\theta}{3} + 120^\circ)$~~ ,  ~~$\text{cis } (\frac{\theta}{3} + 240^\circ)$~~

(2)  $z_1 = z_0 \text{cis } 120^\circ$ ,  $z_2 = z_0 \text{cis } 240^\circ$

46. ב.  $q_1 = \text{cis } (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ,  $q_2 = \text{cis } \frac{\pi}{2} = i$ ,  $q_3 = \text{cis } \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

47. ב.  $S_{\Delta} = 12$  (יחידות ריבועיות)

48. ב.  $y = x$  (קו ישר)