אלי מיטב

# מבחני בגרות במתמטיקה לשאלון 582 (807)

## עם פתרונות מלאים



ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יָצאו גם לשאלונים 382-481-482-581

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יָצאו לשאלונים 481-482-581-582

בע"ה מנחם־אב התשע"ו אוגוסט 2016 למנינם

## מספר מילים לפנַי

ספר זה מכיל שאלות ממבחני בגרות מהשנים 2004–2016, המתאימות לשאלון 582 (807) בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. לכל השאלות תשובות סופיות בעמוד השאלה ופתרון מלא בהמשך עם הפניה לעמוד המתאים (המספר המעובה בסוגריים משמאל לכל שאלה). בחלקו השני של ספר זה מובאים 26 מבחני הבגרות לשאלון זה שנערכו עד כה עם פתרון מלא.

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעִתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

**סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ־2012 (נכון להיום), כפי שהם מופיעים בספר, נמצאים באתר ההוצאה במִרְשֶׁתֶת (internet), בעלות שנתית מצחיקה של 20 (עשרים) שקלים בלבד. ראו בגב הכריכה.**

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל.
כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורים מ**ארכימדס - פתרונות למידה** ולמורה **שריף אמארה** מכפר זָלָפָה.

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התשע"ז - 2017), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את חלק מהחללים שבין השאלות והפתרונות לְחַלַּחְתִּי בהבזקי אנקדוטות וסיפורים. רוב ה'הבזקים' קשורים למתמטיקה, חלקם אינו כזה, וביניהם גם אנקדוטות בעלות אופי **לאומי או יהודי.**

**ב ה צ ל ח ה**

אלי

**© כל הזכויות על השאלות שמורות למדינת ישראל - משרד החינוך, התרבות והספורט**
**כל הזכויות על הסֵדֶר ועל הפתרונות שמורות למחבר**

האיורים בספר צוירו על־ידי **אלכסנדר לויטס** מקיבוץ גשור שברמת הגולן.
אלכסנדר הוא אביו של סרן **דמיטרי (דימה) לויטס** ז"ל, שנהרג ב'צוק איתן'.

# גידול ודעיכה

## שאלות

**1.** (5 יח' , קיץ תש"ן - 90)

'זמן מחצית החיים' של חומר רדיואקטיבי הוא פרק הזמן שבסופו נשארת מחצית מכמותו ההתחלתית. נגדיר 'זמן רבע חיים' של חומר רדיואקטיבי כפרק הזמן שבסופו נשארת רבע מכמותו ההתחלתית.

זמן רבע החיים של חומר א שווה לזמן מחצית החיים של חומר ב. אם מ־ $100_{gr}$ של חומר א נשארו $80_{gr}$ כעבור 4 שנים, מאיזו כמות של חומר ב יישארו $80_{gr}$ כעבור 4 שנים? **(5)**

**2.** (5 יח' , קיץ תשנ"ג - 93)

כמות הדגים בברֵכת דגים גדלה ב־$p\%$ בכל שבוע.

הכמות ההתחלתית של הדגים היא $k$ טון.

כעבור $x$ שבועות מכרו $k$ טון דגים, והמשיכו לגדל את הדגים הנותרים באותם התנאים.

כעבור $x$ שבועות נוספים היו בברֵכה $2k$ טון דגים. בטא את $x$ באמצעות $p$ . **(5)**

**3.** (004 , קיץ ס"ו - 2006 , מועד ב)

אדם הפקיד בשני בנקים $A$ ו־ $B$, באותו יום את אותו סכום כסף.

בכל אחד מהבנקים הסכום גדֵל באחוז קבוע בכל שנה.

כעבור 7 שנים מיום ההפקדה היה הסכום בבנק $A$ - 6580 ש', ובבנק $B$ - 6150 ש'.

כעבור 3 שנים נוספות היה הסכום בבנק $A$ - 7402.5 ש'.

מצא בכמה אחוזים גדֵל כל שנה סכום הכסף: **א.** בבנק $A$ **ב.** בבנק $B$ **(5)**

**4.** (004 , סתיו ס"ז - 2006 , מועד לוחמים)

**א.** זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 3 שנים.

**(1)** כעבור כמה זמן תקטן כמות החומר עד ל־ $20\%$ מן הכמות ההתחלתית?

**(2)** אם כיום נותרה במעבדה כמות של $350_{gr}$ מחומר רדיואקטיבי זה,
איזו כמות תִוותר ממנו בעוד שנתיים? **(6)**

> **המתמטיקה היא אמנות של קריאה בשמות שונים לאותו הדבר, ובאותו השם לדברים שונים.**

## תשובות

**1.** $89.44_{gr}$

**2.** $x = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$

**3.** **א.** $4\%$ **ב.** $3\%$

**4.** **א.** **(1)** $t = 6.97_{years}$ **(2)** $m_2 = 220.49_{gr}$

## גידול ודעיכה - פתרונות

הנוסחה: $m_t = m_0 \cdot q^t \quad , \quad q = 1 \pm \frac{p}{100}$

**1.** $q_1$ - קצב הדעיכה של חומר א , $q_2$ - קצב הדעיכה של חומר ב

$t$ - משך "זמן רבע חיים" של חומר א , $x$ - כמות חומר א שממנו ישארו $80_{gr}$ עבור $4$ שנים

$$m_{0(א)} = 100 \quad \Rightarrow \quad 80 = 100 \cdot q_1^4 \quad \Rightarrow \quad q_1^4 = 0.8 \quad \Rightarrow \quad q_1 = \sqrt[4]{0.8} \quad \Rightarrow \quad q_1 = 0.9457$$

כעבור $t$ יחידות זמן ישאר מ- $1_{gr}$ של חומר א $0.25_{gr}$ :

$$1 \cdot 0.9457^t = 0.25 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 0.25}{\ln 0.9457} = 24.8307$$

כעבור $t$ יחידות זמן ישאר מ- $1_{gr}$ של חומר ב $0.5_{gr}$ :

$$1 \cdot q_2^t = 0.5 \quad \Rightarrow \quad q_2^{24.8307} = 0.5 \ \ /(\ )^{\frac{1}{24.8307}} \quad \Rightarrow \quad q_2 = e^{-0.0279} = 0.9725$$

$$80 = x \cdot q_2^4 \quad \Rightarrow \quad x \cdot 0.9725^4 = 80 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{80}{0.9725^4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 89.44_{gr}}$$

---

**2.** כמות הדגים כעבור x שבועות לפני המכירה: $k \cdot (1 + \frac{p}{100})^x$

כמות הדגים מיד לאחר המכירה: $k(1 + \frac{p}{100})^x - k$

כמות הדגים כעבור x שבועות נוספים לאחר המכירה: $[k(1 + \frac{p}{100})^x - k] \cdot (1 + \frac{p}{100})^x \underset{\text{נתון}}{=} 2k$

$$(1 + \frac{p}{100})^x \underset{\text{סימון}}{=} t \quad \Rightarrow \quad (kt - k) \cdot t = 2k \quad \Rightarrow \quad k\,t^2 - k\,t - 2k = 0 \ \ / : k \quad \Rightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0$$

$$t = \frac{1 \pm 3}{2} \ \ , \ \ t > 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad (1 + \frac{p}{100})^x = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = \frac{\ln 2}{\ln (1 + \frac{p}{100})} = \log_{(1+\frac{p}{100})} 2}$$

---

**3. א.** נסמן: $x$ - סכום הכסף שהופקד , $q_1$ - שיעור הגידול בבנק $A$ , $q_2$ - שיעור הגידול בבנק $B$

$$(I) \ \ x \cdot q_1^7 = 6580$$

$$(II) \ \ x \cdot q_1^{10} = 7402.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{(II)}{(I)} = q_1^3 = \frac{7402.5}{6580} = 1.125 \ \ / \sqrt[3]{\ } \quad \Rightarrow \quad q_1 = 1.04 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = 4\%}$$

**ב.**

$$(I) \ \ x \cdot 1.04^7 = 6580 \ \ / : 1.04^7 \quad \Rightarrow \quad x = 5,000_{sh}$$

$$5000 \cdot q_2^7 = 6150 \quad \Rightarrow \quad q_2^7 = \frac{6150}{5000} = 1.23 \ \ /(\ )^{\frac{1}{7}} \quad \Rightarrow \quad = 1.03 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B = 3\%}$$

## גאומטריה אנליטית

**הקו הישר - שאלות** (כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 007.)

**1.** (קיץ ס״ד - 2004 , מועד א) נתון משולש שווה־צלעות ABC.
שנים מקודקודי המשולש הם: $B(-a, 0)$ ו־$C(a, 0)$ $(a > 0)$. **(19)**
הראה כי סכום המרחקים משלוש צלעות המשולש, של נקודה כלשהי במשולש תלוי ב־$a$ בלבד.

**2.** (קיץ ס״ח - 2008 , מועד ב)
שני קדקודי הבסיס AB בטרפז ABCD הם $A(6, 10)$ ו־ $B(10, 8)$.
הבסיס CD נמצא על ישר העובר דרך הנקודה $(-2, 9)$.
נקודת המפגש M של אלכסוני הטרפז מחלקת את האלכסון DB כך ש־ $MB{:}MD = 1{:}4$ .
שיעור $x$ של הנקודה M הוא 8.
**ב.** נתונה הנקודה E כך שהמרובע DMCE הוא מקבילית. מצא את שטח המחומש DABCE .
הדרכה: היעזר בסרטוט מדויק ככל האפשר. **(20)**

**מעגל - שאלות** (כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 007.)

**3.** (קיץ ס״ו - 2006 , מועד א)
**א.** מהי משוואת המעגל העובר דרך $A(2, -9)$, ומשיק לשני הצירים?
**ב.** הצלע AB של ריבוע ABCD משיקה בנקודה $A(2, -9)$ למעגל, שרדיוסו הוא הקטן מבין שני המעגלים שאת משוואתם מצאת בסעיף א׳. הריבוע נמצא מחוץ למעגל, והקודקוד B נמצא ברביע הרביעי. אורך צלע הריבוע שווה לרדיוס המעגל.
מצא את משוואת הישר שעליו מונחת הצלע BC של הריבוע. **(21)**

**4.** (חורף ס״ז - 2007)
מעגל שמרכזו נמצא על הישר $y = mx - 8$, עובר בנקודות $A(16, 6)$ ו־ $B(-2, 0)$.
**א.** הבע את שיעורי מרכז המעגל באמצעות $m$. **(22)**

| **לבריאות** |
| --- |
| *שמתם לב שהברכה 'לבריאות' (למתעטש) מורכבת מ'לֵב' ו'רֵיאוֹת' ?* |

### תשובות

**1.** סכום המרחקים $= a\sqrt{3}$ (יחידות אורך) $(\surd)$

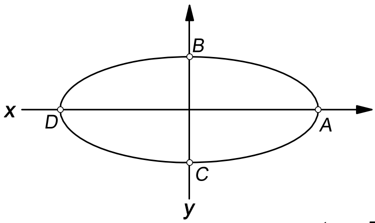
**2.** **ב.** $S = 82$ (יחידות ריבועיות)

**3.** **א.** (1) $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$ , (2) $(x-17)^2 + (y+17)^2 = 289$ **ב.** $y = \frac{4}{3}x - 20$

**4.** **א.** $O(\frac{32}{m+3}, \frac{24(m-1)}{m+3})$

**<u>אליפסה - שאלות</u>** (כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 007.)

**5.** (קיץ ס"ח - 2008 , מועד א)




האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ חותכת

את הצירים בנקודות $D$ , $C$ , $B$ , $A$ כמתואר בציור.

מוקדי האליפסה הם: $F_1$ ו־ $F_2$.

אחד ממוקדי האליפסה נמצא בנקודה $(\sqrt{7},0)$. $tg\angle BAC=\frac{24}{7}$.

**א.** מצא את משוואת האליפסה.

**ב.** נקודה $P$ היא נקודה כלשהי על האליפסה. הוכח כי: $\angle F_1PF_2\neq 90^\circ$. **(23)**

**6.** (קיץ ס"ח - 2008 , מועד ב)

נתון משולש שווה־צלעות שאורך צלעו 16 יחידות אורך.

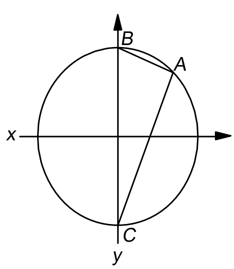
שניים מקדקודי המשולש מונחים על היקף האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ .

שני קצוות של אחד הגבהים במשולש הם המוקדים של האליפסה.

**א.** מצא את משוואת האליפסה.

**ב.** האם קיים משולש ששניים מקדקודיו הם המוקדים של האליפסה שאת משוואתה מצאת בסעיף א', והקדקוד השלישי שלו נמצא על היקף האליפסה, כך ששטח המשולש הוא 70 יחידות ריבועיות ? נמק. **(24)**

**7.** (חורף תש"ע - 2010)




אליפסה, שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ , $a<b$ ,

חותכת את ציר $y$ בנקודות $B$ ו־ $C$ .

$A$ נקודה על האליפסה ברביע הראשון.

$AB=13$ , $BC=40$ , $AC=37$ .

**א.** מצא את משוואת האליפסה. **(25)**

**רצוי שהמצוי יהיה כמו הרצוי**

למילים 'רצוי' ו'מצוי' יש שלוש אותיות משותפות – 'צ' , 'ו' , ו־ 'י'.

ההפרש הגימטרי ביניהן, אם־כן, הוא ההפרש בין 'ר' (200) ל־ 'מ' (40), שהוא 160.

'כסף' בגימטריה זה 160 (= 80 + 60 + 20). מסקנה: ההבדל בין הרצוי למצוי הוא: כסף . . .

**תשובות**

**5.** **א.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ **6.** **א.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{96}=1$ **ב.** לא **7.** **א.** $\frac{7x^2}{2304}+\frac{y^2}{400}=1$

**פרבולה - שאלות** (כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 007.)

**.8** (קיץ ס"ו - 2006 , מועד ב)

נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ , $p > 2$. **(26)**

הישר $x = 1$ חותך את הפרבולה בנקודות $A$ ו־$B$. $C$ היא נקודה על ציר $x$.

הבע באמצעות $p$ (במידת הצורך) את:

**א.** שטח המשולש $ABC$, אם מפגש התיכונים במשולש $ABC$ הוא מוקד הפרבולה.

**ב.** שיעורי הנקודה $C$, אם מפגש האנכים האמצעיים במשולש $ABC$ הוא מוקד הפרבולה.

**.9** (קיץ ס"ו - 2006 , מועד מיוחד)

הפרבולה $y^2 = (k-2)x$ , $k - 2 > 0$ ,

משיקה למעגל $(x-3)^2 + y^2 = 2k - 4$ בשתי נקודות.

**א.** מצא את הערך של הפרמטר $k$.

**ב.** עבור הערך של $k$ שמצאת בסעיף א',

מצא את משוואת הישר ששיפועו חיובי והוא משיק משותף למעגל ולפרבולה. **(27)**

**.10** (חורף ס"ח - 2008)

הנקודה $(1,6)$ נמצאת על הפרבולה $y^2 = 2px$ , והנקודה $(12,-4)$ נמצאת על מעגל קנוני.

**א.** מצא את משוואת הישר שעליו מונח המיתר המשותף לפרבולה ולמעגל הקנוני. **(28)**

**.11** (חורף ס"ט - 2009)

נתונות שתי פרבולות: $(II)\ y^2 = px$ , $(I)\ y^2 = 2px$ , $p > 0$.

ישר $y = mx$ $(m > 0)$ חותך את פרבולה $I$ בנקודה $A$ , ואת פרבולה $II$ בנקודה $B$ .

($A$ ו־ $B$ אינן בראשית הצירים).

**א.** הוכח כי המשיק לפרבולה $I$ בנקודה $A$ מקביל למשיק לפרבולה $II$ בנקודה $B$ .

**ב.** המשיק לפרבולה $I$ בנקודה $A$ חותך את המדריך של פרבולה $I$ בנקודה $C$ ,

והמשיק לפרבולה $II$ בנקודה $B$ חותך את אתו מדריך בנקודה $D$ .

מצא את $m$ , אם נתון כי היחס בין שטח המשולש $DCA$ לשטח המשולש $DCB$ הוא $1.5$.

(הערה: אין צורך להשתמש בעובדה שהמשיקים מקבילים.) **(29)**

## תשובות

**.8 א.** $S = 3\sqrt{2p}\,(\frac{p}{2} - 1)$ **ב.** $(1)\ C(p+1,0)$ , $(2)\ C(-1,0)$

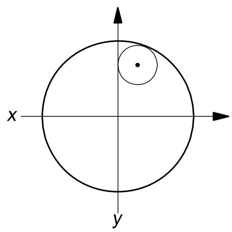
**.9 א.** $k = 6$ **ב.** $y = x + 1$

**.10 א.** $x = 4$

**.11 ב.** $m = \sqrt{2}$

**מקומות גאומטרים - שאלות** (כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 007.)

**.13** (חורף ס"ה - 2005)

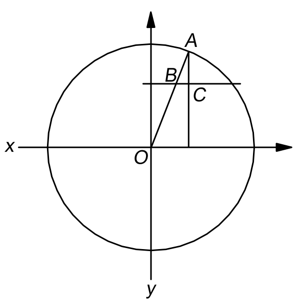



נתון המעגל $x^2+y^2=R^2$ .

**א.** מצא את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים לציר $y$ ולמעגל הנתון מבפנים (הבע באמצעות $R$).
נתון כי מרכזי המעגלים נמצאים ברביע הראשון.

**ב.** המעגל $(x-8)^2+(y-6)^2=64$ משיק לציר $y$ ולמעגל הנתון מבפנים.
מצא את $R$. **(31)**

**.14** (חורף ס"ו - 2006)




נתון המעגל $x^2+y^2=R^2$.

דרך ראשית הצירים $O$ מעבירים ישר כלשהו.

הישר חותך את המעגל בנקודה $A$.

מהנקודה $A$ מורידים אנך לציר $x$.

$B$ היא נקודה על הקטע $OA$ כך ש־$OB=2\,AB$.

דרך $B$ מעבירים ישר, המקביל לציר $x$ וחותך את האנך בנקודה $C$.

**א.** הבע באמצעות $R$ את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות $C$ הנוצרות באופן זה.

**ב.** נתונים שיעורי הנקודה $B(2,4)$.
חשב את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר $y$ של המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א. **(32)**

**.15** (קיץ ס"ו - 2006 , מועד א)

שני קודקודים של משולש הם $A(a,a)$ ו־$B(a,-a)$ $(a>0)$.

הקודקוד השלישי $C$ נמצא על ציר $y$.

**א.** מצא את משוואת המקום הגאומטרי של מפגשי הגבהים בכל המשולשים $ABC$ המקיימים תנאים אלה.

**ב.** הישר $AC$ משיק למקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א.
הבע באמצעות $a$ את אורך הקטע $AC$ . **(33)**

## תשובות

**.13 א.** $y=\sqrt{R^2-2Rx}\,,\ 0<x<\frac{R}{2}$ **ב.** $R=18$ (יחידות אורך)

**.14 א.** $4x^2+9y^2=4R^2$ **ב.** $(0,\pm2\sqrt{5})$

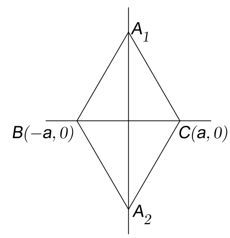
**.15 א.** $y^2=ax$ (פרבולה) **ב.** $AC=\frac{a}{2}\sqrt{5}$ (י"א)

## גאומטריה אנליטית - פתרונות

**.1** דרך א׳:

$m_{AC} = tg\ 120^\circ = -\sqrt{3}\ ;\ \ C(a,0)\quad \Rightarrow\quad AC:\ \ -\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}a = 0$

$m_{AB} = tg\ 60^\circ = \sqrt{3}\ ;\ \ B(-a,0)\quad \Rightarrow\quad AB:\ \ \sqrt{3}x - y + \sqrt{3}a = 0$

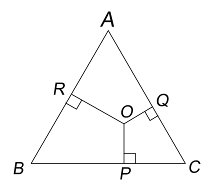



תהי $O(m,n)$ נקודה בתוך המשולש $ABC$.

נשתמש בנוסחת מרחק נקודה $(x_1,y_1)$ מישר $Ax+By+C=0$ .

נשמיט את הערך המוחלט שבנוסחה, כי הנקודה $O$ נמצאת מתחת לשתי הצלעות שמרחקה אליהן מחושב ($AB$ ו־ $AC$).

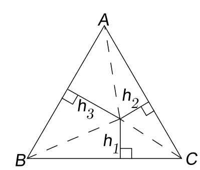
$OP = n\ ,\quad OQ = \frac{-\sqrt{3}m-n+\sqrt{3}a}{\sqrt{3+1}}\ ,\quad OR = \frac{\sqrt{3}m-n+\sqrt{3}a}{\sqrt{3+1}}$




$OP+OQ+OR = n + \frac{-\sqrt{3}m-n+\sqrt{3}a}{\sqrt{3+1}} + \frac{\sqrt{3}m-n+\sqrt{3}a}{\sqrt{3+1}}$

$= \frac{2n-\sqrt{3}m-n+\sqrt{3}a+\sqrt{3}m-n+\sqrt{3}a}{2} = \frac{2\sqrt{3}a}{2} = \boldsymbol{a\sqrt{3}}\ \ (\checkmark)$

דרך ב׳ (**ארבל ילין**, תלמיד בבי"ס שב"צ - גבעתיים):




$S_\triangle = \frac{2ah_1}{2} + \frac{2ah_2}{2} + \frac{2ah_3}{2} = a(h_1+h_2+h_3)$

$\Rightarrow\quad \boldsymbol{h_1+h_2+h_3 = \frac{S}{a}}\ \ (\checkmark)$

מכיון ש־$S$ ו־$a$ קבועים - גם סכום הגבהים קבוע.

לא נדרש:

$\frac{h_a}{a} = tg\ 60^\circ = \sqrt{3}\quad \Rightarrow\quad h_a = \sqrt{3}a\quad \Rightarrow\quad S_\triangle = \frac{2a\cdot\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}a^2$

$\Rightarrow\quad h_1+h_2+h_3 = \frac{S}{a} = \frac{\sqrt{3}a^2}{a} = a\sqrt{3}$

**גם מתמטיקאים ענקיים יכולים לטעות**

**אוילר** (1707–1783), מגדולי המתמטיקאים,

הניח שאין פתרון של מספרים שלמים למשוואה: $a^5+b^5+c^5+d^5=e^5$. אבל הוא טעה.

לפני פחות מ־50 שנה מצאו שלושה מתמטיקאים, מקרה סותר: $133^5+110^5+84^5+27^5=144^5$

**9. א.** $y^2 = (k-2)x$ , $k-2>0$ , $(x-3)^2 + y^2 = 2k-4$

גם הפרבולה וגם המעגל סימטריים לציר x

כלומר: אם $(p, q)$ נמצאת על הפרבולה או על המעגל

- אז גם $(p, -q)$ נמצאת על הפרבולה או על המעגל בהתאמה.

לכן, בפתרון המשוואה הריבועית המתקבלת מהשוואה ביניהם - נקבל פתרון יחיד

מכיון שבנקודות ההשקה - שיעורי x שווים (בגלל הסימטריה).

$$(I) \quad y^2 = (k-2)x$$

$$(II) \quad (x-3)^2 + y^2 = 2k-4 \quad \overset{(I)}{\Rightarrow} \quad (x-3)^2 + (k-2)x = 2k-4$$

$$x^2 - 6x + 9 + kx - 2x - 2k + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (k-8)x + (13-2k) = 0$$

$$\triangle = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-8)^2 - 4(13-2k) = 0$$

$$k^2 - 16k + 64 - 52 + 8k = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 8k + 12 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k=6} \quad \Leftarrow \quad k > 2 \quad \Leftarrow \quad k-2>0$$

**ב.**

נקודת ההשקה $(k=6)$:

$$x^2 + (k-8)x + (13-2k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

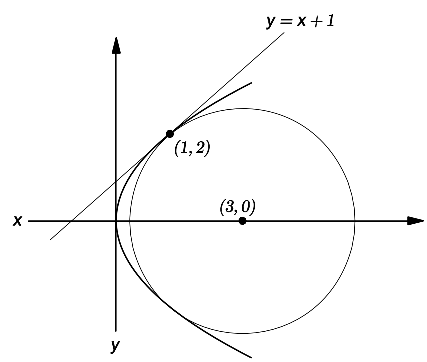
$$y^2 = (k-2)x \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4 \cdot 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$$

$m > 0$ (שיפוע הישר המשיק), לכן הנקודה הרלוונטית היא $(1, 2)$ (ראה ציור).

משוואת ישר משיק לפרבולה: $yy_1 = p(x + x_1)$

משוואת הפרבולה: $y^2 = 4x = 2px \quad \Rightarrow \quad p = 2$

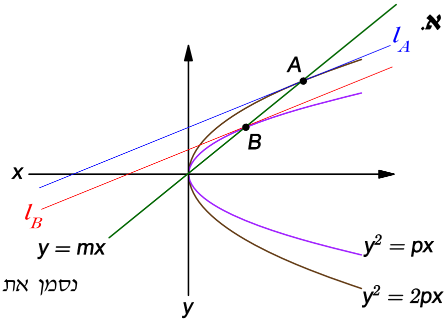
$$\Rightarrow \quad y \cdot 2 = 2(x+1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = x+1}$$




*מוח האדם מורכב מביליון (אלף מיליונים $1,000,000,000$) תאים, בתוכם 100 מיליארד נוירונים בקליפת המוח. כל אחד מנוירונים אלה מחובר לאלף עד $10,000$ נוירונים אחרים. יחד הם יוצרים רשת עצבית מדהימה בגודלה, בהיקפה ובמורכבותה. אם היו מותחים את כל תאי העצב במוח וסיביהם, ומחברים אותם ברצף, אורכם היה כמרחק כדור הארץ מהירח וחזרה!*

*(שיחות עם מדענים / צבי ינאי)*

**11. א.**




$\underline{A:}\ y^2 = 2px \ ,\ \ y = mx \quad \Rightarrow \quad (mx)^2 = 2px$

$$m^2x^2 = 2px \underset{\substack{\uparrow \\ x_A \neq 0 \text{ (מהנתון)}}}{\Rightarrow} m^2 x = 2p \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2p}{m^2}$$

$$y = m \cdot \frac{2p}{m^2} = \frac{2p}{m} \quad \Rightarrow \quad A\left(\frac{2p}{m^2}\ ,\ \frac{2p}{m}\right)$$

נסמן את שיפוע המשיק ב- $a$.

נוסחת הישר המשיק לפרבולה ב- $(x_0, y_0)$ :

$$yy_0 = p(x + x_0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{p}{y_0}x + \frac{px_0}{y_0} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{p}{y_0} = \frac{p}{\frac{2p}{m}} \quad \Rightarrow \quad \underline{a_A = \frac{m}{2}}$$

$$\underline{B:}\ y^2 = px \ ,\ \ y = mx \quad \Rightarrow \quad (mx)^2 = px \quad \Rightarrow \quad m^2x^2 = px \underset{\substack{\uparrow \\ x_B \neq 0 \text{ (מהנתון)}}}{\Rightarrow} m^2x = p \quad \Rightarrow \quad x = \frac{p}{m^2}$$

$$y = m \cdot \frac{p}{m^2} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{p}{m^2}\ ,\ \frac{p}{m}\right)$$

שיפוע הישר המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ ב- $(x_0, y_0)$ הוא $\frac{p}{y_0}$.

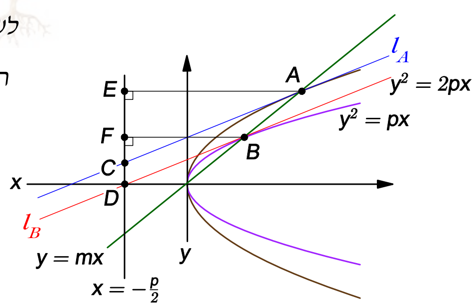
הפרבולה $y^2 = px$ ניתנת להצגה: $y^2 = 2 \cdot \frac{p}{2}\, x$ והשיפוע יהיה: $\frac{p}{2\,y_0}$.

$$a = \frac{p}{2\,y_0} = \frac{p}{2 \cdot \frac{p}{m}} \quad \Rightarrow \quad \underline{a_B = \frac{m}{2}} \quad \rightarrow \quad a_A = a_B \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{l_A \parallel l_B} \quad (\checkmark)$$

**ב.**

לשני המשולשים בסיס משותף - $CD$.

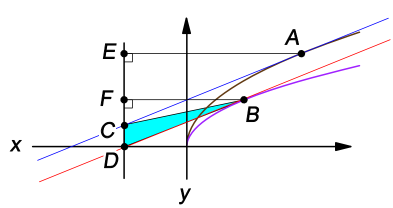
הגבהים לבסיס זה הם $FB$ ו- $EA$ .




$$\frac{S_{\triangle DCA}}{S_{\triangle DCB}} = \frac{\frac{CD \cdot EA}{2}}{\frac{CD \cdot FB}{2}} = \frac{EA}{FB} = \frac{3}{2}$$

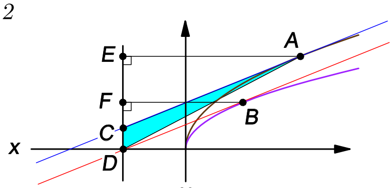
$$EA = x_A - x_E = \frac{2p}{m^2} - \left(-\frac{p}{2}\right) = p\left(\frac{2}{m^2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$FB = x_B - x_F = \frac{p}{m^2} - \left(-\frac{p}{2}\right) = p\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{2}\right)$$



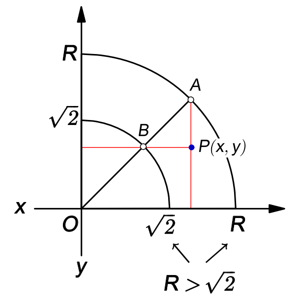

$$\frac{EA}{FB} = \frac{p\left(\frac{2}{m^2} + \frac{1}{2}\right)}{p\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{2}{m^2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4 + m^2}{2 + m^2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 8 + 2m^2 = 6 + 3m^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2$$




$$m > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m = \sqrt{2}}$$

**19. א.**




$$A \in \{x^2 + y^2 = R^2\} \quad \Rightarrow \quad A(x_A\,,\sqrt{R^2 - x_A^2})$$

$$x_A = x_P = x \quad \Rightarrow \quad A(x\,,\sqrt{R^2 - x^2})$$

$$B \in \{x^2 + y^2 = 2\} \quad \Rightarrow \quad B(\sqrt{2 - y_B^2}\,,\, y_B)$$

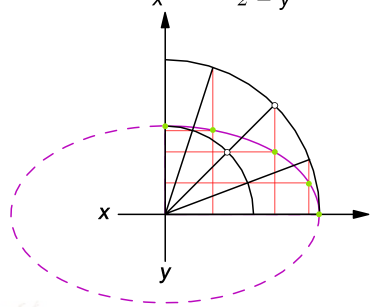
$$y_B = y_P = y \quad \Rightarrow \quad B(\sqrt{2 - y^2}\,,\, y)$$

$$O(0,0)\,,\; m_{OA} = m_{OB} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x} = \frac{y}{\sqrt{2 - y^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{R^2 - x^2}{x^2} = \frac{y^2}{2 - y^2}$$

$$\Rightarrow \quad (R^2 - x^2)(2 - y^2) = x^2y^2$$

$$\Rightarrow \quad 2R^2 - R^2y^2 - 2x^2 + x^2y^2 = x^2y^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{2x^2 + R^2y^2 = 2R^2 \quad , \; x \geq 0\,,\; y \geq 0}$$




**ב.**

$$2x^2 + R^2y^2 = 2R^2 \quad / : 2R^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{2} = 1 \;\;,\;\; x \geq 0\,,\; y \geq 0$$ **רבע אליפסה**

### קָרְל פְּרִידְרִיךְ גָאוּס

**קָרְל פְּרִידְרִיךְ גָאוּס** 1777–1855. מתמטיקאי ופיזיקאי גרמני. אחד משלושת גדולי המתמטיקאים בכל הזמנים, לצידם של ניוטון וארכימדס. עסק באלגברה, תורת המספרים, גיאומטריה דיפרנציאלית, תורת הכבידה, חשמל ומגנטיות, אסטרונומיה ועוד. בהיותו ילד, משועמם משיעור בביה"ס, הטיל עליו המורה לחבר את כל המספרים מ־1 עד 100. המורה נדהם כשגאוס מסר לו את התשובה תוך שניות. גאוס חילק את כל המספרים שבין 1 ל־100 כך: $1 + 100,\; 2 + 99,\; 3 + 98\; .\;.\;.\; 50 + 51$ . קיבלנו 50 זוגות שסכום כל אחד מהם הוא 101 ולכן הסכום הוא: $101 \times 50 = 5050$ . השגו הגדול באלגברה היה הוכחת המשפט היסודי של האלגברה במספר אופנים. מָצָא את כל ערכי n עבורם ניתן לבנות מצולע משוכלל בעזרת סרגל ומחוגה בלבד. היה לו מנהג להשהות את תגליותיו עד כדי עשרות שנים, גם כדי להוציא מתחת ידו יצירה מושלמת וגם כדי להמנע מלהכנס לוויכוח עם מי שחסר את ההבנה הדרושה לקליטתם. הגיע למסקנה שניתן לבנות גם גאומטריה 'לא אוקלידית' (שבה ישרים מקבילים נפגשים באינסוף) אולם לא פרסם זאת ודבריו נשארו ביומניו.

**22. א.** <u>סימון:</u> תהי $P(x,y)$ נקודה במקום הגאומטרי המבוקש.

$x^2+y^2=100 \quad\Rightarrow\quad R=10$

$\frac{2\pi r}{2\pi R}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad r=\frac{1}{2}R=5 \quad\Rightarrow\quad d(P\leftrightarrow OB)=5$

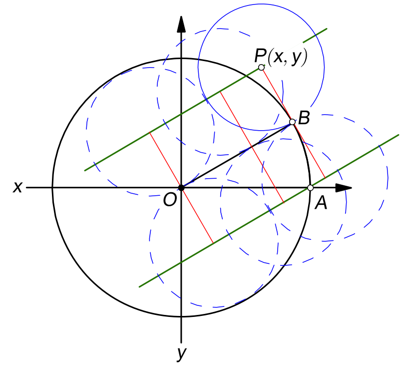
$m_{OB}=tg\,30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad\Rightarrow\quad y_{OB}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$OB:\ \ \sqrt{3}\,x-3y=0$

$d(P\leftrightarrow OB)=\frac{|\sqrt{3}\,x-3y|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}}=\frac{|\sqrt{3}\,x-3y|}{\sqrt{12}}=5$

$\sqrt{3}\,x-3y=\pm5\sqrt{12}=\pm5\cdot2\sqrt{3}\ \ /:\sqrt{3}$

$x-\sqrt{3}\,y=\pm10 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x-\sqrt{3}\,y\pm10=0}$




<u>הערה:</u> הדרישה היא למרכזי המעגלים המשיקים ל<u>ישר</u> $OB$ ולאו דוקא ל<u>קטע</u> $OB$.

אם הדרישה (או הכוונה) היתה דוקא ל<u>קטע</u> $OB$ אז יש להוסיף את התחום:

$-2.5\le x\le7.5$ עבור $x-\sqrt{3}\,y+10=0$ , $2.5\le x\le12.5$ עבור $x-\sqrt{3}\,y-10=0$.

ראה ציור. השלם את הנימוק במקרה זה.

**ב.**

המרובע המתקבל הוא מלבן:

$PS\parallel AT$ . $\angle P=\angle T=90^\circ$ (היקפיות על קוטר).

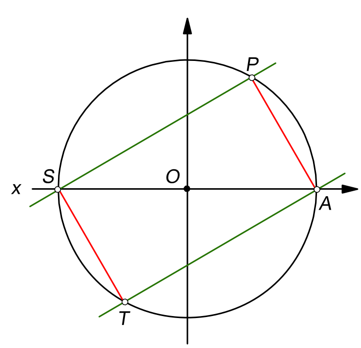
$\angle A=\angle P=90^\circ$ , $\angle T=\angle S=90^\circ$ (חד־צדדיות).

מרובע שכל זוויותיו ישרות הוא מלבן.

את רוחב המלבן יש לנו כבר: $AP=5+5=10$.

$PS=\sqrt{SA^2-PA^2}=\sqrt{20^2-10^2}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$

$S_{APST}=10\sqrt{3}\cdot10 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S=100\sqrt{3}}$ **(יחידות ריבועיות)**




## מספרים מרוכבים

**<u>שאלות</u>** כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 007 .

**1.** (קיץ ס"ד - 2004 , מועד א) **א.** $z_1$ ו־ $z_2$ הם שני מספרים מרוכבים שחלקם המדומה אינו אפס.

הוכח: אם $z_1 + z_2$ וגם $z_1 \cdot z_2$ הם מספרים ממשיים, אזי $z_2 = \bar{z}_1$

**ב.** נתונה הסדרה ההנדסית $\ldots 2 , 1-i , -i$ . מצא את $a_9$ (אין קשר בין הסעיפים). **(48)**

**2.** (קיץ ס"ד - 2004 , מועד ב)

$z_1$ ו־ $z_2$ הם פתרונות המשוואה: $z^2 - (1+3i)z + 2i - 2 = 0$ , $|z_1| > |z_2|$

**א.** חשב את $z_1$ ואת $z_2$.

**ב.** נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3 \ldots$ המקיימת: $a_1 = \frac{z_1}{i}$ ו־ $a_2 = 2z_2$.

הראה כי $a_{4n+1}$ הוא מספר ממשי. **(48)**

**3.** (קיץ ס"ו - 2006 , מועד מיוחד) **א.** הוכח כי עבור כל מספר מרוכב $z$ מתקיים: $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.
**(48)**

**4.** (חורף ס"ה - 2005) $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ($0^\circ \le \alpha \le 360^\circ$).

**א.** פתור את המשוואה $z \cdot \bar{z} = z + \bar{z}$.

**ב.** שני הפתרונות של $z$ שמצאת בסעיף א', הם שני קודקודים של משולש שווה־צלעות,

החסום במעגל היחידה. מצא את הקודקוד השלישי של המשולש. נמק. **(49)**

**5.** (קיץ ס"ה - 2005 , מועד א) $z_1$ ו־ $z_2$ הם מספרים מרוכבים הנמצאים מעל ציר $x$

ומקיימים: $z_1 \cdot z_2 = -1$ , $z_1 - z_2 = -1$.

**א.** מצא את $z_1$ ואת $z_2$.

**ב.** $z_1$ ו־ $z_2$ הם קודקודים סמוכים בריבוע הנמצא כולו מעל ציר $x$.

$w_1$, הנמצא ברביע הראשון, הוא קודקוד נוסף של הריבוע.

**(1)** מצא את אורך צלע הריבוע.

**(2)** $w_1$ הוא אחד מפתרונות המשוואה $w^{12} = a$ . מצא את $a$. **(49)**

## תשובות

**1. ב.** $a_9 = -16i$

**2. א.** $z_1 = 2i$ , $z_2 = 1 + i$ **ב.** $a_{4n+1} = 2 \cdot (-4)^n$ $(\surd)$

**4. א.** $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \text{cis } 60^\circ$ , $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = \text{cis } 300^\circ$ **ב.** $C(-1, 0) \equiv \text{cis } 180^\circ$

**5. א.** $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ , $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

**ב. (1)** 1 (יחידת אורך אחת) **(2)** $a = -(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{12} = -2701.999$

## <u>מספרים מרוכבים - פתרונות</u>

**1. א.** נסמן: $z_1 = a+bi\ ,\ z_2 = c+di$

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i \quad\Rightarrow\quad ad+bc=0 \quad\Rightarrow\quad bc=-ad$$

$$\Downarrow$$

$$z_1+z_2 = (a+c)+(b+d)i \quad\Rightarrow\quad b+d=0 \quad\Rightarrow\quad d=-b \quad\Rightarrow\quad bc=ab \quad\Rightarrow\quad a=c$$

$$\Rightarrow\quad z_1 = a+bi\ ,\ z_2 = c+di = a-bi = \overline{a+bi} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{z_1 = \bar{z}_2}\ \ (\checkmark)$$

**ב.**

$$-i\ ,\ 1-i\ ,\ 2\ .\ .\ . \quad\Rightarrow\quad q^2 = \frac{2}{-i} = \frac{2}{-i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{2i}{1} = 2i$$

$$a_9 = -i\cdot q^8 = -i\cdot(q^2)^4 = -i\cdot(2i)^4 = -i\cdot 16\cdot 1 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a_9 = -16i}$$

---

**2. א.**

$$z^2-(1+3i)z+2i-2=0$$

$$z_{1,2} = \frac{1+3i\pm\sqrt{(1+3i)^2-4(2i-2)}}{2} = \frac{1+3i\pm\sqrt{1+6i-9-8i+8}}{2} = \frac{1+3i\pm\sqrt{-2i}}{2}$$

$$\sqrt{-2i} = a+bi \quad\Rightarrow\quad -2i = a^2+2ab\ i-b^2 = (a^2-b^2)+2ab\ i$$

$$(I)\ \ a^2-b^2=0 \quad,\quad (II)\ \ -2=2ab \quad\Rightarrow\quad ab=-1 \quad\Rightarrow\quad a=-\frac{1}{b}$$

$$(I)\ \ (-\frac{1}{b})^2-b^2=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{b^2}-b^2=0 \quad\Rightarrow\quad 1-b^4=0 \quad\Rightarrow\quad b^4=1 \quad\Rightarrow\quad b=\pm1$$

$$b=-1 \quad\Rightarrow\quad a=1 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{-2i}=1-i$$

ניתן לוותר על מציאת השורש השני (שהוא $-1+i$), מכיון ששני הפתרונות של המשוואה הריבועית מתקבלים ממילא משתי האפשרויות: $\pm\sqrt{-2i}$

$$z = \frac{1+3i+(1-i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i \quad,\quad |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$z = \frac{1+3i-(1-i)}{2} = \frac{4i}{2} = 2i \quad,\quad |\ 2i\ | = \sqrt{0+4} = 2$$

$$|z_1| > |z_2| \quad,\quad 2>\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{z_1 = 2i\ \ ,\ \ z_2 = 1+i}$$

**ב.**

$$a_1 = \frac{z_1}{i} = \frac{2i}{i} = 2 \quad;\quad a_2 = 2z_2 = 2(1+i) = 2+2i \quad\Rightarrow\quad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

$$a_{4n+1} = a_1 q^{4n} = 2\cdot(1+i)^{4n} = 2\cdot(((1+i)^2)^2)^n$$

$$= 2\cdot((1+2i-1)^2)^n = 2\cdot((2i)^2)^n \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a_{4n+1} = 2\cdot(-4)^n} \quad (\checkmark)$$

---

**3. א.**

$$\bar{z} = \overline{cis\ \alpha} = \overline{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha\ ,\ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha}}{=} \cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha) = cis\ (-\alpha)$$

$$(\bar{z})^n = (cis\ (-\alpha))^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{דה-מואבר}}}{=} cis\ (-n\alpha) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{הוכח לעיל}}}{=} \overline{cis\ n\alpha} \overset{(2)}{=} \overline{(cis\ \alpha)^n} = \overline{z^n} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{(\bar{z})^n = \overline{z^n}}\ \ (\checkmark)$$

**23. א.** $2z^2-(m-2)^2z-\frac{1}{8}i=0$

$\underline{\triangle=0:}\ \ (m-2)^4+i=0 \quad\Rightarrow\quad (m-2)^4=-i=\text{cis}\,(-90^\circ)$

$\Rightarrow\quad (m-2)_1=\text{cis}\,(\frac{-90^\circ}{4}) \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{m_1=2+cis\,(-22.5^\circ)=2.92-0.38\,i}$

$\Rightarrow\quad (m-2)_2=\text{cis}\,(\frac{-90^\circ+360^\circ}{4}) \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{m_2=2+cis\,67.5^\circ=2.38+0.92\,i}$

$\Rightarrow\quad (m-2)_3=\text{cis}\,(\frac{-90^\circ+360^\circ\cdot 2}{4}) \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{m_3=2+cis\,157.5^\circ=1.076+0.38\,i}$

$\Rightarrow\quad (m-2)_4=\text{cis}\,(\frac{-90^\circ+360^\circ\cdot 3}{4}) \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{m_4=2+cis\,247.5^\circ=1.62-0.92\,i}$

**ב.** החלק הממשי בכל הפתרונות חיובי: $2+\cos\alpha>0 \quad\Rightarrow\quad -1\le\cos\alpha\le 1$

בדיקת החלק המדומה: $\sin(-22.5^\circ)<0\ ,\ \sin 67.5^\circ>0\ ,\ \sin 157.5^\circ>0\ ,\ \sin 247.5^\circ<0$

$\Rightarrow\quad \mathbf{m_2=2.38+0.92\,i\ \ ,\ \ m_3=1.076+0.38\,i}$

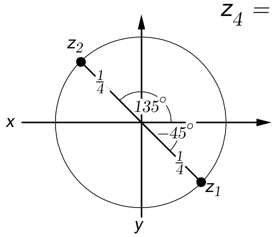
**ג.** **(1)-(2)** $z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}\ \ ,\ \ \triangle=0 \quad\Rightarrow\quad z=-\frac{b}{2a}=\frac{(m-2)^2}{4}$

$\Rightarrow\quad z_1=\frac{1}{4}(\text{cis}\,(-22.5^\circ))^2=\frac{1}{4}\text{cis}\,2\cdot(-22.5^\circ)=\frac{1}{4}\,\text{cis}\,(-45^\circ)$

$z_2=\frac{1}{4}(\text{cis}\,67.5^\circ)^2=\frac{1}{4}\,\text{cis}\,2\cdot 67.5^\circ=\frac{1}{4}\,\text{cis}\,135^\circ$

$z_3=\frac{1}{4}(\text{cis}\,157.5^\circ)^2=\frac{1}{4}\,\text{cis}\,2\cdot 157.5^\circ=\frac{1}{4}\,\text{cis}\,315^\circ=\frac{1}{4}\,\text{cis}\,(-45^\circ)=z_1$

$z_4=\frac{1}{4}(\text{cis}\,247.5^\circ)^2=\frac{1}{4}\,\text{cis}\,2\cdot 247.5^\circ=\frac{1}{4}\,\text{cis}\,495^\circ=\frac{1}{4}\,\text{cis}\,135^\circ=z_2$



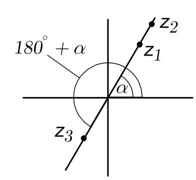

קיבלנו רק שני פתרונות, שהן שתי נקודות במישור גאוס.
נחבר כל אחד מהפתרונות עם ראשית הצירים.
הזווית המתקבלת בין שני הקטעים היא זווית שטוחה:
$45^\circ+135^\circ=180^\circ$ .

קיבלנו, אם־כן, ישר העובר דרך ראשית הצירים, ברביעים II ו־ IV $\Leftarrow$ $\mathbf{y=-x}$ .

---

**24. א.**

$\arg z_1=\arg z_2=\alpha\ \ ,\ \ \arg z_3=180^\circ+\alpha\ \ ,\ \ z_1=r_1\,\text{cis}\,\alpha\ \ ,\ \ z_2=r_2\,\text{cis}\,\alpha$




$z_3=r_3\,\text{cis}\,(180^\circ+\alpha)=r_3\,(\cos(180^\circ+\alpha)+i\sin(180^\circ+\alpha))$

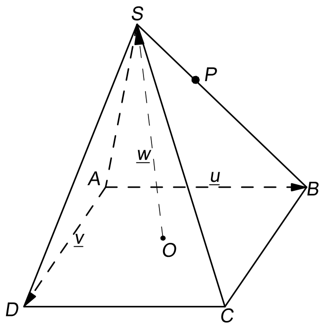
$=r_3\,(-\cos\alpha-i\sin\alpha)=-r_3\,\text{cis}\,\alpha$

$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\frac{r_1\text{cis}\,\alpha+r_3\text{cis}\,\alpha}{r_2\text{cis}\,\alpha+r_3\text{cis}\,\alpha}=\frac{\text{cis}\,\alpha\,(r_1+r_3)}{\text{cis}\,\alpha\,(r_2+r_3)}=\frac{r_1+r_3}{r_2+r_3} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\frac{|z_1|+|z_3|}{|z_2|+|z_3|}}$

## וקטורים

כל השאלות בפרק זה נלקחו משאלון 007 .

### וקטור גאומטרי - שאלות




**1.** (קיץ ס״ד - 2004 , מועד א) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע. O היא נקודת המפגש של אלכסוני הבסיס.

נסמן: $\vec{OS} = \underline{w}$ , $\vec{AD} = \underline{v}$ , $\vec{AB} = \underline{u}$.

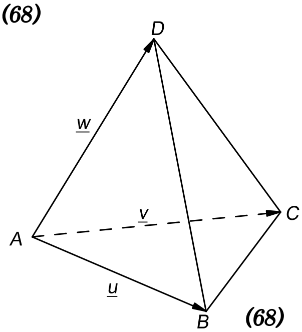
נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = a$ , $\vec{BP} = t \cdot \vec{BS}$

**א.** הבע את $\vec{PA}$ ו־$\vec{PC}$ באמצעות $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ ו־$t$.

**ב.** מצא את הערכים של $t$ שעבורם $\vec{PA}$ ו־$\vec{PC}$ מאונכים זה לזה.

**ג.** הבע באמצעות $a$ את $S_{\triangle APC}$ עבור הערך הקטן ביותר של $t$, מבין הערכים שמצאת בסעיף ב׳.

**(68)**




**2.** (קיץ ס״ד - 2004 , מועד ב) הבסיס ABC בפירמידה ABCD הוא משולש שווה־צלעות. נסמן: $\vec{AD} = \underline{w}$ , $\vec{AC} = \underline{v}$ , $\vec{AB} = \underline{u}$

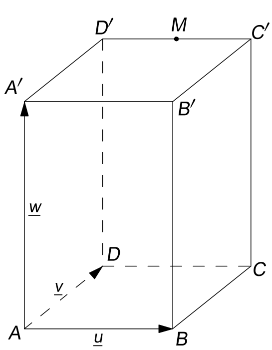
נתון: $\vec{BP} = t\,\vec{BC}$ , $\angle DAC = 36.8^\circ$ , $\angle DAB = 120^\circ$.

**א.** בטא את הוקטור $\vec{AP}$ באמצעות $\underline{u}$ , $\underline{v}$ ו־$t$ .

**ב.** מצא עבור איזה ערך של $t$ הזווית בין הוקטור $\vec{AP}$ ובין הוקטור $\vec{AD}$ שווה לזווית שבין הוקטור $\vec{AP}$ ובין הוקטור $\vec{AC}$.

**(68)**

**3.** (חורף ס״ה - 2005) במנסרה ישרה $ABCDA'B'C'D'$, הבסיס ABCD הוא מעוין. $\vec{AB} = \underline{u}$ , $\vec{AD} = \underline{v}$ , $\vec{AA'} = \underline{w}$ . נתון: $|\underline{w}| = 5$ , $|\underline{u}| = 4$




**א.** הנקודה M היא אמצע המקצוע $D'C'$.

הבע את הוקטור $\vec{AM}$ באמצעות $\underline{u}$ , $\underline{v}$ ו־$\underline{w}$.

**ב.** נתון גם כי: $|\vec{AM}| = 7$.

מצא את גודל הזווית שבין הוקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$.

**ג.** N היא נקודה על הישר BC. נסמן: $\vec{NC} = t\,\vec{BC}$.

מצא את ערכי $t$ שעבורם: $|\vec{AM}| = |\vec{NM}|$

**(69)**

### תשובות

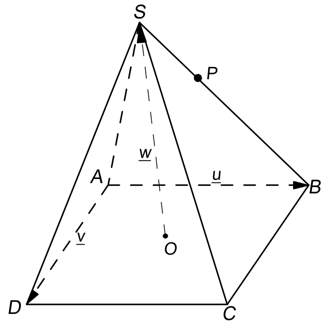
**1.** **א.** $\vec{PA} = (\frac{t}{2} - 1)\underline{u} - \frac{t}{2}\underline{v} - t\,\underline{w}$ , $\vec{PC} = \frac{t}{2}\underline{u} + (1 - \frac{t}{2})\underline{v} - t\,\underline{w}$

**ב.** $t_1 = 0$ , $t_2 = \frac{2}{3}$ **ג.** $S = \frac{a^2}{2}$ (יחידות ריבועיות)

**2.** **א.** $\vec{AP} = (1-t)\underline{u} + t\,\underline{v}$ **ב.** $t = 1\frac{1}{4}$

**3.** **א.** $\vec{AM} = \frac{1}{2}\,\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ **ב.** $\theta = 75.52^\circ$ **ג.** $t_1 = 1\frac{1}{4}$ , $t_2 = -1$

## וקטור גאומטרי - פתרונות




**1. א.** $\vec{BP} = t\cdot\vec{BS}$ , $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = a$ ; $\vec{PA} = ?$ , $\vec{PC} = ?$

$\vec{PA} = \vec{PB} + \vec{BA} = -t\,\vec{BS} - \underline{u} = -t(\frac{1}{2}(\underline{v}-\underline{u}) + \underline{w}) - \underline{u}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{PA} = (\frac{t}{2} - 1)\underline{u} - \frac{t}{2}\underline{v} - t\,\underline{w}}$

$\vec{PC} = \vec{PB} + \vec{BC} = -t(\frac{1}{2}(\underline{v}-\underline{u}) + \underline{w}) + \underline{v}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{PC} = \frac{t}{2}\underline{u} + (1-\frac{t}{2})\underline{v} - t\,\underline{w}}$

**ב.** $t = ? \quad \Rightarrow \quad \vec{PA}\cdot\vec{PC} = 0$

$((\frac{t}{2}-1)\underline{u} - \frac{t}{2}\underline{v} - t\,\underline{w})\cdot(\frac{t}{2}\underline{u} + (1-\frac{t}{2})\underline{v} - t\,\underline{w}) = 0$

$\underline{u} \perp \underline{v} \perp \underline{w} \;\Rightarrow\; \underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{u}\cdot\underline{w} = \underline{v}\cdot\underline{w} = 0\ ,\ |\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}\cdot\underline{u}} = a \quad\Rightarrow\quad \underline{u}\cdot\underline{u} = a^2$

$t_1 = 0\ ,\ t_2 = \frac{2t}{32}(\frac{t}{2}-1)\underline{u}\cdot\underline{u} - \frac{t}{2}(1-\frac{t}{2})\underline{v}\cdot\underline{v} + t^2\underline{w}\cdot\underline{w} = 0$

$a^2(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + t^2) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{2}t^2 - t = t(\frac{3}{2}t - 1) = 0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{t_1 = 0\ ,\ t_2 = \frac{2}{3}}$

**ג.** $S_{\triangle APC} = ?$ עבור $t = 0$ (המינימלי מסעיף ב׳)

$t = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{BP} = 0\cdot\vec{BS} = 0 \quad\Rightarrow$ $P$ מתלכד עם $B$

$\Rightarrow \quad S_{\triangle ABC} = \boldsymbol{S_{\triangle APC} = \frac{a^2}{2}}$ **(יחידות ריבועיות)**

---

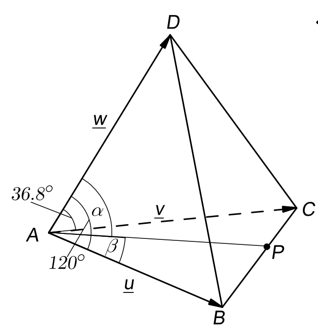
**2. א.**

$\vec{AB} = \underline{u}\ ,\ AC = \underline{v}\ ,\ \vec{AD} = \underline{w}\ ,\ \angle DAB = 120^\circ\ ,\ \angle DAC = 36.8^\circ\ ,\ \vec{BP} = t\,\vec{BC}$

$\vec{AP} = ?\ ;\ t = ? \quad\Rightarrow\quad \alpha = \beta$

$\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = \underline{u} + t\,\vec{BC} = \underline{u} + t\,(\underline{v} - \underline{u}) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\vec{AP} = (1-t)\underline{u} + t\,\underline{v}}$

**ב.**




$|\underline{u}| = |\underline{v}| \underset{\text{נקבע}}{=} 1 \quad\Rightarrow\quad \underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\underline{u}\cdot\underline{w} = |\underline{u}|\cdot|\underline{w}|\cdot\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}\ |\underline{w}|$

$\underline{v}\cdot\underline{w} = |\underline{v}|\cdot|\underline{w}|\cdot\cos 36.8^\circ = 0.8\ |\underline{w}|$

$\alpha = \beta \quad\Rightarrow\quad \frac{\vec{AP}\cdot\vec{AD}}{|\vec{AP}|\cdot|\vec{AD}|} = \frac{\vec{AP}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AP}|\cdot|\vec{AC}|} \quad\Rightarrow\quad \frac{\vec{AP}\cdot\vec{AD}}{|\underline{w}|} = \frac{\vec{AP}\cdot\vec{AC}}{|\underline{v}|}$

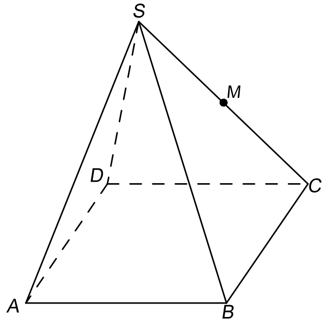
$\vec{AP}\cdot\vec{AD} = ((1-t)\underline{u} + t\,\underline{v})\cdot\underline{w} = -\frac{1}{2}(1-t)\ |\underline{w}| + 0.8\ t\ |\underline{w}|$

$\vec{AP}\cdot\vec{AC} = ((1-t)\underline{u} + t\,\underline{v})\cdot\underline{v} = \frac{1}{2}(1-t) + t$

$\alpha = \beta \quad\Rightarrow\quad \frac{-\frac{1}{2}(1-t)\ |\underline{w}| + 0.8\ t\ |\underline{w}|}{|\underline{w}|} = \frac{\frac{1}{2}(1-t) + t}{1} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{4}{5}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + t \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{t = 1\frac{1}{4}}$

<u>הערה:</u> לפי ערך $t$ $(t = 1\frac{1}{4} > 1)$ שקיבלנו, הנקודה $P$ נמצאת על המשך $BC$ ולא בין $B$ ל־$C$ כפי שמצויר.

| |
|---|
| **10:10** |
| חפשו בִּמִרשֶׁתֶת, או בסתם פרסומת, תמונות של שעונים. רובם המכריע מצביעים על השעה: 10:10 . . . |




**וקטור אלגברי - שאלות** *(כל השאלות משאלון 007)*

**.1** (קיץ ס״ד - 2004 , מועד א) נתונה פירמידה SABCD שבסיסה מקבילית ($AD \parallel BC$).

הנקודה M היא אמצע המקצוע SC.

נתון: $A(0,7,-2)$ $B(-1,2,0)$ $C(3,1,3)$ $S(5,3,7)$

**א.** מצא את משוואת המישור הנקבע ע״י B, D ו־M.

**ב.** מצא את הזווית שבין המישור, שמצאת בסעיף א׳, ובין הישר הנקבע ע״י הנקודות D ו־ S . **(85)**

**.2** (קיץ ס״ד - 2004 , מועד ב) נתון הישר: $x = (-1,0,5) + t(-2,2,3)$.

מראשית הצירים $O(0,0,0)$ הורידו אנך לישר הנתון. האנך חותך את הישר הנקודה A.

**א.** מצא את שיעורי הנקודה A.

**ב.** העבירו מישור $\pi$ , הניצב לישר OA ומכיל את הנקודה A.

הנקודה $B(1,1,z)$ נמצאת במישור $\pi$. מצא את הזווית שבין הישר OB לבין המישור $\pi$. **(86)**

**.3** (חורף ס״ה - 2005) נתון המישור: $mx + 3y + z + 3 = 0$

ונתון הישר: $\underline{x} = (3,0,-9) + t(2m,-5,7)$.

**א.** מצא את הערך של m שעבורו הישר מוכל במישור.

**ב.** מצא את ערך m שעבורו הישר חותך את המישור רק בנקודה אחת שבה $z = 5$, ומצא את הנקודה. **(86)**

**.4** (קיץ ס״ה - 2005 , מועד א) נתונות שלוש נקודות: $C(0,0,-2)$ $B(6,2,1)$ $A(1,0,5)$.

נקודה M מקיימת: $\vec{AM} = t\,\vec{AC}$. נתון: $|\vec{BM}| = 7$

**א.** מצא את שני הערכים של t. **(87)**

**ב.** עבור הערך הגדול של t, מבין הערכים שמצאת בסעיף א׳, מצא את שטח המשולש ABM.

## תשובות

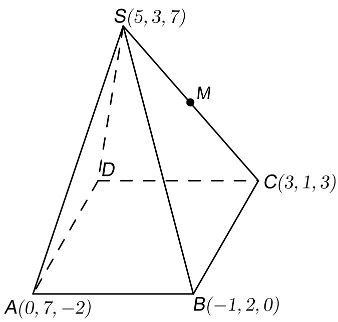
**.1** **א.** $\pi_{BDM}: \ x - y - z + 3 = 0$ **ב.** $\alpha = 9.8^\circ$

**.2** **א.** $A(1,-2,2)$ **ב.** $\alpha = 35.26^\circ$

**.3** **א.** $m = 2$ **ב.** $A(-8,-10,5)$ , $m = -2\frac{3}{4}$

**.4** **א.** $t_1 = 1$ , $t_2 = -\frac{2}{25}$ **ב.** $S_\triangle = 20.74$ (יחידות ריבועיות)

## וקטור אלגברי - פתרונות




**1.** **א.** משוואת המישור העובר דרך $B,\ D$ ו־$M$

$SM = MC \quad \Rightarrow \quad M(\frac{5+3}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{7+3}{2}) \quad \Rightarrow \quad M(4,2,5)$

$\vec{BC} = C - B = (3+1, 1-2, 3-0) = (4,-1,3) = \vec{AD}$

$\vec{AD} = D - A = D - (0,7,-2) = (4,-1,3) \quad \Rightarrow \quad D(4,6,1)$

$\pi_{BDM}: \quad ax + by + cz + d = 0$

$B(-1,2,0) \quad \Rightarrow \quad (I) \quad -a + 2b + d = 0$

$D(4,6,1) \quad \Rightarrow \quad (II) \quad 4a + 6b + c + d = 0$

$M(4,2,5) \quad \Rightarrow \quad (III) \quad 4a + 2b + 5c + d = 0$

$(III) - 5(II) \quad \Rightarrow \quad -16a - 28b - 4d = 0 \quad \Rightarrow \quad (IV) \quad 4a + 7b + d = 0$

$(IV) + 4(I) \quad \Rightarrow \quad 15b + 5d = 0 \quad \Rightarrow \quad 3b + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -3b$

$(IV) \quad 4a + 7b - 3b = 0 \quad \Rightarrow \quad 4a + 4b = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -b$

$(II) \quad -4b + 6b + c - 3b = 0 \quad \Rightarrow \quad c = b$

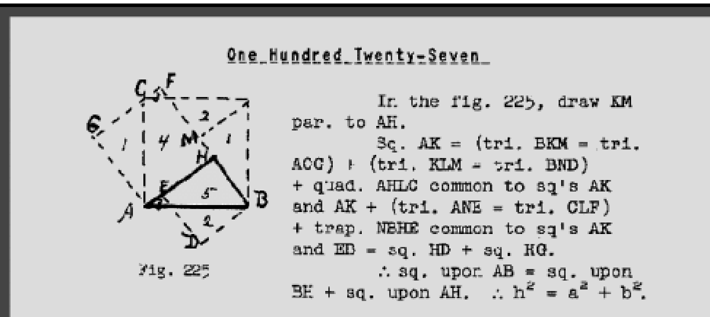
$\underset{\text{בחירה}}{a = 1} \quad \Rightarrow \quad b = -1\ ,\ c = -1\ ,\ d = 3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi_{BDM}:\ x - y - z + 3 = 0}$

**ב.** הזווית שבין $\pi$ לישר $SD$

$\vec{SD} = (4,6,1) - (5,3,7) = (-1,3,-6)$

$\sin\alpha = \frac{|(-1,3,-6)\cdot(1,-1,-1)|}{|(-1,3,-6)|\cdot|(1,-1,1)|} = \frac{|-1-3+6|}{\sqrt{1+9+36}\cdot\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{46}\cdot\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 9.8^\circ}$

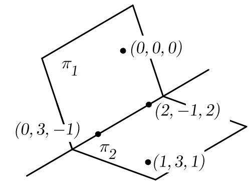
מתוך ספר ההוכחות למשפט פיתגורס, שערך Elisha Scot Loomis ושיצא ב־1940. בספר 367 הוכחות שונות למשפט פיתגורס ביניהן של ליאונרדו דה וינצ'י וג'יימס גרפילד, הנשיא ה־20 של ארה"ב. למשפט פיתגורס יש למעלה מ־600(!) הוכחות שונות.


One Hundred Twenty-Seven

In the fig. 225, draw KM par. to AH.
Sq. AK = (tri. BKM = tri. ACG) + (tri. KLM = tri. BND) + quad. AHLC common to sq's AK and AK + (tri. ANE = tri. CLF) + trap. NBHE common to sq's AK and ED = sq. HD + sq. HG.
∴ sq. upon AB = sq. upon BH + sq. upon AH. ∴ $h^2 = a^2 + b^2$.

Fig. 225

**9.**




$\underline{\pi_1:}$ $ax+by+cz+d=0$

$(0,0,0) \Rightarrow d=0$ , $(0,3,-1) \Rightarrow 3b-c=0$

$\Rightarrow c=3b$

$(2,-1,2) \Rightarrow 2a-b+2c=0 \Rightarrow 2a-b+6b=0$

$2a=-5b$ , $b=-2 \Rightarrow c=-6$ , $a=5 \Rightarrow$ $\underline{\pi_1: \ 5x-2y-6z=0}$

$\underline{\pi_2:}$ $(0,3,-1) \Rightarrow 3b-c+d=0 \Rightarrow (I) \ d=-3b+c$

$(2,-1,2) \Rightarrow 2a-b+2c+d=0 \Rightarrow (II) \ d=-2a+b-2c$

$(1,3,1) \Rightarrow a+3b+c+d=0 \Rightarrow (III) \ d=-a-3b-c$

$(I),(II) \Rightarrow -3b+c=-2a+b-2c \Rightarrow 3c=-2a+4b \Rightarrow c=\frac{-2a+4b}{3}$

$(II),(III) \Rightarrow -2a+b-2c=-a-3b-c \Rightarrow c=-a+4b$

$\Rightarrow \frac{-2a+4b}{3}=-a+4b \Rightarrow -2a+4b=-3a+12b \Rightarrow a=8b$

$b=1 \Rightarrow a=8 \Rightarrow c=-8+4=-4 \Rightarrow (I) \ d=-3\cdot 1-4=-7$

$\Rightarrow$ $\underline{\pi_2: \ 8x+y-4z-7=0}$

$\underline{l_1:}$ $\pi_1$: $5x-2y-6z=0$ , yz: $x=0 \Rightarrow -2y-6z=0 \Rightarrow y=-3z$ , $z=t \Rightarrow y=-3t$

$\Rightarrow l_1: \underline{x}=(0,-3t,t)=t(0,-3,1)$ , נקודה טיפוסית על הישר: $\underline{(0,-3t,t)}$

$\underline{l_2:}$ $\pi_2$: $8x+y-4z-7=0$ , xy: $z=0 \Rightarrow 8x+y=7 \Rightarrow y=7-8x$ , $x=s \Rightarrow y=7-8s$

$\Rightarrow l_2: \underline{x}=(s,7-8s,0)=(0,7,0)+s(1,-8,0)$ , נקודה טיפוסית על הישר: $\underline{(s,7-8s,0)}$

אין תלות ליניארית בין וקטורי הכיוון של $l_1$ ושל $l_2$: אין סקלר $k$ המקיים: $(1,-8,0)=k(0,-3,1)$.

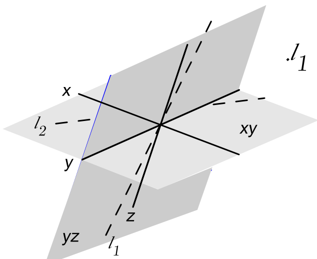
מסקנה: הישרים <u>אינם מקבילים</u> ו<u>אינם מתלכדים</u>.

<u>בדיקת חיתוך:</u> מהשוואת רכיבי x ו־z של הנקודות הטיפוסיות $t=0$ , $s=0$ נקבל

סתירה ברכיב y: $0=7 \Rightarrow -3t=7-8s$ מסקנה: הישרים <u>אינם נחתכים</u>.

<u>מסקנה:</u> **הישרים $l_1$ ו־ $l_2$ <u>מצטלבים</u>**

נמחיש בציור:




xy הוא מישור "רצפה". מישור זה מכיל את הישר $l_2$.

yz הוא מישור קיר אנכי כמתואר. מישור זה מכיל את הישר $l_1$.

אם הישרים נפגשו - הם יפגשו על קו החיתוך (ציר y).

$l_1$ עובר דרך $(0,0,0)$ על קו החיתוך.

$l_2$ <u>אינו</u> עובר דרך $(0,0,0)$ על קו החיתוך.

לכן לישרים אלו <u>אין</u> נקודה משותפת. מכאן שהם **מצטלבים**.

***בעמוד הבא – פתרון מקורי (של תלמיד) לשאלה זו, כמעט ללא נוסחאות!***

*להלן מובא פתרון מילולי, המבוסס על פתרון שהוגש בבגרות על ידי תלמיד.*

***המיוחד בפתרון המוצע הוא שהתלמיד לא השתמש כלל בנוסחאות, הסתמך על המשפטים בגאומטרית המרחב, והגיע לתשובה הנכונה. הוא קיבל את מלוא הנקודות.***

*הפתרון מעובד ממאמר שהתפרסם **בעל"ה** (**עלון למורי המתמטיקה**) מס' 38 - היוצא ע"י '**קשר חם**'.*

*המאמר נכתב ע"י **מארק אפלבאום** (המכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי, באר שבע), ומובא ברשותו.*

להלן הפתרון:

הנקודות $(0,3,-1)$ ו־ $(0,0,0)$ נמצאות גם במישור $\pi_1$ וגם במישור yz,

ולכן הן מגדירות את הישר $l_1$ (ישר החיתוך בין $\pi_1$ ומישור yz).

מכאן: $l_1$ מוכל כולו במישור yz, והוא מוכל כולו גם במישור $\pi_1$.

$l_2$ הוא ישר החיתוך בין $\pi_2$ למישור xy.

לכן: $l_2$ מוכל כולו במישור xy, והוא כולו גם במישור $\pi_2$.

ישר החיתוך בין שני המישורים yz ו־ xy הוא ציר y.

לכן: אם שני הישרים ($l_1$ ו־ $l_2$) נחתכים - אזי הם נחתכים על ציר y.

הנקודה $(0,0,0)$ נמצאת גם במישור $\pi_1$ וגם במישור yz ,

לכן היא נמצאת על ישר החיתוך ביניהם - שהוא $l_1$.

לכן: נקודת החיתוך של $l_1$ עם ציר y היא $(0,0,0)$.

אם הנקודה $(0,0,0)$ היתה גם על $l_2$ אזי לשני המישורים $\pi_1$ ו־ $\pi_2$ היו <u>שלוש</u> נקודות משותפות:

שתי הנקודות הנתונות: $(2,-1,2)$ ו־ $(0,3,-1)$ והנקודה הנמצאת גם על $l_1$ וגם על $l_2$ - $(0,0,0)$

ואז שני המישורים $\pi_1$ ו־ $\pi_2$ היו מתלכדים, בסתירה לנתון (שהם נחתכים).

<u>מסקנה:</u> **$l_1$ ו־ $l_2$ <u>אינם</u> נחתכים, ו<u>אינם</u> מתלכדים.**

נזכיר משפט:

**אם שני מישורים נחתכים, אזי שני ישרים הנמצאים עליהם (כל אחד על מישור אחר) מקבילים זה לזה אם ורק אם, הם מקבילים לישר החיתוך של המישורים.**

לכן: אם $l_1$ ו־ $l_2$ מקבילים זה לזה, אזי הם מקבילים לישר החיתוך שבין שני המישורים yz ו־ xy, שהוא ציר y.

$l_1$ עובר דרך הנקודה $(0,0,0)$ (הנמצאת, כמובן, על ציר y), ולכן הוא <u>אינו</u> מקביל לציר y.

<u>מסקנה:</u> **שני הישרים <u>אינם</u> מקבילים זה לזה.**

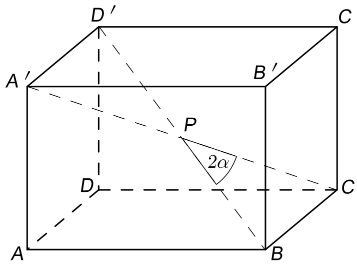
ומכאן התשובה:

**$l_1$ ו־ $l_2$ מצטלבים!**

(יפה מאוד !)

## טריגונומטריה במרחב

### מנסרה - שאלות



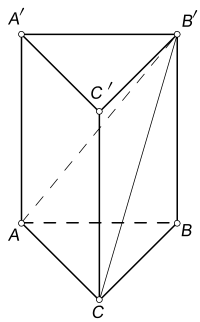

**1.** (4 יח׳ , קיץ תשנ״ח - 98)

נתונה תיבה ריבועית $ABCDA'B'C'D'$.

אורך צלע הבסיס הוא 10 ס״מ, וזווית

בין אלכסוני התיבה, $BD'$ ו־$CA'$, היא $2\alpha$.

הבע את נפח התיבה באמצעות $\alpha$. **(112)**




**2.** (004 , חורף ס״ט - 2009)

נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסיה הם משולשים שווי־צלעות.

אורך צלע הבסיסים הוא $a$ (י״א),

ואורך האלכסון של פאה הוא $\frac{\sqrt{10}}{2}a$ (י״א).

**א.** הבע באמצעות $a$ את הגובה לצלע $AC$ במשולש $AB'C$.

**ב.** מצא את גודל הזווית בין המישור $AB'C$ למישור הבסיס $ABC$ .

**ג.** מצא את גודל הזווית בין אלכסון הפאה לבסיס $ABC$. **(112)**

**3.** (5 יח׳ , קיץ תשנ״ג - 93)

במנסרה ישרה $ABCA'B'C'$, שבסיסה משולש שווה־צלעות, אורך האלכסון $AB'$ של הפאה

הצדדית $ABB'A'$ הוא $k$. $AD$, הגובה לצלע $BC$ בבסיס $ABC$, יוצר זווית $\alpha$ עם האלכסון $AB'$.

**א.** הסבר מדוע $AD$ מאונך לפאה $BCC'B'$.

**ב.** הבע את נפח המנסרה באמצעות $k$ ו־$\alpha$.

**ג.** מצא עבור אילו ערכים של $\alpha$ יש פתרון לבעיה. **(113)**

| |
|---|
| **כפול את מספר התלמידים בכיתה ב־20. הוסף למספר שהתקבל 7. כפול את התוצאה ב־5.**<br>**הוסף לתוצאה 79. הוסף לתוצאה את גילך. החסר מהתוצאה 114.**<br>**חלקו השמאלי של המספר שהתקבל הוא מספר התלמידים בכיתה.**<br>**חלקו הימני של המספר שהתקבל הוא גילך.** |

### תשובות

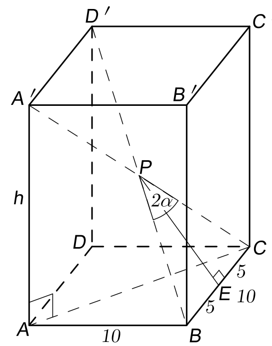
**1.** $V=\frac{1000}{\sin\alpha}\sqrt{\cos 2\alpha}\ cm^3$

**2.** **א.** $h=\frac{3}{2}a$ (יחידות אורך) **ב.** $\alpha=54.74^\circ$ **ג.** $\beta=50.77^\circ$

**3.** **ב.** $V=\frac{k^3}{3}\cos^2\alpha\sqrt{3-4\cos^2\alpha}$ (יחידות קוב) **ג.** $30^\circ<\alpha<90^\circ$

## טריגונומטריה במרחב - מנסרה - פתרונות

**.1**




$\angle BPE = \angle CPE = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$ , $BE = EC = \frac{10}{2} = 5$

$\underline{\triangle PEC:}$ $\frac{EC}{PC} = \frac{5}{PC} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad PC = \frac{5}{\sin\alpha}$

$A'C = 2\ PC = \frac{10}{\sin\alpha}$

$\underline{\triangle ABC:}$ $AC = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$

$\underline{\triangle ACA':}$ $h = AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2}$

$$= \sqrt{\frac{100}{\sin^2\alpha} - 200} = 10\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 2}$$

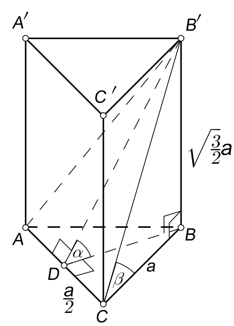
$h = 10\sqrt{\frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{10}{\sin\alpha}\sqrt{1 - 2\sin^2\alpha}$

$V = 10\cdot 10\cdot \frac{10}{\sin\alpha}\sqrt{1 - 2\sin^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V = \frac{1000}{\sin\alpha}\sqrt{\cos 2\alpha}}\ \boldsymbol{cm^3}$

---

**.2 א.** ב"ע: $B'D \perp AC$. הבסיס הוא משולש שווה־צלעות. המנסרה ישרה ⇐ הפאות הצדדיות חופפות.

⇐ אלכסוני הפאות שווים זה לזה.




$\Rightarrow \quad AB' = CB' = \frac{\sqrt{10}}{2}a \quad \Rightarrow \quad AD = DC = \frac{a}{2}$

↑

גובה לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם תיכון

$\underline{\triangle B'DC:}$ $h = B'D = \sqrt{B'C^2 - DC^2} = \sqrt{\frac{10}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2}$

פיתגורס

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{h = \frac{3}{2}a}$ **(יחידות אורך)**

**ב.** ב"ע: $BD$ תיכון במשולש שווה־צלעות $ABC$ ולכן הוא גם גובה.

$\underline{\triangle B'BC:}$ $BB' = \sqrt{B'C^2 - BC^2} = \sqrt{\frac{10}{4}a^2 - a^2} = \sqrt{\frac{6}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,a$

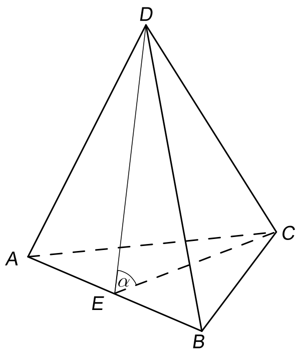
$\underline{\triangle B'BD:}$ $\sin\alpha = \frac{B'B}{B'D} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,a}{\frac{3}{2}\,a} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} = 0.8165 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 54.74^\circ}$

תשובה שניה ( $180^\circ - 54.74^\circ$ ) נפסלת כי המשולש הוא ישר־זווית.

**ג.**

$\underline{\triangle B'BC:}$ $tg\,\beta = \frac{B'B}{BC} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,a}{a} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\beta = 50.77^\circ}$

| |
|---|
| קשה – זאת אומרת: אפשר (זאב ז'בוטינסקי) |




## טריגונומטריה במרחב - פירמידה - שאלות

**1.** (4 יח׳ , קיץ תש״ן - 90)

נתונה פירמידה משולשת ישרה שבסיסה משולש שווה־צלעות.

אורך צלע הבסיס הוא $10_{cm}$ .

$\alpha$ היא הזווית בין פיאה צדדית לבסיס.

**א.** בטא באמצעות $\alpha$ את שטח המעטפת של הפירמידה.

**ב.** חשב את $\alpha$ אם שטח המעטפת הוא $150\sqrt{3}$ $_{cm^2}$ . **(123)**

**2.** (4 יח׳ , קיץ תשנ״ב - 92) בפירמידה משולשת וישרה, SABC, הבסיס ABC הוא משולש שווה־צלעות שאורך צלעו a. הזווית שבין כל אחד מהמקצועות הצדדיים (SA , SB , SC) לבסיס הפירמידה הוא $\alpha$ . הבע באמצעות a ו־ $\alpha$ את:

**א.** גובה הפירמידה (היורד מ־S לבסיס ABC).

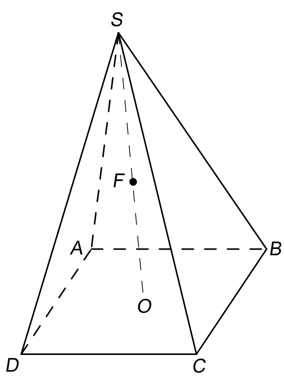
**ב.** הגובה של כל אחת מהפיאות הצדדיות (SAB , SBC , SAC). **(123)**

**3.** (4 יח׳ , חורף תשנ״ד - 94)

בפירמידה ישרה, שבסיסה משולש שווה־צלעות, הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא $\alpha$ , והזווית בין פיאה צדדית לבסיס היא $\beta$.

**א.** חשב את היחס $\frac{tg\ \beta}{tg\ \alpha}$ .

**ב.** חשב את היחס בין המקצוע הצדדי למקצוע הבסיס כאשר $\alpha = 30^{o}$. **(124)**




**4.** (4 יח׳ , קיץ תשנ״ה - 95)

נתונה פירמידה ישרה SABCD, שבסיסה ריבוע שצלעו 10 ס״מ.

הגובה SO של הפירמידה הוא 12 ס״מ.

הנקודה F היא אמצע הגובה.

**א.** חשב את הזווית בין המישור BFC למישור הבסיס ABCD.

**ב.** חשב את הזווית בין המישור BFC לבין מישור הפאה SBC.

תוכל להיעזר בתוצאה שקיבלת בסעיף א׳. **(124)**

## תשובות

**1. א.** $S = \frac{25\sqrt{3}}{\cos\alpha}$ $_{cm^2}$ **ב.** $\alpha = 80.41^{o}$

**2. א.** $H = \frac{a\sqrt{3}\ tg\ \alpha}{3}$ (י״א)

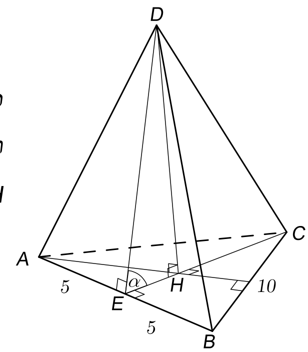
**ב.** $SE = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4\ tg^2\alpha + 1}{3}}$ (י״א)

**3. א.** $\frac{tg\ \beta}{tg\ \alpha} = 2$ **ב.** $\frac{2}{3}$

**4. א.** $50.19^{o}$ **ב.** $\beta = 17.19^{o}$

## טריגונומטריה במרחב - פירמידה - פתרונות

**1. א.**




$$CE=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=5\sqrt{3}$$

פירמידה ישרה $\Leftarrow$ H מרכז המעגל החוסם

הקווים CE ו־AF גבהים במש״צ ולכן הם גם תיכונים

H מחלקת אותם ביחס של $2:1$ ($2$ ליד הקודקוד) $\Leftarrow$ $EH=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{EH}{DE}=\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad DE=\frac{EH}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}}{\cos\alpha}=\frac{5\sqrt{3}}{3\cos\alpha}$$

$$S_{\text{מעטפת}}=3\cdot S_{\triangle ABD}=3\cdot\frac{AB\cdot DE}{2}=3\cdot\frac{10\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3\cos\alpha}}{2}=\frac{\cancel{3}\cdot 10\cdot 5\sqrt{3}}{2\cdot\cancel{3}\cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{S_{\text{מעטפת}}=\frac{25\sqrt{3}}{\cos\alpha}}$$ **(יחידות ריבועיות)**

**ב.**

$$\frac{25\sqrt{3}}{\cos\alpha}=150\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha=\frac{25\sqrt{3}}{150\sqrt{3}}=\frac{1}{6} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\alpha=80.41^\circ}$$

---

**2. א.** עקב גובה הפירמידה (הנקודה H) הוא מפגש הגבהים של משולש הבסיס

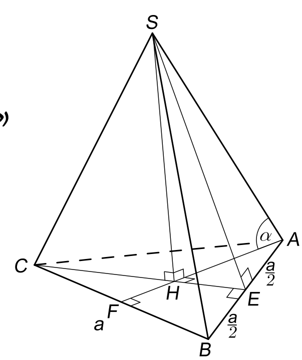
משולש הבסיס הוא שווה־צלעות, ולכן גבהים אלו הם גם תיכונים

נקודת מפגש התיכונים במשולש מחלקת אותם ביחס של $1:2$ - החלק הגדול קרוב לקודקוד

$$\triangle AFB:\ \frac{AF}{AB}=\frac{AF}{a}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad AF=\frac{a\sqrt{3}}{2}=CE$$

$$AH=\frac{2}{3}\cdot AF=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle SHA:\ \frac{SH}{AH}=\frac{SH}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}=\operatorname{tg}\alpha \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{SH=\frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{3}}$$ **(יחידות אורך)**




**ב.**

$$HE=\frac{1}{3}\cdot CE=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$SE=\sqrt{SH^2+HE^2}=\sqrt{\frac{a^2\operatorname{tg}^2\alpha}{3}+\frac{a^2}{12}}$$

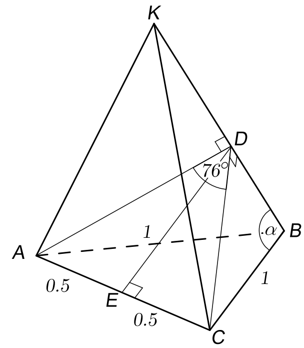
$$=\sqrt{\frac{4a^2\operatorname{tg}^2\alpha+a^2}{12}}=\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot\frac{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}{3}}$$

$$\boldsymbol{SE=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}{3}}}$$ **(יחידות אורך)**

9941 הוא ראשוני משני הכיוונים: גם 1499 ראשוני.

מחיקה של ספרה כלשהי מ־ 1499 – תתן גם היא מספר ראשוני (תלת־ספרתי).

**10. א.**




נקבע, ללא הגבלת הכלליות: $AB = BC = AC = 1$

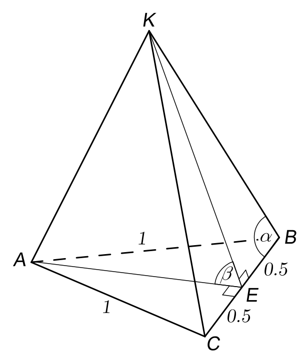
הפירמידה משוכללת וישרה , כל הפאות הצדדיות הן מש״ש
כל משולשי הפאות הצדדיות חופפים זה לזה
לכן, הגבהים לשוקיים שווים $CD = AD$,
והם נפגשים בנקודה אחת ($D$)
$ADC$ הוא מש״ש ולכן הגובה לבסיס $DE$ הוא גם תיכון
וגם חוצה זווית

$AE = EC = 0.5$

$\frac{EC}{CD} = \frac{0.5}{CD} = \sin 38^\circ \quad \Rightarrow \quad CD = \frac{0.5}{\sin 38^\circ} = 0.8121$

$\frac{CD}{BC} = \frac{0.8121}{1} = \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 54.31^\circ} \quad (= \angle KCB)$

**ב.**




$\frac{KE}{EB} = \frac{KE}{0.5} = tg\ \alpha = tg\ 54.31^\circ \quad \Rightarrow \quad KE = 0.5 \cdot tg\ 54.31^\circ = 0.7$

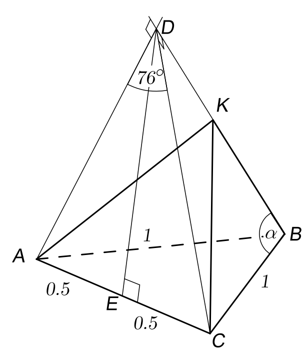
$KB = \sqrt{KE^2 + BE^2} = \sqrt{0.7^2 + 0.5^2} = \sqrt{0.74} = KA$

$AE = \sqrt{AC^2 - EC^2} = \sqrt{1^2 - 0.5^2} = \sqrt{0.75}$

משפט הקוסינוסים במשולש $AKE$

$0.74 = 0.75 + 0.7^2 - 2 \cdot \sqrt{0.75} \cdot 0.7 \cdot \cos \beta$

$\cos \beta = 0.4124 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\beta = 65.64^\circ}$




<u>הערה</u> לסעיף א': הנקודה $D$ יכולה להִמצא מחוץ למשולש - במקרה בו זווית הראש של משולש שווה השוקיים (הפאה הצדדית) קהה הפתרון יהיה בדרך שתוארה לעיל
יש לעמוד על שתי נקודות: מישור $DKA$ הוא גם מישור $AKB$,
מישור $DKC$ הוא גם מישור $KBC$

נעמוד על הנקודה הראשונה (השניה באותה דרך):
שני ישרים נחתכים קובעים מישור. $DK$ הינו המשך $BK$
$DK$ ו־$AK$ קובעים את מישור $ADK$
$KB$ (שהוא המשך $DK$) ו־$AK$ קובעים את מישור $AKB$
לשני המישורים יש שני קווים משותפים, ולכן הם מישור אחד

**הביטוי** $991n^2 + 1$ **נותן ריבוע שלם ראשון עבור** $n = 12,055,735,790,331,359,447,442,238,767$ .

## חשבון דיפרנציאלי

**<u>פונקציות מעריכיות - שאלות</u>** (כל השאלות משאלון 007 , אלא אם כן צוין אחרת)

**1.** (קיץ ס"ד - 2004 , מועד ב) נתונה הפונקציה: $f(x) = (1 - e^x)^2$.

האסימפטוטה האופקית שלה היא $y = 1$.

**א.** מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

**ב.** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**ג.** הוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף ב', סקיצה של גרף הפונקציה $g(x) = e^{2x}$,

ומצא את: **(1)** נקודת החיתוך בין שני הגרפים.

**(2)** ראה שאלה 2 בעמ' 162 **(140)**

**2.** (חורף ס"ז - 2007)

נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת על ידי $f(x) = \frac{e^x}{e^x - a}$ $(a > 0\ ,\ a \neq 1)$.

**א.** מצא (הבע באמצעות $a$ במידת הצורך) את:

**(1)** תחום ההגדרה של הפונקציה.

**(2)** נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

**(3)** שלוש האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

**ב.** הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

**ג.** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור: (1) $a > 1$ (2) $0 < a < 1$

בכל סקיצה, סרטט את האסימפטוטות, וציין על הצירים

את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש נקודות כאלה). **(141)**

**3.** (קיץ ס"ז - 2007 , מועד א)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

**א.** הראה כי הפונקציה עולה לכל $x$.

**ב.** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר $x$.

**ג.** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**ד.** ראה שאלה 6-ד שבעמ' 163 . **(142)**

## תשובות

**1. א.** $min: (0,0)$ **ג. (1)** $(\ln\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4})$

**2. א. (1)** $x \neq \ln a$ **(2)** $(0, \frac{1}{1-a})$ **(3)** $y = 0_{(\leftarrow)}\ ,\ y = 1_{(\rightarrow)}\ ,\ x = \ln a$

**3. ב.** $y_{\leftarrow} = -1\ ,\ y_{\rightarrow} = 1$

## חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות - פתרונות

**1.** $f(x) = (1 - e^x)^2$

$$\lim_{x\to+\infty}(1 - e^x)^2 = +\infty \ ; \ \lim_{x\to-\infty}(1 - e^x)^2 = \lim_{x\to-\infty}(1 - \frac{1}{x})^2 = (1 - 0)^2 = 1$$

האסימפטוטה הנתונה $y = 1$ היא אסימפטוטה חד־צדדית (בכיוון $-\infty$)

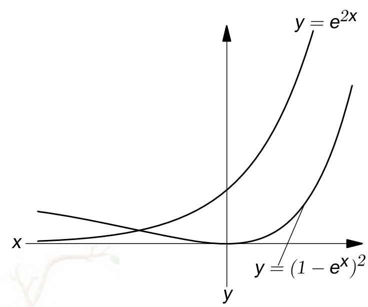
**א.**

$$f'(x) = 2(1 - e^x)\cdot(-e^x) \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$f''(x) = (2e^{2x} - 2e^x)' = 4e^{2x} - 2e^x \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 4 - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{min} = 0$$

$$f(0) = (1 - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{min (0,0)}$$

**ב.**




**ג. (1)**

$$(1 - e^x)^2 = e^{2x} \ /\sqrt{\ } \quad \Rightarrow \quad 1 - e^x = \pm e^x$$

$$1 - e^x = e^x \quad \Rightarrow \quad 2e^x = 1 \quad \Rightarrow \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \ln\frac{1}{2}$$

$$y = f(\tfrac{1}{2}) = (1 - e^{\ln 0.5})^2 = (1 - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(\ln\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4})}$$

**מייקל פאראדיי** (Michael Faraday , 1791-1867) היה פיסיקאי וכימאי אנגלי. הוא היה חבר במכון המלכותי של לונדון ואחד מתפקידיו היה לתכנן ניסוי שבועי כדי לשעשע את חברי המכון חובבי המדע.
צורך מתמיד זה ברעיונות חדשים עשה את פאראדיי לאחד הפיזיקאים הניסויים הגדולים ביותר בכל הזמנים. החשמל והמגנטיות ריתקו אותו במיוחד, משום שידע שזרם חשמלי יכול ליצור כח מגנטי. הוא בילה עשר שנים בנסיון להוכיח את הכיוון ההפוך, כלומר: שמגנט יכול ליצור זרם חשמלי, ובשנת 1831 עלה הדבר בידו. הוא הראה שחשמל ומגנטיות הם שני היבטים של אותה תופעה: אלקטרומגנטיות.
מסופר שהמלך ויליאם הרביעי שאל את פאראדיי מה התועלת בתכסיסי הסלון המדעיים שלו, ונענה: 'אינני יודע, הוד מעלתך, אבל אני סמוך ובטוח שיום יבוא ואתה תטיל עליהם מיסים . . . '

(המִספרים של הטבע, איאן סטיוארט, הוצאת הד־ארצי)

**2. א.**

$f(x)=\frac{e^x}{e^x-a} \quad , \quad a>0 \quad , \quad a\neq 1$

$(1) \quad e^x-a\neq 0 \quad \Rightarrow \quad e^x\neq a \quad \Rightarrow \quad \ln e^x\neq \ln a \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x\neq \ln a}$

$(2) \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{e^0}{e^0-a}=\frac{1}{1-a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(0,\frac{1}{1-a})}$

$y=0 \quad \Rightarrow \quad e^x=0 \quad \Rightarrow \quad \emptyset \quad \Leftarrow \quad e^x>0\ \forall x$

$(3) \quad x=\ln a \quad \Rightarrow \quad y=\frac{e^{\ln a}}{e^{\ln a}-a}=\frac{a}{a-a}=\frac{a}{0}=\infty \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x=\ln a}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x(1-\frac{a}{e^x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{a}{\infty}}=\frac{1}{1-0}=1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y=1_{(\rightarrow)}}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-a}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x(1-\frac{a}{e^x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-\frac{a}{0}}=\frac{1}{1-\infty}=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y=0_{(\leftarrow)}}$

**ב.**

$f'(x)=\frac{e^x(e^x-a)-e^x\cdot e^x}{(e^x-a)^2}=\frac{e^x(e^x-a-e^x)}{(e^x-a)^2}=\frac{-a\,e^x}{(e^x-a)^2}=\frac{-\ +\ +}{+}=-<0$

קיבלנו שהנגזרת שלילית בכל תחום הגדרתה.

לכן הפונקציה עצמה <u>יורדת</u> בכל תחום הגדרתה.

ב'מתמטית' רושמים זאת כך:

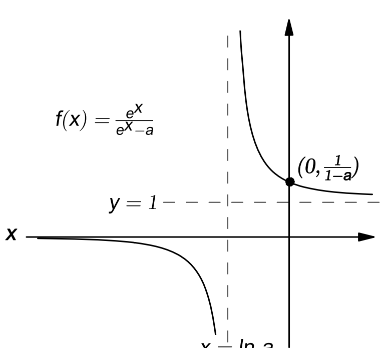
$\boldsymbol{f'(x)<0\ \ \forall x \in \{x\neq \ln a\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \searrow \ \forall x \in \{x\neq \ln a\} \quad (\checkmark)}$

**ג.**

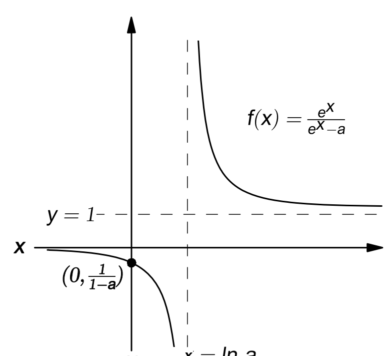
$\underline{a>1:} \quad e>1 \quad \Rightarrow \quad \ln a>\ln 1=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\ln a>0}$

$\underline{0<a<1:} \quad e>1 \quad \Rightarrow \quad \ln a<\ln 1=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\ln a<0}$

$\underline{0<a<1}$




$\underline{a>1}$




**איזהו עשיר?** עשיר בראשי תיבות: עיניים, שיניים, ידיים, רגליים.

## חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות - שאלות

(כל השאלות משאלון 007 , אלא אם כן צוין אחרת)

**1.** (חורף ס"ה - 2005) נתונה הפונקציה $y = \ln x^2 - \frac{1}{a}x^2$ $(a > 0)$

**א.** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

**ב.** הבע באמצעות $a$ את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

**ג.** עבור אילו ערכי $a$ גרף הפונקציה כולו נמצא מתחת לציר $x$ ? **(153)**

**2.** (קיץ ס"ה - 2005 , מועד א) **ב.** נתונה הפונקציה $y = x \ln x - ax^2$.

הפונקציה קעורה כלפי מעלה $(\smile)$ בתחום $0 < x < 1$,

וקעורה כלפי מטה $(\frown)$ בתחום $x > 1$. מצא את $a$. **(153)**

**3.** (חורף ס"ו - 2006) נתונה הפונקציה $f(x) = ax \ln (x-2)$ , $a \neq 0$.

השיפוע של הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא $2 + \ln 2$.

**א.** מצא את הערך של הפרמטר $a$.

**ב.** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

**ג.** מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

**ד.** מצא באיזה תחום הפונקציה קעורה כלפי מעלה $(\smile)$ ובאיזה תחום היא קעורה כלפי מטה $(\frown)$.

**ה.** נתון כי $f'(x) \neq 0$ לכל $x$ בתחום ההגדרה של הפונקציה.

הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה. **(154)**

**4.** (קיץ ס"ו - 2006 , מועד ב) נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln (x^2 - 2x + a)$.

**א.** לאילו ערכים של $a$ הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x$ ? **(155)**

**ב.** לאיזה ערך של $a$ נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ נמצאת על ציר $x$ ?

הצב $a = 2$ וענה: **ג.** מצא את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה: $\frown$

ואת התחום שבו היא קעורה כלפי מעלה: $\smile$.

**ד.** **(1)** מה הם תחומי העליה והירידה של פונקצית הנגזרת $f'(x)$ ?

**(2)** מה הם שיעורי $x$ של נקודות הקיצון של $f'(x)$ , ומהו סוגן?

## תשובות

**1.** **א.** $x \neq 0$ **ב.** $max: (-\sqrt{a}, \ln a - 1)$ , $max\ (\sqrt{a}, \ln a - 1)$ **ג.** $0 < a < e$

**2.** **ב.** $a = \frac{1}{2}$

**3.** **א.** $a = 1$ **ב.** $x > 2$ **ג.** $(3,0)$ **ד.** $\smile: x > 4$ $\frown: 2 < x < 4$

**4.** **א.** $a > 1$ **ב.** $a = 2$ **ג.** $\frown: (x < 0) \cup (x > 2)$ , $\smile: 0 < x < 2$

**ד.** **(1)** $\searrow: (x < 0) \cup (x > 2)$ , $\nearrow: 0 < x < 2$ **(2)** $x_{max} = 2$ , $x_{min} = 0$

## חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות - פתרונות

**1. א.**

$y = \ln x^2 - \frac{1}{a}x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x \neq 0}$

**ב.**

$y' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x - \frac{1}{a} \cdot 2x = \frac{2}{x} - \frac{2x}{a} \stackrel{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{x} = \frac{2x}{a} \quad \Rightarrow \quad x^2 = a \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$

$y'' = (\frac{2}{x} - \frac{2x}{a})' = -\frac{2}{x^2} - \frac{2}{a}$

$y''(\pm\sqrt{a}) = -\frac{2}{a} - \frac{2}{a} < 0 \quad \Leftarrow \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{max} = \pm\sqrt{a}$

$y(\pm\sqrt{a}) = \ln a - \frac{1}{a} \cdot a = \ln a - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{max\ (\sqrt{a}, \ln a - 1)}\ ,\ \ \mathbf{max\ (-\sqrt{a}, \ln a - 1)}$

**ג.**

$\ln a - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \ln a < 1 = \ln e \quad \stackrel{*}{\Rightarrow} \quad a < e$

(*) הבסיס e גדול מ־1, ולכן כיוון אי־השוויון נשמר

$\Rightarrow \quad \mathbf{0 < a < e}$

---

**2. ב.** $y = x \ln x - ax^2 \quad \Rightarrow \quad x > 0$ תחום הגדרה

$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 2ax = \ln x + 1 - 2ax \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{1}{x} - 2a$

הנקודה $x = 1$ היא נקודת פיתול בין הקעירות כלפי מעלה $(y'' > 0)$

לבין הקעירות כלפי מטה $(y'' < 0)$ $\quad \Leftarrow \quad y''(1) = 0$

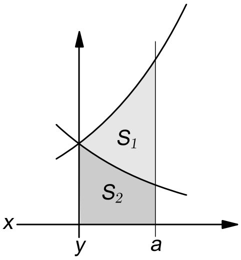
$y''(1) = \frac{1}{1} - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a = \frac{1}{2}}$

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

## חשבון אינטגרלי

### פונקציות מעריכיות - שאלות

(כל השאלות משאלון 007)




**1.** (קיץ ס"ד - 2004 , מועד א)

נתונות הפונקציות $y = e^{ax}$ ו- $y = e^{-ax}$ $(a > 0)$.

$S_1$ הוא השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות,

וע"י הישר $x = a$.

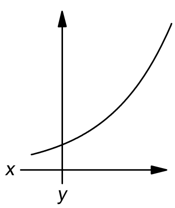
$S_2$ הוא השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $y = e^{-ax}$, וע"י הישר $x = a$.

נתון: $S_1 = S_2$. מצא את $a$. **(165)**

**2.** (קיץ ס"ד - 2004 , מועד ב)

ראה שאלה 1 , עמ' 136 . **(165)**

**ג.** **(2)** השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות ועל ידי ציר $y$.




**3.** (חורף ס"ה - 2005)

נתונה הפונקציה $y = e^{\frac{x}{2}}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה ברביע הראשון שבה $x = t$.

**א.** הבע באמצעות $t$ את משוואת המשיק.

**ב.** נתון כי משיק זה חותך את ציר $x$ בנקודה שבה $x = 2$.

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר $y$ . **(166)**

---

**מספרים ערפדיים**

**מספרים ערפדיים הם מספרים שלהם $2n$ ספרות, כך שמכפלת $n$ ספרות שלהם (לאו דוקא לפי הסדר), כמספר $n$־ספרתי ב־ $n$ הספרות האחרות (כנ"ל) , כמספר $n$־ספרתי שווה למספר עצמו:**

$27 \times 81 = 2187$ , $35 \times 41 = 1435$ , $21 \times 60 = 1260$

$15 \times 93 = 1395$ , $30 \times 51 = 1530$ , $21 \times 87 = 1827$ , $80 \times 86 = 6880$

**ויש גם ערפדיים מפלצתיים:**

$1,234,554,321 \times 9,162,361,086 = 11,311,432,469,283,552,606$

---

## תשובות

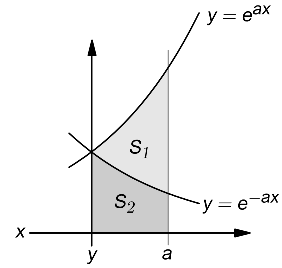
**1.** $a = \sqrt{\ln 2} = 0.8326$

**2.** **א.** $min: (0,0)$ **ג.** **(1)** $(\ln\frac{1}{2} , \frac{1}{4})$ **(2)** $S = 1 + \ln\frac{1}{2} = 0.3069$ (יחידות ריבועיות)

**3.** **א.** $y = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}x + e^{\frac{t}{2}}(1 - \frac{1}{2}t)$ **ב.** $S = 2e^2 - 2 = 12.7781$ (יחידות ריבועיות)

## חשבון אינטגרלי - פונקציות מעריכיות - פתרונות

**1.**




$$S_1 = S_2 \;\Rightarrow\; \int_0^a (e^{ax} - e^{-ax})dx = \int_0^a e^{-ax}dx$$

$$\Rightarrow\; \int_0^a (e^{ax} - 2e^{-ax})dx = 0$$

$$\left(\tfrac{1}{a}e^{ax} + \tfrac{2}{a}e^{-ax}\right)\Big|_0^a = \left(\tfrac{1}{a}e^{a^2} + \tfrac{2}{a}e^{-a^2}\right) - \left(\tfrac{1}{a}\cdot 1 + \tfrac{2}{a}\cdot 1\right) = 0 \quad /\cdot a$$

$$e^{a^2} = t \;\Rightarrow\; t + \tfrac{2}{t} - 3 = 0 \;\Rightarrow\; t^2 - 3t + 2 = 0$$

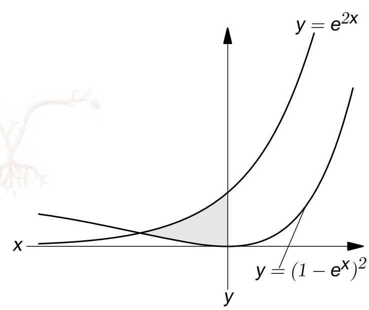
$$t_{1,2} = \tfrac{3\pm 1}{2} \;\Rightarrow\; t_1 = 1\,,\; t_2 = 2$$

$$t_1 = 1 \;\Rightarrow\; e^{a^2} = 1 \;\Rightarrow\; a^2 = 0 \;\Rightarrow\; a = 0\ (\times) \;\Leftarrow\; a > 0$$

$$t_2 = 2 \;\Rightarrow\; e^{a^2} = 2 \;\Rightarrow\; \ln e^{a^2} = \ln 2 \;\Rightarrow\; a^2 = \ln 2 \;\Rightarrow\; \mathbf{a = \sqrt{\ln 2} = 0.8326}$$

---

**2. ג. (2)**

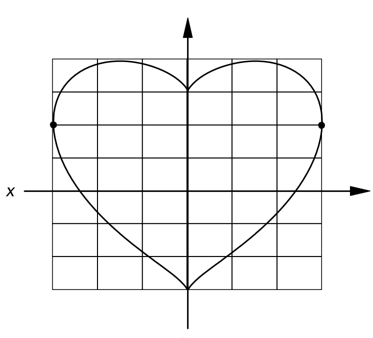



$$S = \int_{\ln 0.5}^{0} (e^{2x} - (1 - e^x)^2)\,dx = \int_{\ln 0.5}^{0} (2e^x - 1)\,dx$$

$$(2e^x - x)\Big|_{\ln 0.5}^{0} = (2\cdot e^0 - 0) - (2e^{\ln 0.5} - \ln 0.5) = 2 - 0 - 2\cdot\tfrac{1}{2} + \ln\tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{S = 1 + \ln\tfrac{1}{2} = 0.3069}$$ **(יחידות ריבועיות)**

**פונקציות מאוהבות**




החלק העליון של הציור הוא גרף הפונקציה:

$$y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{9 - x^2}$$

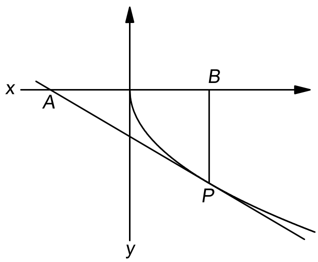
החלק התחתון של הציור הוא גרף הפונקציה:

$$y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{9 - x^2}$$

## חשבון אינטגרלי - פונקציות עם שורשים ריבועיים - שאלות

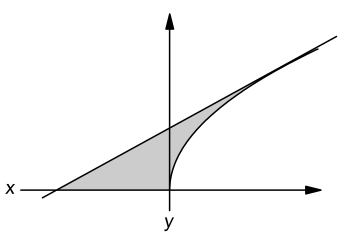
**1.** (5 יח' , קיץ תש"ן - 90) גרף הפונקציה $y=x^2$ וגרף הפונקציה $y=\sqrt{b^3x}$
נחתכים בנקודה $A$ ובראשית הצירים $O$ ($b>0$ פרמטר).
הוכח כי הקטע $OA$ מחלק את השטח, הכלוא בין שני הגרפים, לשני חלקים שווי־שטח. **(172)**

**2.** (4 יח' , קיץ תשנ"א - 91) מעבירים ישר המשיק לפרבולה
$y=-\sqrt{4x}$ בנקודה $P(9,-6)$ החותך את ציר $x$ בנקודה $A$.
האנך מהנקודה $P$ לציר $x$ חותך את ציר $x$ בנקודה $B$.
הוכח כי גרף הפרבולה מחלק את שטח המשולש $ABP$
לשני חלקים, ששטחיהם מתייחסים זה לזה כמו $1:2$. **(172)**

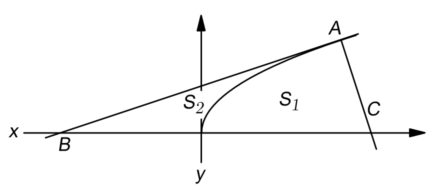



**3.** (5 יח' , קיץ תשנ"א - 91) בציור השאלה הקודמת:
מעבירים ישר המשיק לפרבולה $y=-\sqrt{4x}$ בנקודה $P(a,-\sqrt{4a})$ וחותך את ציר $x$ בנקודה $A$.
האנך מהנקודה $P$ לציר $x$ חותך את ציר $x$ בנקודה $B$. הוכח כי גרף הפרבולה מחלק את שטח
המשולש $ABP$ לשני חלקים, ששטחיהם מתייחסים זה לזה כמו $2:1$. **(173)**

**4.** (4 יח' , חורף תשנ"ב - 91) נתונה הפונקציה: $y=\sqrt{3x}$.
בנקודה שבה $x=3$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה.
**א.** מצא את משוואת המשיק.
**ב.** מצא את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה,
ע"י המשיק וע"י ציר $x$. **(173)**




**5.** (4 יח' , חורף תשנ"ה - 95) נתונה הפונקציה: $y=2\sqrt{x}$.
ישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $A(9,6)$,
חותך את ציר $x$ בנקודה $B$.
ישר, המאונך למשיק בנקודה $A$,
חותך את ציר $x$ בנקודה $C$.
גרף הפונקציה מחלק את שטח המשולש $ABC$ לשני שטחים $S_1$ ו־ $S_2$.
**א.** מצא את משוואת המשיק ואת משוואת האנך.
**ב.** הראה כי היחס בין שני השטחים הוא $\frac{S_1}{S_2}=\frac{7}{3}$. **(174)**

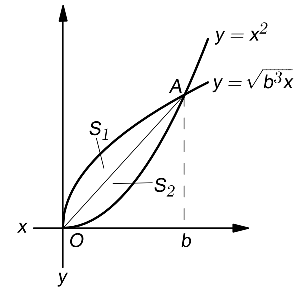



## תשובות

**4. א.** $y=\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$ **ב.** $S=3$ (יח"ר) **5. א.** $y_{AC}=-3x+33$ , $y_{AB}=\frac{1}{3}x+3$

## חשבון אינטגרלי - פונקציות עם שורשים ריבועיים - פתרונות

**.1**




$x^2 = \sqrt{b^3x} \quad /(\ )^2$ נקודת חיתוך הפונקציות

$x^4 = b^3x \quad \Rightarrow \quad x(x^3 - b^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \ ; \ x_2 = b$

$y_1 = 0^2 = 0 \ , \ y_2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad O(0,0) \ , \ A(b, b^2)$

$\underline{y_{OA}:} \quad y = \frac{b^2}{b}x = bx$

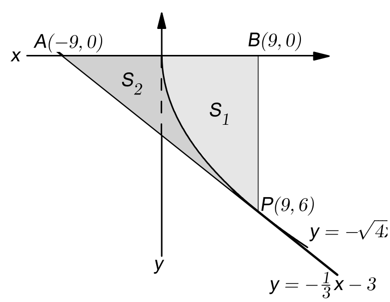
$S_1 = \int_0^b (\sqrt{b^3x} - bx)dx = [\ b^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{bx^2}{2}\ ]_0^b$

$S_1 = \frac{2}{3}b^3 - \frac{1}{2}b^3 = \frac{4b^3 - 3b^3}{6} \quad \Rightarrow \quad \underline{S_1 = \frac{b^3}{6}}$ (יחידות ריבועיות)

$S_2 = \int_0^b (bx - x^2) = [\ \frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\ ]_0^b = \frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} = \frac{3b^3 - 2b^3}{6} \quad \Rightarrow \quad \underline{S_2 = \frac{b^3}{6}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_1 = S_2} \ (\checkmark)$

---

**.2**




$y = -\sqrt{4x} = -2\sqrt{x}$

$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$ נוסחת משוואת משיק

$y' = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad y'(9) = -\frac{1}{\sqrt{9}} = -\frac{1}{3}$

$y + 6 = -\frac{1}{3}(x - 9) = -\frac{1}{3}x + 3 \quad \Rightarrow \quad y_{AP} = -\frac{1}{3}x - 3$

$y = -\frac{1}{3}x - 3$ משוואת המשיק

$y_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3}x - 3 = 0 \quad \overset{\cdot 3}{\Rightarrow} \quad -x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_A = -9 \quad \Rightarrow \quad A(-9, 0)$

$S_1 = |\int_0^9 (-2\sqrt{x})\ dx\ | = [\ -2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\ ]_9^0 = [\ \frac{-4\sqrt{x^3}}{3}\ ]_9^0 = 0 - (\frac{-4\sqrt{9^3}}{3}) = \frac{4 \cdot 27}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{S_1 = 36}$

$S_2 = S_{\triangle ABP} - S_1$

$S_{\triangle ABP} = \frac{AB \cdot BP}{2} = \frac{(9+9) \cdot 6}{2} = 54 \quad \Rightarrow \quad S_2 = 54 - 36 \quad \Rightarrow \quad \underline{S_2 = 18}$

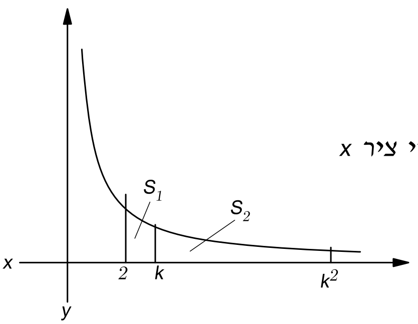
$\frac{S_2}{S_1} = \frac{18}{36} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2} = 1:2} \ (\checkmark)$

**שלום מתוזמן**

*המילה 'שלום' מופיעה בפעם הראשונה בתנ"ך בספר בראשית בברית בין הבתרים (בראשית ט"ו ט"ו).*
*פסוק זה הוא הפסוק ה־376 בתורה. מספר זה הוא בדיוק הערך הגימטרי של המילה 'שלום'.*

## חשבון אינטגרלי של פונקציות שפתרונן לוגריתמי - שאלות

(כל השאלות משאלון 007 , אלא אם כן צוין אחרת)




**1.** (004 , קיץ ס"ו - 2006 , מועד א)

נתונה הפונקציה $y=\frac{1}{2x}$ , $x>0$.

$S_1$ הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר $x$

ועל ידי הישרים $x=2$ ו־ $x=k$ $(k>2)$.

$S_2$ הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי ציר $x$ ועל ידי הישרים $x=k$ ו־ $x=k^2$.

**א.** הוכח כי ההפרש $S_2-S_1$ הוא גודל קבוע

שאינו תלוי ב־$k$. תוכל להשאיר $\ln$ בתשובתך.

**ב.** חשב את הערך של $k$ , אם נתון כי $\frac{S_2}{S_1}=3$ .

בתשובתך השאר שלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית. **(182)**

**2.** (קיץ ס"ו - 2006 , מועד א) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4x+5}{x-2}$

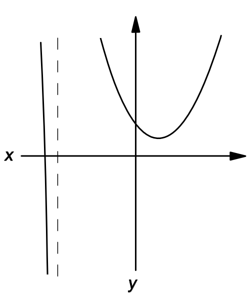
**א.** (1) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ואסימפטוטות המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**ב.** חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר $y$

ועל ידי הישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום (המקומי) שלה. **(183)**




**3.** (קיץ ס"ו - 2006 , מועד מיוחד)

**ב.** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{6x^3+5x^2-6x+2+b}{2x+3}$ ($b$ - פרמטר).

השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x)$ , ע"י הישר $x=1$

וע"י הצירים הוא $2\ln\frac{5}{3}$ (יחידות ריבועיות).

חשב את ערך הפרמטר $b$. **(184)**

## תשובות

**1.** **א.** $S_2-S_1=\frac{1}{2}\ln 2$ **ב.** $k=\sqrt{8}=2.828$

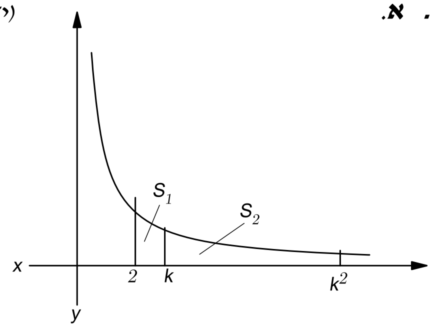
**2.** **א.** **(1)** $\max(1,-2)$ $\min(3,2)$ **(2)** $x=2$ , $x\neq 2$

**ב.** $S=\ln 2-\frac{1}{2}=0.1931$ (יחידות ריבועיות)

**3.** **ב.** $b=2$

## חשבון אינטגרלי של פונקציות שפתרונן לוגריתמי - פתרונות

**1. א.**




$$S_1=\int_2^k \frac{1}{2x}dx=\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)\Big|_2^k=\frac{1}{2}(\ln k-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln\frac{k}{2}$$ (י"ר)

$$S_2=\int_k^{k^2}\frac{1}{2x}dx=\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)\Big|_k^{k^2}=\frac{1}{2}(\ln k^2-\ln k)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{k^2}{k}=\frac{1}{2}\ln k$$ (יחידות ריבועיות)

$$S_2-S_1=\frac{1}{2}\ln k-\frac{1}{2}\ln\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\left(\ln k-\ln\frac{k}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{k}{\frac{k}{2}}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{S_2-S_1=\frac{1}{2}\ln 2}\ (\surd)$$

**ב.**

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}\ln k}{\frac{1}{2}\ln\frac{k}{2}}=\frac{\ln k}{\ln\frac{k}{2}}=3\quad\Rightarrow\quad \ln k=3\ln\frac{k}{2}$$

$$\ln k=3(\ln k-\ln 2)$$

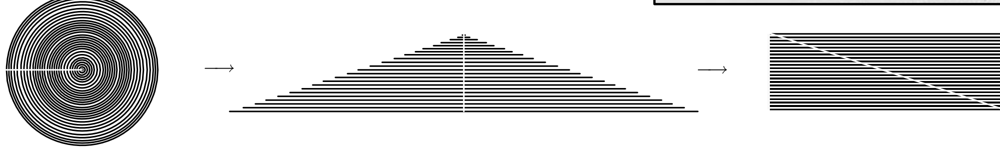
$$\ln k=3\ln k-3\ln 2\quad /-3\ln k$$

$$-2\ln k=-3\ln 2\quad\Rightarrow\quad \ln k=\frac{3}{2}\ln 2=\ln 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{k=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2^3}=\sqrt{8}=2.828}$$

עמוד ממסכת **סוכה**. הגמרא נעזרת כאן במתמטיקה על מנת ללבן סוגיות הלכתיות. בין השאר מסבירים כאן **התוספות** (פירוש והרחבה לדברי הגמרא, מסומן בעיגול) כיצד ניתן למצוא שטח מעגל: מסתכלים על המעגל כרצף מעגלים הולכים וקטנים עד לנקודת המרכז. גוזרים את המעגל בנקודה כלשהי על היקפו עד לנקודת המרכז (רדיוס). פורסים את המעגלים החתוכים. מקבלים משולש שווה־שוקים. חותכים את המשולש שהתקבל לאורך הגובה שלו. מקבלים שני משולשים ישרי־זווית חופפים. מהם ניתן להרכיב מלבן, ואת שטח המלבן אנו יודעים לחשב: אורך כפול רוחב.

נתרגם זאת לנוסחאות המתמטיקה שלנו: אורך בסיס משולש שווה־השוקים הוא היקף המעגל: $2\pi r$. מחצית הבסיס $= \pi r$ (אחד מניצביו של משולש ישר־הזווית). אורך זה הוא אורך המלבן המתקבל. רוחב המלבן שהתקבל $= r$. שטח המלבן = אורך · רוחב $= \pi r^2 = \pi r\cdot r = S$.



**2. א.**

$$y=\frac{x^2-4x+5}{x-2} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x\neq 2}$$

$$y'=\frac{(2x-4)(x-2)-1\cdot(x^2-4x+5)}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-4x+8-x^2+4x-5}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\overset{?}{=}0$$

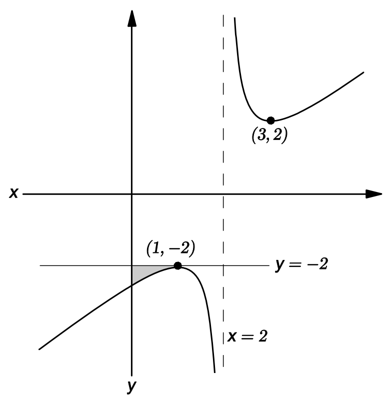
$$x^2-4x+3=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1 \quad\Rightarrow\quad x_1=3\ ,\ x_2=1$$

$$\Rightarrow\quad y'=\boxed{\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}}$$

| x | | 1 | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $\frac{-\,-}{+}=+$ | $0$ | $\frac{-\,+}{+}=-$ | $\emptyset$ | $\frac{-\,+}{+}=-$ | $0$ | $\frac{+\,+}{+}=+$ |
| y | ↗ | max | ↘ | asym. | ↘ | min | ↗ |

$$y(1)=\frac{1-4+5}{1-2}=\frac{2}{-1}=-2 \quad\Rightarrow\quad \textbf{max}:\ \ \boldsymbol{(1,-2)}$$

$$y(3)=\frac{9-12+5}{3-2}=\frac{2}{1}=2 \quad\Rightarrow\quad \textbf{min}:\ \ \boldsymbol{(3,2)}$$




$\underline{\text{asym.}:}\quad \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+5}{x-2}=\frac{\to 1}{\to 0}=\infty \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x=2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+5}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\cancel{2}}(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2})}{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}$$

$$=\frac{\to\infty(1-0+0)}{\to 1-0}=\infty$$

$\Rightarrow$ <u>אין</u> אסימפטוטה אופקית

**ב.** שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת קיצון שלה הוא $0$

לכן הישר המשיק לה באותה נקודה הוא קו אופקי:

$$\text{max}:\ (1-2) \quad\Rightarrow\quad y=-2$$

$$S=\int_0^1\left(-2-\frac{x^2-4x+5}{x-2}\right)dx=\int_0^1\left(-2-\frac{x^2-4x+4+1}{x-2}\right)dx=\int_0^1\left(-2-\frac{(x-2)^2+1}{x-2}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(-2-(x-2)-\frac{1}{x-2}\right)dx=\int_0^1\left(-x-\frac{1}{x-2}\right)dx=\left(-\frac{x^2}{2}-\ln|x-2|\right)\Bigg|_0^1$$

$$S=\left(-\frac{1}{2}-\ln 1\right)-(0-\ln 2)=-\frac{1}{2}-0-0+\ln 2$$

$\boldsymbol{S=\ln 2-\frac{1}{2}=0.1931}$ **(יחידות ריבועיות)**

| |
|---|
| **המספר הראשוני** $1093$ **ניתן להצגה הבאה:** $1093=3^0+3^1+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6$ |

## ***מבנה מבחן הבגרות לשאלון 807***

שאלון ו' (35806) מהווה 60% מהציון הסופי.

שאלון ז' (35807) מהווה 40% מהציון הסופי.

משך זמן המבחן: שעתיים .

**פרק א - בחירה: 2 שאלות מתוך 3 שאלות.**

וקטורים, טריגונומטריה במרחב, גיאומטריה אנליטית, מספרים מרוכבים.

**פרק ב - בחירה: שאלה אחת מתוך 2 שאלות.**

בעיות גדילה ודעיכה

חדו"א של פונקציות חזקה (עם מעריך רציונלי), פונקציות מעריכיות, פונקציות לוגריתמיות (כולל שילוב עם פונקציות פולינום, פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות)

**המשך מעמ' 126**

**אם נרשה סדר ספרות יורד - יש לנו פתרון נוסף:**

$$98-76+54+3+21=100$$

**באנגליה התקימה פעם תחרות שבה התבקשו המתחרים למצוא תשובות לשאלה זו.**

**ילדה אחת, בת 13, הציעה 56 תשובות שונות! אחת מהן היא זו:**

$$1^{2345}+6\times(7+8)+9=100$$

**אפשרויות נוספות:**

$$1-2^{3+4}+5\times6\times7+8\times9=100$$

$$(1+2+3+4+5)\times6-7+8\times9=100$$

$$(12-(3+4)+5)^{-6+7+8-9}=100$$

$$(\sqrt[1+2]{-3+4})^5+6\times(7+8)+9=100$$

$$(1+(\sqrt[2]{3})^4+5)\times6-7+8+9=100$$

**אם נאפשר שימוש בשברים, ונוותר על סדר הספרות - נקבל את האפשרויות הבאות:**

$$24\frac{3}{6}+75\frac{9}{18}=100$$

$$47\frac{3}{6}+52\frac{9}{18}=100$$

$$74\frac{3}{6}+25\frac{9}{18}=100$$

$$95\frac{3}{7}+4\frac{16}{28}=100$$

$$98\frac{3}{6}+1\frac{27}{54}=100$$

$$94\frac{1}{2}+5\frac{38}{76}=100$$

$$1\frac{6}{7}+3+95\frac{4}{28}=100$$

$$57\frac{3}{6}+42\frac{9}{18}=100$$

## מבחן 26 - קיץ התשע"ו - 2016 - מועד ב

**בחירה: שתי שאלות מהשאלות 1-3 ושאלה אחת מהשאלות 4-5.**

### פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

**1.** נתונה פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ .

שני ישרים המשיקים לפרבולה בנקודות $K$ ו־ $L$ נפגשים בנקודה $A$ ,

שהיא נקודת החיתוך של מדריך הפרבולה עם ציר $x$ .

**א. (1)** הראה כי שיעור $x$ של $K$ שווה לשיעור $x$ של $L$ .

**(2)** הראה כי המשיקים מאונכים זה לזה.

נתון מעגל, שמרכזו $M$ נמצא על ציר $x$ .

המשיקים לפרבולה הנתונה בנקודות $K$ ו־ $L$ משיקים גם למעגל זה בנקודות אלה.

הצב $p = 2$ , וענה על הסעיפים הבאים:

**ב.** מצא את משוואת המעגל שמרכזו $M$ .

**ג.** מצא את משוואת המעגל החסום במרובע $AKML$ .

**2.** נתון מעגל הנמצא במישור $\pi$ , ומרכזו בראשית הצירים $O(0,0,0)$ .

הישר $l_1:\ \underline{x} = (2,2,0) + t(1,2,1)$ נמצא במישור $\pi$ , ומשיק למעגל זה בנקודה $B$ .

**א.** מצא את השיעורים של הנקודה $B$ .

**ב.** הישר $l_2:\ \underline{x} = (0,1,1) + s(2,-1,1)$ חותך את המישור $\pi$ בנקודה $A$ .

**(1)** הראה כי הנקודה $A$ נמצאת על המעגל הנתון.

**(2)** מצא את שטח המשולש $AOB$ .

**ספרטנים**

כשפיליפוס מלך מוקדון (המאה הרביעית לפנה"ס) ערך מסע ביוון, הוא שלח אולטימטום לספרטה, ואיים: "אם אפלוש לביתכם, אני אשמיד הכל, כך שלא תוכלו להתאושש ולקום שנית".
במכתב תשובה ששלחו לו הספרטנים היתה מילה אחת: "אם" . . .

כשהפרסים דרשו מהספרטנים למסור את נשקם לאות כניעה, הם ענו להם: "בואו וקחו אותו" . . .

### תשובות

**1. ב.** $(x-3)^2 + y^2 = 8$ **ג.** $(x-1)^2 + y^2 = 2$

**2. א.** $B(1,0,-1)$ **ב. (2)** $S_{\triangle AOB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (יחידה ריבועית)

**3.** **א.** נתון המספר המרוכב $z = \frac{(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})^3}{(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12})^2}$ .

**(1)** מצא את $|z|$ , ואת הארגומנט (הזווית) של $z$ .

**(2)** מצא את הערכים של $n$ ($n$ מספר טבעי) שעבורם $z^n$ הוא מספר מדומה טהור.

<u>אין</u> קשר בין סעיף א לסעיף ב להלן.

**ב.** נתון המקום הגאומטרי $|(z+\bar{z}) - m(z-\bar{z})| = 40$ , כאשר $m$ הוא מספר ממשי גדול מ־ $1$ .

**(1)** זהה את המקום הגאומטרי. נמק.

**(2)** הנקודה שמיוצגת על־ידי המספר $12+8i$ נמצאת על המקום הגאומטרי.

מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של המקום הגאומטרי עם הצירים.

## <u>פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות</u>

**4.** נתונה הפונקציה $f(x) = 9^x - 2\cdot 3^x - 3$ המוגדרת לכל $x$ .

**א.** **(1)** מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

**(2)** מצא את האסימפטוטה האופקית לגרף הפונקציה.

**(3)** מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

**(4)** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**ב.** מצא את השטח מימין לציר $y$ , המוגבל על־ידי גרף הפונקציה,

על־ידי ציר $y$ ועל־ידי האסימפטוטה האופקית.

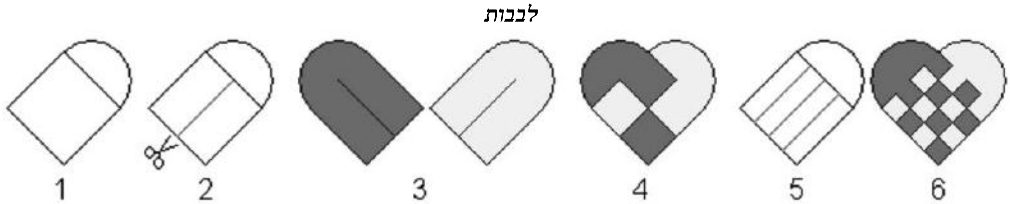
**ג.** נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + 4$ .

השטח שמצאת בסעיף ב שווה לשטח מימין לציר $y$ , המוגבל על־ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ,

על־ידי ציר $y$ ועל־ידי הישר $y = k$ .

מהו הערך של $k$ ? נמק.

**לבבות**

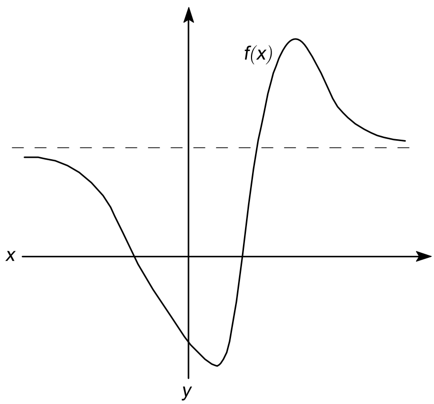



## תשובות

**3.** **א.** **(1)** $\arg(z) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ , $|z| = 1$ **(2)** $n$ לא־זוגי **ב.** **(1)** אליפסה **(2)** $(0,\pm 10)$ , $(\pm 20, 0)$

**4.** **א.** **(1)** $(1,0)$ , $(0,-4)$ **(2)** $y_{\leftarrow} = -3$ **(3)** min $(0,-4)$

**ב.** $S = \frac{1}{2\ln 3} = 0.4551$ (יחידה ריבועית) **ג.** $k = 1$




**5.** בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ .
נתון כי הפונקציות $f(x)$ , $f'(x)$ , $f''(x)$
מוגדרות לכל $x$ .
לגרף הפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית
אחת, שמשוואתה $y = 1.5e$ כמתואר בציור.
נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן:
$A(4, 3e)$ ו־ $B(1, -1.5e)$ .
הנקודות $D(2, 0)$ , $C(-2, 0)$ ו־ $E(5, 2e)$
נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)$ .
הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה ($\frown$) בתחום $x < -2$ ובתחום $2 < x < 5$ ,
והיא קעורה כלפי מעלה ($\smile$) בתחום $x > 5$ ובתחום $-2 < x < 2$ .

**א.** מצא את שיעורי $x$ של נקודות הקיצון של פונקצית הנגזרת $f'(x)$ , וקבע את סוגן. נמק.

**ב.** הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \ln [f(x)]$ .

**(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ .

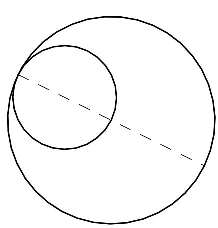
**(2)** מצא את האסימפטוטות של $g(x)$ המאונכות לציר $x$ .

**(3)** מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

**(4)** לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת שמשוואתה $y = \ln 1.5e$ .
סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ .

**בהצלחה**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט



**מעגל שמשרטט קו ישר**

*בציור מעגל קטן משיק למעגל גדול מבפנים.*
*אורך רדיוס המעגל הגדול גדול פי שניים מאורך רדיוס המעגל הקטן.*
*אם ננעץ כלי כתיבה על המעגל הקטן בנקודת ההשקה,*
*ונסובב אותו לאורך היקף המעגל הגדול מבפנים תוך כדי המשך השקתו לו,*
*המסלול שישרטט כלי הכתיבה יהיה קו ישר!*

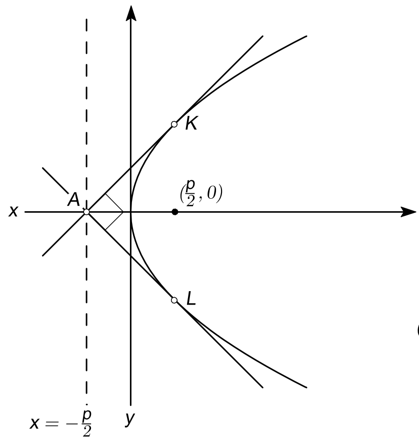
## תשובות

**5.** **א.** $x_{min1} = -2$ , $x_{max} = 2$ , $x_{min2} = 5$

**ב.** **(1)** $(x < -2) \cup (x > 2)$ **(2)** $x_{\rightarrow} = -2$ , $x_{\leftarrow} = 2$ **(3)** $\max (4, 1 + \ln 3)$

## פתרון מבחן 26

**1. א.** (1)




$y^2=2px \quad , \quad A(-\frac{p}{2},0) \quad , \quad K(x_K,y_K) \quad , \quad L(x_L,y_L)$

$yy_0=p(x+x_0) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} yy_K=p(x+x_K) \\ yy_L=p(x+x_L) \end{matrix}$

נוסחת משיק לפרבולה בנקודה שעליה

$y_A=0 \quad \Rightarrow \quad p(x_A+x_K)=p(x_A+x_L)=0$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_K=x_L} \quad (\checkmark)$

(2)

$x_K=x_L \quad \Rightarrow \quad y_L=-y_K$

סימטריות הפרבולה ביחס לציר x

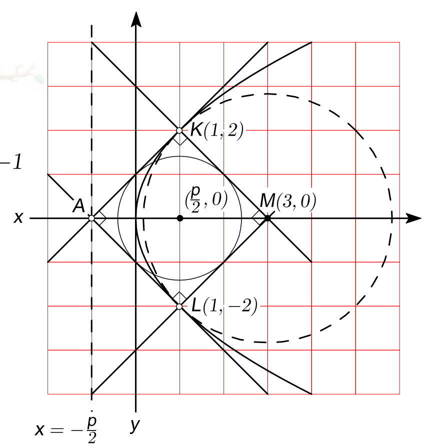
$\underline{AK:}\ yy_K=p(x+x_K) \quad \Rightarrow \quad m_{AK}=\frac{p}{y_K}$

$\underline{AL:}\ yy_L=p(x+x_L) \quad \Rightarrow \quad m_{AL}=\frac{p}{y_L}=-\frac{p}{y_K}$

$m_{AK}\cdot m_{AL}=\frac{p}{y_K}\cdot(-\frac{p}{y_K})=-\frac{p^2}{y_K^2}=-\frac{p^2}{2px_K}=-\frac{p}{2x_K}\overset{(*)}{=}-\frac{p}{2\cdot\frac{p}{2}}=-1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AK\perp AL} \quad (\checkmark)$

$(*) \quad p(x_A+x_K)=0 \quad \Rightarrow \quad x_K=-x_A=-(-\frac{p}{2})=\frac{p}{2}$

**ב.**




$p=2 \quad \Rightarrow \quad K(1,2)\ ,\ L(1,-2)\ ,\ A(-1,0)$

$\underline{KM:}\ KM\perp AK\ ,\ m_{AK}=\frac{p}{y_K}=\frac{2}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad m_{KM}=-1$

$m_{KM}=\frac{2-0}{1-x_M}=-1 \quad \Rightarrow \quad 2=-1+x_M$

$\Rightarrow \quad x_M=3$

$M(3,0) \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2+y^2=R^2$

$K(1,2) \quad \Rightarrow \quad (1-3)^2+2^2=R^2$

$\Rightarrow \quad 4+4=R^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(x-3)^2+y^2=8}$

**ג.** המרובע AKML הוא ריבוע: $AK=AL$ (משיקים למעגל (M) מאותה נקודה). $AK\perp AL$.

$ML\perp AL\ ,\ MK\perp AK$ (רדיוס מאונך למשיק).

מרכז המעגל החסום בריבוע הוא מפגש אלכסוניו.

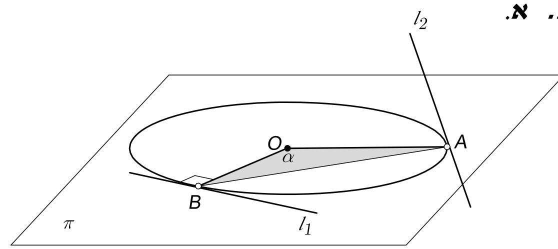
אלכסוני ריבוע חוצים זה את זה.

מפגש האלכסונים הוא אמצע הקטע $AM$: $(\frac{-1+3}{2},0)=(1,0)$

$\underline{KM:}\ m=-1\ ,\ K(1,2) \quad \Rightarrow \quad y-2=(-1)(x-1) \quad \Rightarrow \quad x+y-3=0$

$r=d((1,0)\leftrightarrow KM)=\frac{|1\cdot1+1\cdot0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r^2=2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(x-1)^2+y^2=2}$

**2. א.**




$B \in \{l_1 : \underline{x} = (2,2,0) + t(1,2,1)\}$

$\Rightarrow \quad B(2+t, 2+2t, t)$

$O(0,0,0) \quad \Rightarrow \quad \vec{OB} = (2+t, 2+2t, t)$

$\vec{l_1} \perp \vec{OB} \quad \Rightarrow \quad (1,2,1)\cdot(2+t, 2+2t, t) = 0$

$2 + t + 4 + 4t + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 6t = -6$

$\Rightarrow \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B(1,0,-1)}$

**ב. (1)** מציאת משוואת מישור $\pi$ : יהי $(a,b,c)$ וקטור המקדמים של המישור

$$l_1 \in \pi \vec{OB} \in \pi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (I) \ (a,b,c)\cdot(1,2,1) = 0 \\ (II) \ (a,b,c)\cdot(1,0,-1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (I) \ a + 2b + c = 0 \\ (II) \ a - c = 0 \end{cases}$$

$(II) \ \underset{\text{בחירה}}{a = c = 1} \quad \Rightarrow \quad (I) \ 1 + 2b + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -1$

$\pi$ עובר דרך ראשית הצירים, לכן $d = 0$ ומכאן ש: $\pi: \ x - y + z = 0$

$A \in \{l_2 : \underline{x} = (0,1,1) + s(2,-1,1)\} \quad \Rightarrow \quad A(2s, 1-s, 1+s)$

$A \in \pi \quad \Rightarrow \quad 2s - (1-s) + 1 + s = 0 \quad \Rightarrow \quad 4s = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 0 \quad \Rightarrow \quad A(0,1,1)$

$R = |\vec{OB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\vec{OA} = (0,1,1) \quad \Rightarrow \quad |\vec{OA}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = R \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A \in circle} \ (\checkmark)$

**(2)**

$AO = BO = R = \sqrt{2}$

$\cos\alpha = \frac{(0,1,1)\cdot(1,0,-1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{0+0-1}{2} = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ$

$S_{\triangle AOB} = \frac{AO \cdot BO \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{\triangle AOB} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ **(יחידה ריבועית)**

**האם ניתן למצוא 100 מספרים עוקבים שאין בהם אף לא מספר ראשוני אחד?**
**ובכן, התשובה היא: כן. הסדרה מתחילה במספר $101! + 2$ ומסתיימת במספר $101! + 101$ .**
**תחשבו עכשו מדוע זה נכון.**
**על פי אותו רעיון גם ניתן למצוא $1000$ מספרים עוקבים שאין בהם אף לא מספר ראשוני אחד.**
**הסדרה תתחיל במספר $1001! + 2$ ותסתיים במספר $1001! + 1001$ .**

**3. א. (1)**

$$z=\frac{(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9})^3}{(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12})^2}\underset{\substack{\uparrow\\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha\\ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha}}{=}\frac{(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9})^3}{(\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12}))^2}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{דה־מואבר}}}{=}\frac{cis\,\frac{3\pi}{9}}{cis\,(-\frac{2\pi}{12})}$$

$$=\frac{cis\,\frac{\pi}{3}}{cis\,(-\frac{\pi}{6})}=cis\,(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=cis\,\frac{\pi}{2}=0+i\cdot 1=i\quad\Rightarrow\quad |z|=|\,i\,|=1$$

המספר המרוכב $z=i$ נמצא על החלק החיובי של ציר $y$

ולכן: $\arg(z)=90^{\circ}=\frac{\pi}{2}$ .

**(2)** $z^n=i^n$ . $i^n$ מחזורי באופן הבא: $i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ \ldots$

מכאן ש־ $i^n$ הינו מדומה טהור עבור $n=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$ כלומר: עבור כל **n לא־זוגי.**

אפשר גם: $z^n=(cis\,\frac{\pi}{2})^n=cis\,\frac{n\pi}{2}$ . מספר מדומה טהור יתקבל כאשר $\cos\frac{n\pi}{2}=0$ .

שוויון זה מתקיים עבור כל **n לא־זוגי** שאלו הנקודות $90^{\circ}$ ו־ $270^{\circ}$ על מעגל היחידה

הטריגונומטרי (כולל המחזוריות האינסופית שלהם) שערך קוסינוס זוויות אלו הוא $0$.

**ב. (1)**

$$|(z+\bar{z})-m(z-\bar{z})|=40\ \ ,\ \ z=x+yi$$

$$|x+yi+x-yi-m(x+yi-(x-yi))|=|2x-2myi|=40\ \ /(\ \ )^2$$

$$4x^2+4m^2y^2=1600\ \ /:4\quad\Rightarrow\quad x^2+m^2y^2=400\quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{\frac{400}{m^2}}=1\quad \text{אליפסה}$$

**(2)**

$$(12,8)\in\{x^2+m^2y^2=400\}\quad\Rightarrow\quad 144+64m^2=400\quad\Rightarrow\quad m^2=\frac{256}{64}=4$$

$$m>1\quad\Rightarrow\quad m=2\quad\Rightarrow\quad x^2+4y^2=400$$

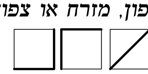
$$x=0\quad\Rightarrow\quad 4y^2=400\quad\Rightarrow\quad y^2=100\quad\Rightarrow\quad y=\pm 10\quad\Rightarrow\quad (0,\pm 10)$$

$$y=0\quad\Rightarrow\quad x^2=400\quad\Rightarrow\quad x=\pm 20\quad\Rightarrow\quad (\pm 20,0)$$

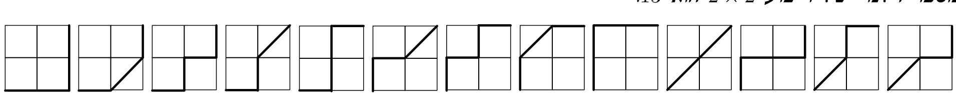
**מספרי דֶלָנוֹי**

מספרי דלנוי (Delannoy) הוא מספר המסלולים שבהם ניתן להגיע בריבוע מסדר $n\times n$ מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(n,n)$, כאשר כל שלב בהתקדמות של כל מסלול עובר דרך אחד מקדקודי $n^2$ הריבועים של אותו ריבוע.

כל הצעדים יכולים להתקדם רק בכיוון צפון, מזרח או צפון־מזרח.

מספר דלנוי של ריבוע $1\times 1$ הוא $3$: 

מספר דלנוי של ריבוע $2\times 2$ הוא $13$:



ידועים רק שלושה מספרים ראשונים דלנויים: $3$ $(1\times 1)$, $13$ $(2\times 2)$ ו־$265,729$ $(8\times 8)$.

תרגיל: הראה כח מספר דלנוי של $3\times 3$ הוא $63$.

**4. א. (1)**

$f(x)=9^x-2\cdot3^x-3$ , $x=0 \Rightarrow y=1-2-3=-4 \Rightarrow$ **(0,−4)**

$y=0 \Rightarrow (3^x)^2-2\cdot3^x-3=0 \Rightarrow (3^x)_{1,2}=\frac{2\pm4}{2}$

$3^x>0 \Rightarrow 3^x=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$ **(1,0)**

**(2)**

$\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x(3^x-2-\frac{3}{3^x}))=+\infty(+\infty-2-0)=+\infty \Rightarrow +\infty:\ \emptyset$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(9^x-2\cdot3^x-3)=0-2\cdot0-3=-3 \Rightarrow -\infty:\ \mathbf{y_{\leftarrow}=-3}$

**(3)**

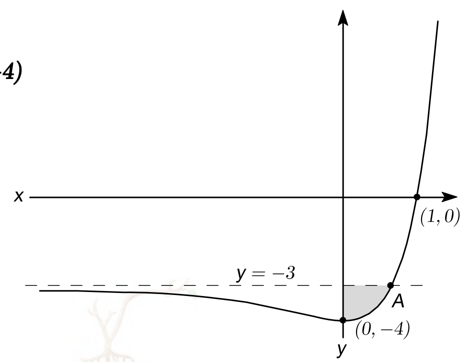
$f'(x)=9^x\ln9-2\cdot3^x\ln3=(3^x)^2\,2\ln3-2\cdot3^x\ln3=\boxed{2\cdot3^x\ln3\,(3^x-1)}\overset{?}{=}0$

$3^x-1=0 \Rightarrow 3^x=1=3^0 \Rightarrow x=0$

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f ′ | − | 0 | + |
| f | ↘ | min | ↗ |

$\Rightarrow$ **min (0,−4)**

**(4)**




(סימון השטח - עבור סעיף ב.)

**ב.**

$\underline{x_A}:\ 9^x-2\cdot3^x-3=-3 \Rightarrow 3^x(3^x-2)=0 \Rightarrow 3^x=2 \Rightarrow x=\frac{\ln2}{\ln3}=\log_32$

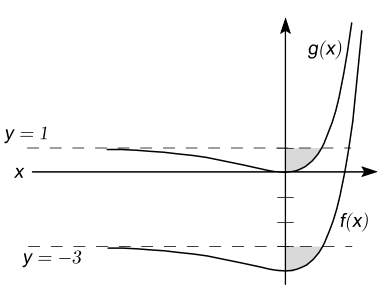
$S=\int_0^{\log_32}(-3-(9^x-2\cdot3^x-3))\,dx=\int_0^{\log_32}(-9^x+2\cdot3^x)\,dx=\left(-\frac{9^x}{\ln9}+2\cdot\frac{3^x}{\ln3}\right)\Big|_0^{\log_32}$

$S=(-\frac{\overset{*}{4}}{\ln9}+2\cdot\frac{2}{\ln3})-(-\frac{1}{\ln9}+2\cdot\frac{1}{\ln3})=-\frac{4}{2\ln3}+\frac{4}{\ln3}+\frac{1}{2\ln3}-\frac{2}{\ln3}$

$=\frac{-4+8+1-4}{2\ln3} \Rightarrow \mathbf{S=\frac{1}{2\ln3}=0.4551}$ **(יחידה ריבועית)**

$(*)\ \ 9^{\log_32}=(3^2)^{\log_32}=3^{2\log_32}=3^{\log_32^2}=3^{\log_34}=4$

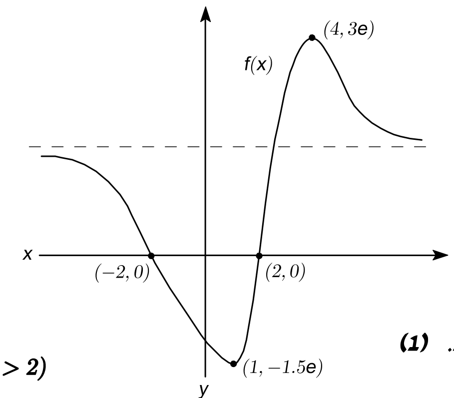
**ג.** הפונקציה $g(x)=f(x)+4$ מעלה את גרף הפונקציה $f(x)$ ארבע יחידות אורך כלפי מעלה. העלאה זו מעלה גם את האסימפטוטה האופקית בארבע יחידות אורך, ומשוואתה אז היא $y=1$ $(-3+4=1)$ , ולכן: $\mathbf{k=1} \Rightarrow y=k$ .
ראה ציור.



**5. א.**

| $x$ | | $-2$ | | $2$ | | $5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $\frown$ | $0$ | $\smile$ | $0$ | $\frown$ | $2e$ | $\smile$ |
| $f''$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f'$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x_{min1} = -2\ ,\ x_{max} = 2\ ,\ x_{min2} = 5}$$




**ב. (1)**

$$g(x) = \ln f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(x < -2) \cup (x > 2)}$$

**(2)**

$$\lim_{x \to -2-} \ln f(x) = \ln(\to +0) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_{\rightarrow} = -2}$$

$$\lim_{x \to 2+} \ln f(x) = \ln(\to +0) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_{\leftarrow} = 2}$$

**(3)**

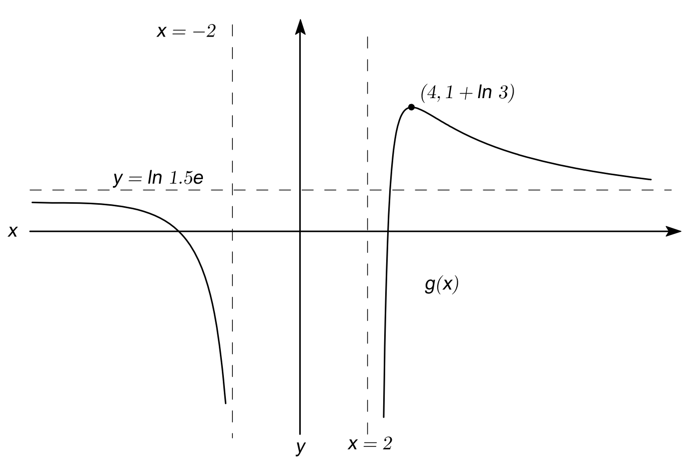
$$g'(x) = (\ln f(x))' = \boxed{\frac{f'(x)}{f(x)}} \stackrel{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1\ ,\ x_2 = 4$$

$$x = 1 \ \notin \ \{(x < -2) \cup (x > 2)\} \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

| $x$ | | $-2$ | | $2$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $\searrow$ | | | | $\nearrow$ | max | $\searrow$ |
| $f'$ | $-$ | | | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g'$ | $\frac{-}{+} = -$ | $\emptyset$ | | | $\frac{+}{+} = +$ | $\frac{0}{+} = 0$ | $\frac{-}{+} = -$ |
| $g$ | $\searrow$ | asym. | $\emptyset$ | asym. | $\nearrow$ | max | $\searrow$ |

$$g(4) = \ln f(4) = \ln 3e = \ln 3 + \ln e = 1 + \ln 3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\max\ (4, 1 + \ln 3)}$$

**(4)**




**המתמטיקה:** מלכת המדעים ושפחתם.