

מספרים מרוכבים

1. (5 יח', קיץ תשל"א - 71) א. במעגל שמרכזו בראשית הצירים חסום ריבוע.
 אחד מקדקודיו של הריבוע מתאר באופן גרפי את המספר המרוכב $6 + 8i$.
 אילו מספרים מרוכבים מתארים את שאר קדקודיו של הריבוע?
 ב. הוכח את נוסחת דה-מואבר וחשב בעזרתה את הערך של $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$.
2. (5 יח', קיץ תש"ם - 80) נתונים 5 האיברים הראשונים של טור הנדסי, של מספרים מרוכבים:
 $1 + i, 2i, 2 \cdot (i - 1), -4, -4(1 + i)$. מצא את סכום 20 האיברים הראשונים של הטור.
3. (5 יח', קיץ תשמ"א - 81) מצא את כל הפתרונות המרוכבים של המשוואה: $x^5 - 32i = 0$.
4. (5 יח', חורף תשמ"ג - 82) הוכח כי מכפלת שורשי היחידה מסדר 5 היא 1 (אתה יכול להוכיח ישירות את הטענה, או להוכיח באופן כללי כי מכפלת שורשי היחידה מסדר אי-זוגי כלשהו היא 1).
5. (5 יח', קיץ תשמ"ג - 83) נתון: $S_k = i + i^2 + i^3 + \dots + i^k$, k טבעי.
 הראה כי $(S_k)^4$ הוא מספר ממשי לכל k .
6. (5 יח', קיץ תשמ"ד - 84) בשדה המספרים המרוכבים נתונה המשוואה $z^3 = 1$.
 א. הוכח: אם a הוא שורש של המשוואה אז גם a^n הוא שורש של המשוואה לכל n טבעי.
 ב. הוכח כי סכום כל השורשים השונים של המשוואה הוא אפס.
7. (5 יח', קיץ תשמ"ה - 85) בסדרה הנדסית של מספרים מרוכבים נתון: $a_1 = 1 + i$; $a_2 = 2$.
 א. הוכח: לכל n טבעי האיברים העומדים במקום ה- $(2 + 4n)$ הם ממשיים.
 ב. חשב את a_{10} א. חשב את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה זו.
8. (5 יח', חורף תשמ"ז - 86) פתור את המשוואה: $z^4 + 2 + 2\sqrt{3}i = 0$.

תשובות

1. א. $8 - 6i, -6 - 8i, -8 + 6i$ ב. -1
2. $S_{20} = -1025 + 1025i$
3. $2 \operatorname{cis} 306^\circ, 2 \operatorname{cis} 234^\circ, 2 \operatorname{cis} 162^\circ, 2 \operatorname{cis} 90^\circ = 2i, 2 \operatorname{cis} 18^\circ$
7. א. $a_{10} = 32$ ב. $S_{10} = 33 + 31i$
8. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \sqrt{3}i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3} + i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

23. (5 יח', חורף תשנ"ח - 98) א. פתור את המשוואה: $z^5 = 16 \cdot (1 - i\sqrt{3})$.

ב. הוכח כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצא את מנת הסדרה.

24. (5 יח', קיץ תשנ"ח - 98) נתונה סדרת מספרים מרוכבים לכל n טבעי: $z_n = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$.

א. הבע באמצעות α את $|z_2 - z_1|$ (הערך המוחלט של $z_2 - z_1$), ואת $|z_3 - z_2|$.

ב. הראה כי הביטוי $|z_{n+1} - z_n|$ אינו תלוי ב- n .

25. (5 יח', חורף תשנ"ט - 99) נתונים שלושה איברים ראשונים של סדרה הנדסית:

$$(m > 0) \quad a_1 = m + 3i, \quad a_2 = -1 + 5i, \quad a_3 = n + 4i$$

א. מצא את ערכי m ו- n . ב. חשב את היחס בין $|a_5|$ ל- $|a_3|$.

26. (5 יח', קיץ תשנ"ט - 99) נתונה המשוואה $(z - a)^3 = -8$, z - מספר מרוכב ו- a - מספר ממשי.

א. בטא באמצעות a את שורשי המשוואה: z_1, z_2, z_3 .

ב. נתון: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -9$. מצא את ערכו של a .

27. (5 יח', חורף תש"ס - 2000)

א. פתור את המשוואה: $zi + z^2 + |z|^2 + z + \bar{z} = 0$, z הוא מספר מרוכב.

ב. אחד מהפתרונות, שמצאת בסעיף א, הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית שכל איבריה שונים

מאפס. הפרש הסדרה הוא $1 - \frac{i}{32}$. האיבר הראשון בסדרה זו הוא מספר ממשי.

חשב את האיבר הראשון בסדרה.

28. (5 יח', קיץ תש"ס - 2000)

א. מצא את המספר המרוכב w , הנמצא ברביע הרביעי ומקיים את המשוואה: $|w|i + 2w = \sqrt{3}$.

ב. מצא את פתרונות המשוואה $z^3 = w(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$ (w - המספר המרוכב שמצאת ב"א).

תשובות

23. א. $z_k = 2 \operatorname{cis}(60^\circ + 72^\circ k) \quad k=0 \dots 4$. ב. $q = \operatorname{cis} 72^\circ$.

24. א. $|z_3 - z_2| = |z_2 - z_1| = 2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}$. ב. $|z_{n+1} - z_n| = 2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|$.

25. א. $m = 2, n = -6$. ב. $|a_5| : |a_3| = 2 : 1$.

26. א. $z_1 = a + 1 + \sqrt{3}i, z_2 = a + 1 - \sqrt{3}i, z_3 = a - 1$. ב. $a = -1$.

27. א. $z_1 = 0, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. ב. $a_1 = -16\frac{1}{2}$.

28. א. $w = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. ב. $z_1 = \operatorname{cis} 300^\circ, z_2 = \operatorname{cis} 180^\circ, z_3 = \operatorname{cis} 60^\circ$.