

אלי מיטב

מבחני בגרות במתמטיקה לשאלון **581** (806)

עם פתרונות מלאים

- |           |  |           |                                   |
|-----------|--|-----------|-----------------------------------|
| 276 _____ | 4 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד א               | 1 _____   | בעיות מילוליות - תנועה            |
| 288 _____ | 5 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד ב               | 18 _____  | - הספק                            |
| 299 _____ | 6 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד א (המבחן הגנוז) | 23 _____  | סדרות - סדרה חשבונית              |
| 309 _____ | 7 - חורף תשע"א - 2011                      | 31 _____  | - סדרה הנדסית                     |
| 320 _____ | 8 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד א              | 36 _____  | - סדרה הנדסית אינסופית            |
| 330 _____ | 9 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד ב              | 41 _____  | - סדרות כלליות                    |
| 340 _____ | 10 - חורף תשע"ב - 2012                     | 49 _____  | הסתברות                           |
| 351 _____ | 11 - קיץ תשע"ב - 2012 - מועד א             |           | גאומטריה אוקלידית                 |
| 362 _____ | 12 - קיץ תשע"ב - 2012 - מועד ב             | 88 _____  | א - פרופורציה ללא מעגל            |
| 373 _____ | 13 - חורף תשע"ג - 2013                     | 107 _____ | ב - מעגל ללא פרופורציה            |
| 383 _____ | 14 - קיץ תשע"ג - 2013 - מועד א             | 114 _____ | ג - פרופורציה במעגל               |
| 396 _____ | 15 - קיץ תשע"ג - 2013 - מועד ב             | 132 _____ | טריגונומטריה במישור - ללא מעגל    |
| 407 _____ | 16 - חורף תשע"ד - 2014                     | 144 _____ | - עם מעגל                         |
| 418 _____ | 17 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד א             |           | חשבון דיפרנציאלי                  |
| 427 _____ | 18 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד ב             | 170 _____ | פונקציות רציונליות ללא פיתול      |
| 437 _____ | 19 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד ג             | 194 _____ | פונקציות רציונליות עם פיתול       |
| 446 _____ | 20 - סתו תשע"ה - 2014 - מועד ד             | 200 _____ | פונקציות עם שורש ריבועי           |
| 454 _____ | 21 - חורף תשע"ה - 2015                     | 208 _____ | פונקציות טריגונומטריות            |
| 464 _____ | 22 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד א             | 218 _____ | הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הפונקציה |
| 475 _____ | 23 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד ב             |           | חשבון אינטגרלי                    |
| 486 _____ | 24 - חורף תשע"ו - 2016                     | 223 _____ | שטחים - כללי                      |
| 496 _____ | 25 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד א             | 226 _____ | פונקציות עם שורש ריבועי במכנה     |
| 507 _____ | 26 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד ב             | 230 _____ | נפח גוף סיבוב                     |
| 522 _____ | המשפטים בגאומטריה                          | 234 _____ | בעיות קיצון                       |
| 525 _____ | נוסחאון הבגרות לחמש יחידות                 |           | מבחני בגרות                       |
| 529 _____ | הסבר הסימנים המתמטיים המופיעים בספר        | 247 _____ | מבנה מבחן הבגרות                  |
|           |  | 248 _____ | 1 - קיץ ס"ט - 2009 - מועד א       |
|           |  | 258 _____ | 2 - קיץ ס"ט - 2009 - מועד ב       |
|           |  | 267 _____ | 3 - חורף תש"ע - 2010              |

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יצאו גם לשאלונים 382-481-482-582

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יצאו לשאלונים 481-482-581-582

## מספר מילים לפנ"י

ספר זה מכיל שאלות ממבחני בגרות מהשנים 2004-2016, המתאימות לשאלון 581 (806) בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. לכל השאלות תשובות סופיות בעמוד השאלה ופתרון מלא בהמשך עם הפניה לעמוד המתאים (המספר המעובה בסוגריים משמאל לכל שאלה). בחלקו השני של ספר זה מובאים 26 מבחני הבגרות לשאלון זה שנערכו עד כה עם פתרון מלא.

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו ככוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

**סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ-2012 (נכון להיום), כפי שהם מופיעים בספר, נמצאים באתר ההוצאה במקושת (internet), בעלות שנתית מצויקה של 20 (עשרים) שקלים בלבד. ראו בגב הכריכה.**

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי ברואל.

כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורים מארכימדס - פתרונות למידה ולמורה שריף אמארה מכפר נְלֶפָה.

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התשע"ז - 2017), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את חלק מהחללים שבין השאלות והפתרונות לְחֶלְתִי בהבזקי אנקדוטות וסיפורים, רוב ה'הבזקים' קשורים למתמטיקה, חלקם אינו כזה, וכיניהם גם אנקדוטות בעלות אופי לאומי או יהודי.

## ב ה צ ל ח ה

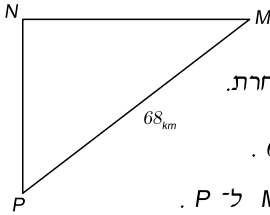
*א"י*

© כל הזכויות על השאלות שמורות למדינת ישראל - משרד החינוך, התרבות והספורט

כל הזכויות על הקָדָר ועל הפתרונות שמורות למחבר

האיורים בספר צוירו עליידי אלכסנדר לויטס מקיבוץ גשור שברמת הגולן.  
אלכסנדר הוא אביו של סרן דמיטרי (דימון) לויטס ז"ל, שנהרג ביצוק איתן.

**אלגברה**



**בעיות מילוליות - תנועה - שאלות**

בכל השאלות - מהירות המתוארים הינה קבועה, אלא אם כן צוין אחרת.

1. (4 יח', חורף תשל"ח - 78) המרחק מעיר M לעיר P הוא  $68 \text{ km}$ .  
 M נמצאת מזרחה מ' N. P - דרומה מ' N. רוכב אופנוע נסע מ' M ל' P.  
 הואיל והכביש הישיר המחבר את M עם P היה מוצף מים  
 - נסע הרוכב תחילה מ' M ל' N ולאחר מכן מ' N ל' P.  
 נסיעה זו נמשכה ב' 24 דקות יותר מכפי שהייתה נמשכת הנסיעה ישר מ' M ל' P.  
 את המרחק מ' M ל' N עבר רוכב האופנוע בשעה אחת. מצא את המרחק מ' N ל' P ואת  
 המהירות שבה נסע רוכב האופנוע. (היעזר במשפט פיתגורס.) (7)

2. (4 יח', קיץ תשמ"ב - 82) לספינת נהר מהירות של  $5 \text{ km/h}$  במים עומדים כשהיא טעונה,  
 ו' 15 קמ"ש במים עומדים כשהיא ריקה.  
 הספינה יוצאת טעונה במעלה הנהר (נגד הזרם) למרחק של  $81 \text{ km}$ . היא חוזרת (עם זרם) ריקה.  
 משך הנסיעה הלוך וחזור, כולל 3 שעות עגינה לפריקת המטען הוא 48 שעות.  
 מהי מהירות הזרם? (7)

3. (5 יח', קיץ כ"ד - 94) מונית, הנוסעת במהירות קבועה של  $80 \text{ km/h}$ , ואוטובוס, הנוסע במהירות  
 קבועה של  $v \text{ km/h}$ , יוצאים בו-זמנית מנקודה A לנקודה B.  
 כשהמונית הייתה באמצע הדרך, לאוטובוס נותרו עוד  $15 \text{ km}$  כדי להגיע לנקודה B.  
 כשהאוטובוס היה באמצע הדרך, למונית נותרו עוד  $8 \text{ km}$  כדי להגיע לנקודה B.  
 א. חשב את המרחק בין A ל' B. ב. חשב את מהירות האוטובוס  $v$ . (8)

4. (5 יח', קיץ תשנ"ז - 97) מנמל A יצאה סירת משוטים עם הזרם לנמל B.  
 שעה אחריה יצאה בעקבותיה מנמל A סירת מנוע, הגיעה לסירת המשוטים וחזרה לנמל A.  
 סירת המנוע הגיעה לנמל A כאשר סירת המשוטים הגיעה לנמל B.  
 ידוע כי מהירות סירת המשוטים (במים עומדים) גדולה פי 4 ממהירות הזרם,  
 ומהירות סירת המנוע (במים עומדים) גדולה פי 5 ממהירות הזרם.  
 מצא את משך הנסיעה של סירת המשוטים מנמל A לנמל B. (8)

**השאלות**

1.  $PN = 32 \text{ km}$ ,  $V = 60 \text{ km/h}$ . 3. א.  $AB = 24 \text{ km}$ . ב.  $v = 60 \text{ km/h}$ .  
 2.  $3 \text{ km/h}$ . 4.  $13\frac{1}{2} \text{ hours}$ .

**תנועה - פתרונות**

**1.**

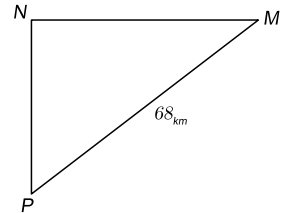
זמן	מהירות	דרך
$\frac{68}{x}$	$x$	$68$
$1$	$x$	$MN = x$
$\frac{68}{x} + \frac{24}{60}$	$x$	$MNP = 68 + \frac{2x}{5}$

$$NP^2 + NM^2 = MP^2 \Rightarrow (68 + \frac{2x}{5} - x)^2 + x^2 = 68^2 \Rightarrow (68 - \frac{3x}{5})^2 + x^2 = 68^2$$

$$68^2 - \frac{408x}{5} + \frac{9x^2}{25} + x^2 = 68^2 \quad / - 68^2 \quad / \cdot 25 \Rightarrow -2040x + 9x^2 + 25x^2 = 0$$

$$34x^2 - 2040x = 0 \Rightarrow 34x(x - 60) = 0, \quad x > 0 \Rightarrow \mathbf{x = 60 \text{ km/h}}$$

$$NP = 68 - \frac{3x}{5} = 68 - \frac{60 \cdot 3}{5} = 68 - 36 \Rightarrow \mathbf{NP = 32 \text{ km}}$$



**2.**  $x$  - מהירות זרם הנהר

זמן	מהירות	הדרך
$\frac{81}{5-x}$	$5-x$	81
$\frac{81}{15+x}$	$15+x$	81

$$\frac{81}{5-x} + \frac{81}{15+x} + 3 = 48 \quad / - 3 \quad / \cdot \frac{(5-x)(15+x)}{9} \Rightarrow 9(15+x) + 9(5-x) = 5(5-x)(15+x)$$

$$135 + 9x + 45 - 9x = 375 + 25x - 75x - 5x^2 \Rightarrow 5x^2 + 50x - 195 = 0 \quad / : 5$$

$$x^2 + 10x - 39 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-10 \pm 16}{2} = -5 \pm 8, \quad x > 0 \Rightarrow \mathbf{x = 3 \text{ km/h}}$$

**פרדוקסים**

פרסומת שהופיעה בטלוויזיה: הפרסום ברדיו - עובד!

שונא גזענים וכּוּשִׁים . . .

במשפת הוּה יש שלוש שגיעות.

אוּף, אתם האמריקאים - תמיד מכלילים

14. נסמן: C -  $\frac{1}{5}$  הדרך מ-A, (1) - הולך הרגל הראשון, (2) - הולך הרגל השני

זמן	מהירות	דרך
2.5	x	2.5x
$\frac{x}{y}$	y	$2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 2.5x = x$
$\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$	0	0
$\frac{2.5x}{y}$	y	2.5x

$$\Rightarrow (I) \frac{x}{y} + \frac{1}{6} + \frac{5x}{2y} = \frac{5}{2} \quad / \cdot 6y \Rightarrow 6x + y + 15x = 15y \Rightarrow 21x = 14y \Rightarrow y = \frac{21x}{14} = \frac{3x}{2}$$

1	x	$\frac{1}{x}$	(1)
1	$\frac{3x}{2}$	(II) $\frac{2}{3x} = \frac{1}{x} - \frac{5}{60}$	(2)

$$(II) \frac{2}{3x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{12} \quad / \cdot 12x \Rightarrow 8 = 12 - x \Rightarrow x = 4 \text{ km/h} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow y = 6 \text{ km/h}$$

מהירות	זמן	דרך	.15
x	y	xy	בדרך כלל
x	2	2x	ביום הראשון
$\frac{x}{3}$	$y - 2 + \frac{2}{3} = y - \frac{4}{3}$	$\frac{x}{3}(y - \frac{4}{3})$	

$$\Rightarrow (I) 2x + \frac{x}{3}(y - \frac{4}{3}) = xy$$

x	$\frac{2x+14}{x} = 2 + \frac{14}{x}$	2x + 14	ביום השני
$\frac{x}{3}$	$y - (2 + \frac{14}{x}) + \frac{1}{3} = y - \frac{14}{x} - \frac{5}{3}$	$\frac{x}{3}(y - \frac{14}{x} - \frac{5}{3})$	

$$\Rightarrow (II) 2x + 14 + \frac{x}{3}(y - \frac{14}{x} - \frac{5}{3}) = xy$$

$$(I) 2x + \frac{x}{3}(y - \frac{4}{3}) = xy \quad / : x \quad (\neq 0) \Rightarrow 2 + \frac{y}{3} - \frac{4}{9} = y \quad / \cdot 9$$

$$18 + 3y - 4 = 9y \Rightarrow 6y = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$(II) 2x + 14 + \frac{x}{3}(y - \frac{14}{x} - \frac{5}{3}) = xy \Rightarrow 2x + 14 + \frac{x}{3}(\frac{7}{3} - \frac{14}{x} - \frac{5}{3}) = \frac{7x}{3}$$

$$2x + 14 + \frac{7x}{9} - \frac{14}{3} - \frac{5x}{9} = \frac{7x}{3} \quad / \cdot 9 \Rightarrow 18x + 126 + 7x - 42 - 5x = 21x$$

$$-x = -84 \Rightarrow x = 84 \text{ km/h} \Rightarrow xy = 84 \cdot \frac{7}{3} \Rightarrow xy = 196 \text{ km}$$

**הספק - שאלות**

1. (שאלון 006, קיץ ס"ה - 2005, מועד א)

שלושה צינורות, I, II, III, ממלאים יחד ברכה במים ב־6 דקות.  
 צינור II לבד ממלא את הברכה ב־75% מהזמן שצינור I לבד ממלא את הברכה.  
 צינור III לבד ממלא את הברכה ב־10 דקות יותר מהזמן שצינור II לבד ממלא את הברכה.  
 בכמה דקות כל אחד מהצינורות ממלא לבד את הברכה?  
 (20)

2. (שאלון 006, קיץ ס"ה - 2005, מועד ב)

שתי קבוצות פועלים I ו-II עבדו בסלילת כביש.  
 בשלב הראשון עבדו שתי הקבוצות יחד במשך 8 ימים.  
 בשלב השני קבוצה I לא עבדה, וקבוצה II עבדה לבדה במשך 9 ימים נוספים.  
 בשני השלבים יחד נסללו 60% מהכביש.  
 ידוע כי אילו היו שתי הקבוצות עובדות יחד כל הזמן,  
 הן היו מסיימות את סלילת כל הכביש ב־20 ימים. (הספק הקבוצות הוא קבוע).  
 מצא בכמה ימים יכולה כל קבוצה לסלול לבדה את כל הכביש.  
 (20)

3. (שאלון 006, קיץ ס"ז - 2007, מועד ב) ממלאים בריכה ריקה באמצעות שני צינורות, I ו-II.

כל צינור מזרים מים בקצב קבוע. כאשר צינור II פתוח הוא מזרים  $18 \text{ m}^3$  מים בדקה.  
 ביום ראשון, כאשר הבריכה היתה ריקה, פתחו את צינור I, וכעבור  $m$  דקות פתחו גם את צינור II.  
 כאשר הבריכה התמלאה, היתה כמות המים שהוזרמה דרך צינור I גדולה פי 2  
 מכמות המים שהוזרמה דרך צינור II. ( $m^3 - m^2$  מ"ק. להבדיל מ־ $m$  פרמטר לעיל. א.מ.)  
 למחרת רוקנו את הבריכה, וכאשר היא היתה שוב ריקה, פתחו את שני הצינורות בו־זמנית.  
 הבריכה התמלאה אז ב־12 דקות פחות מהזמן שבו התמלאה ביום ראשון.  
 א. הבע באמצעות  $m$  את: (1) כמות המים שצינור I מזרים בדקה.  
 (2) משך הזמן שבו התמלאה הבריכה ביום ראשון.

ב. מצא עבור אילו ערכי  $m$  יש פתרון לבעיה.  
 (21)

**השאלות**

1. I:  $18 \frac{2}{3} \text{ m}^3$ , II:  $14 \text{ m}^3$ , III:  $24 \text{ m}^3$ .

2. I:  $36 \text{ d}$ , II:  $45 \text{ d}$ .

3. א. (1)  $(\frac{3m}{2} - 18) \text{ m}^3/\text{min}$ . (2)  $\frac{24m}{36 - m} \text{ min}$ . ב.  $12 < m < 36$ .

3. נסמן:  $x$  - משך הזמן שברז I מילא את הבריכה ביום הראשון

$y$  - כמות המים שמזרים ברז I לבריכה מידי דקה

ברז	זמן	הספק לדקה	הספק כללי
I	$x$	$y$	$xy$
II	$x - m$	18	$18(x - m)$

ביום הראשון:

$$\Rightarrow (1) \quad xy = 2 \cdot 18(x - m)$$

I	$x - 12$	$y$	$y(x - 12)$
II	$x - 12$	18	$18(x - 12)$

ביום השני:

$$\Rightarrow (2) \quad xy + 18(x - m) = (x - 12)(y + 18)$$

**א. (1)**

$$(2) \quad xy + 18x - 18m = xy + 18x - 12y - 216$$

$$\Rightarrow 12y = 18m - 216 \Rightarrow y = \left(\frac{3m}{2} - 18\right) m^3/\text{min.}$$

**(2)**

$$(1) \quad xy = 36x - 36m \Rightarrow 36x - xy = 36m$$

$$\Rightarrow x = \frac{36m}{36 - y} = \frac{36m}{36 - \frac{3m}{2} - 18} = \frac{72m}{72 - 3m + 36} \Rightarrow x = \frac{24m}{36 - m} \text{ min.}$$

**ב.**

המגבלות: הזמן  $m$ , הזמן  $x$  וההספק  $y$  גדולים מ-0.

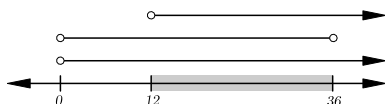
$$(1) \quad m > 0$$

$$(2) \quad x > 0 \Rightarrow \frac{24m}{36 - m} > 0 \quad \wedge \cdot (36 - m)^2 \Rightarrow 24m(36 - m) > 0$$

$$m_1 = 0, m_2 = 36, a_m = -24 < 0 \Rightarrow \overset{+}{\underbrace{\quad}_{0 \quad 36}} \Rightarrow 0 < m < 36$$

$$(3) \quad y > 0 \Rightarrow \frac{3m}{2} - 18 > 0 \Rightarrow \frac{3m}{2} > 18 \Rightarrow m > 12$$

(1)  $\cap$  (2)  $\cap$  (3):



$$\Rightarrow 12 < m < 36$$

מי שמנסה לעשות רושם - זה הרושם שהוא עושה

**סדרות - סדרה חשבונית - שאלות**

1. (005, חורף ס"ו - 2006) נתונה סדרה חשבונית שבה  $n = 3$  איברים.  
 האיבר הנמצא במקום ה-21 גדול ב-66 מהאיבר הנמצא במקום ה-10.  
 סכום  $n$  האיברים האחרונים בסדרה גדול פי 5 מסכום  $n$  האיברים הראשונים שבה.  
 מצא את ערכו של האיבר הראשון. (26)

2. (005, קיץ ס"ז - 2006, מועד א)  
 נתון כי סכום 30 האיברים הראשונים בסדרה חשבונית שווה לסכום 20 האיברים הראשונים שלה.  
 א. הראה כי סכום 50 האיברים הראשונים בסדרה הנתונה שווה לאפס.  
 ב. הסדרה הנתונה היא סדרה חשבונית עולה.  
 מצא באיזה מקום בסדרה נמצא האיבר החיובי הראשון. (26)

3. (005, קיץ ס"ז - 2006, מועד מיוחד)  
 נתונה סדרה חשבונית:  $\dots, 114, 117, 120$ .  
 א. מצא עבור אילו ערכים של  $n$ , סכום  $n$  האיברים בסדרה קטן מאפס.  
 ב. האיבר האחרון בסדרה הוא -357. כמה איברים שליליים יש בסדרה? (26)

4. (005, קיץ ס"ח - 2008, מועד א)  
 א. שני רוכבי אופניים, רוכב I ורוכב II, יצאו מיישוב A והגיעו ליישוב B.  
 רוכב I עבר בשעה הראשונה  $3 \text{ km}$ , ובכל שעה נוספת עבר  $0.2 \text{ km}$  יותר משעבר בשעה הקודמת.  
 רוכב II עבר בשעה הראשונה  $5.75 \text{ km}$  ובכל שעה נוספת -  $0.3 \text{ km}$  פחות משעבר בשעה הקודמת.  
 רוכב I רכב שעה אחת יותר מהזמן שרכב רוכב II.  
 מצא את המרחק בין יישוב A ליישוב B, אם ידוע כי כל רוכב רכב מספר שלם של שעות.  
 ב. רוכב III רכב מיישוב C והגיע ליישוב D, הנמצא במרחק  $72 \text{ km}$  מיישוב C.  
 בשעה הראשונה הוא רכב  $4.8 \text{ km}$ , ובכל שעה נוספת עבר מרחק הגדול פי 2 מהמרחק שעבר בשעה הקודמת. (הוא רכב מספר שלם של שעות).  
 כעבר כמה שעות הגיע רוכב III ליישוב D? (27)



3. א.  $n > 81$  ב. 119

1.  $a_1 = 3$

4. א.  $44 \text{ km}$  ב.  $4 \text{ hours}$

2. ב.  $n = 26$



סדרה חשבונית - פתרונות

.1

$$(I) a_{21} = a_{10} + 66$$

$$(II) S_{3n} - S_{2n} = 5 S_n$$

$$(I) a_1 + 20d = a_1 + 9d + 66 \Rightarrow 11d = 66 \Rightarrow \underline{d = 6}$$

$$(II) \frac{3n}{2}(2a_1 + 6(3n - 1)) - \frac{2n}{2}(2a_1 + 6(2n - 1)) = 5 \cdot \frac{n}{2}(2a_1 + 6(n - 1)) \quad / \cdot \frac{2}{n}$$

$$3(2a_1 + 18n - 6) - 2(2a_1 + 12n - 6) = 5(2a_1 + 6n - 6)$$

$$6a_1 + 54n - 18 - 4a_1 - 24n + 12 = 10a_1 + 30n - 30$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 6 = 10a_1 - 30 \Rightarrow -8a_1 = -24 \Rightarrow \underline{a_1 = 3}$$

.2 א.

$$S_{30} = S_{20} \Rightarrow \frac{30}{2}(2a_1 + 29d) = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d)$$

$$30a_1 + 435d = 20a_1 + 190d$$

$$10a_1 = -245d \Rightarrow a_1 = -24.5d$$

$$S_{50} = \frac{50}{2}(2a_1 + 49d) = 25(2 \cdot (-24.5d) + 49d) = 25(-49d + 49d) = 25 \cdot 0 \Rightarrow \underline{S_{50} = 0} \quad (\checkmark)$$

.3 ב.

$$a_i \nearrow \Rightarrow d > 0, a_n \stackrel{?}{>} 0$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1) = -24.5d + dn - d = dn - 25.5d = d(n - 25.5) > 0 \quad / : d_{(>0)}$$

$$\Rightarrow n - 25.5 > 0 \Rightarrow n > 25.5 \Rightarrow \underline{n = 26}$$

.3 א.

$$a_1 = 120, d = 117 - 120 = -3, S_n < 0$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \cdot 120 - 3(n - 1)) < 0 \quad / \cdot 2 \Rightarrow n(243 - 3n) < 0 \quad / : 3 \Rightarrow n(81 - n) < 0$$

$$a = -1 < 0, n_1 = 0, n_2 = 81 \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad n > 0 \Rightarrow \underline{n > 81}$$

.3 ב.

$$a_n = -357 = 120 - 3(n - 1) \Rightarrow 3(n - 1) = 477 \Rightarrow n - 1 = 159 \Rightarrow \underline{n = 160}$$

$$a_n < 0 \Rightarrow 120 - 3(n - 1) < 0 \Rightarrow -3(n - 1) < -120 \Rightarrow n - 1 > 40 \Rightarrow n > 41$$

$$\Rightarrow n = 42, 43, \dots, 159, 160 \Rightarrow N = 160 - 41 \Rightarrow \underline{N = 119}$$

**סדרה הנדסית - שאלות**

1. (005, חורף ס"ז - 2007)

נתונים שלושה מספרים שהם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מכפלתם היא 125. אם נוסף 1 לכל אחד משני המספרים הראשונים ונחסיר 7 מהמספר השלישי, יתקבלו שלושה מספרים שהם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית חדשה. מצא את שלושת המספרים (שני פתרונות).

(33)

2. (005, קיץ ס"ז - 2007, מועד ב מיוחד)

נתון כי  $a_1, a_2, a_3$  הם שלושה איברים ראשונים של סדרה הנדסית. נתון גם כי  $\frac{2}{a_3} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$  ו-  $a_7 = 32$ . חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה (מצא את כל האפשרויות).

(33)

3. (005, קיץ ס"ח - 2008, מועד ב) נתונה סדרה הנדסית:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

א. האיבר השלישי בסדרה  $a_n$  גדול ב-2 מהאיבר השני,

והאיבר הרביעי גדול פי 2 מהאיבר השלישי. מצא את  $a_1$ .

ב. נתונה סדרה הנדסית נוספת:  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$

משתי הסדרות בונים סדרה הנדסית חדשה:  $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$

מנת הסדרה החדשה היא 3, וסכום 10 האיברים הראשונים בסדרה החדשה הוא 7381.

(1) מצא את האיבר הראשון בסדרה החדשה, ומצא את  $b_1$ .

(2) מצא את מנת הסדרה  $b_n$ .

(3) מצא את  $n$ , שעבורו  $b_n = 4 \cdot \frac{8}{27}$ .

(34)

בסדרת פיבונאצ'י (ראה בגב הספר) יש אינסוף איברים שמסתיימים ב- $n$  (גדול ככל שיהיה) ספרות '9' !!!  
יש הוכחה לכך (מובאת בספרי 'מספרים מכושפים').  
למרות שאין אנו יכולים לדעת מהו האיבר ובאיזו מקום סידורי בסדרה הוא ממוקם.  
כך גם לגבי איברים המסתיימים ב- $n$  פעמים '0'.

**תשובות**

1. (1) 1, 5, 25 (2)  $-3\frac{4}{7}, 5, -7$

2. (1)  $S_{20} = 524, 287.5$  (2)  $S_{20} = 0$

3. א.  $a_1 = 1$  ב.  $a_1 = 4, b_1 = \frac{1}{4}$  (1) (2)  $q_{b_n} = \frac{2}{3}$  (3)  $n = 4$

**סדרה הנדסית - פתרונות**

**.1**

$$a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 = 125 \Rightarrow a_1^3 q^3 = (a_1 q)^3 = 125 = 5^3 \Rightarrow a_1 q = 5$$

$$a_1, a_1 q, a_1 q^2 \rightarrow a_1 + 1, a_1 q + 1, a_1 q^2 - 7$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 q^2 - 7}{a_1 q + 1} = \frac{a_1 q + 1}{a_1 + 1} \Rightarrow \frac{5q - 7}{5 + 1} = \frac{5 + 1}{a_1 + 1} \Rightarrow (5q - 7)(a_1 + 1) = 36$$

$$\Rightarrow 5a_1 q + 5q - 7a_1 - 7 = 36 \Rightarrow 5 \cdot 5 + 5q - 7a_1 - 7 = 36$$

$$\Rightarrow 7a_1 = 5q - 18 \Rightarrow a_1 = \frac{5q - 18}{7}$$

$$a_1 q = 5 \Rightarrow \frac{5q - 18}{7} \cdot q = 5 \Rightarrow (5q - 18) \cdot q = 35 \Rightarrow 5q^2 - 18q - 35 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{18 \pm 32}{10} = \frac{9 \pm 16}{5} \Rightarrow q_1 = 5 \Rightarrow (a_1)_1 = \frac{5 \cdot 5 - 18}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

$$q_2 = -\frac{7}{5} \Rightarrow (a_1)_2 = \frac{5 \cdot (-\frac{7}{5}) - 18}{7} = -\frac{25}{7} = -3\frac{4}{7}$$

$$(1) a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = 1 \cdot 5 = 5 \Rightarrow a_3 = 5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow \mathbf{1, 5, 25}$$

$$(2) a_1 = -\frac{25}{7} \Rightarrow a_2 = -\frac{25}{7} \cdot (-\frac{7}{5}) = 5 \Rightarrow a_3 = 5 \cdot (-\frac{7}{5}) = -7 \Rightarrow \mathbf{-3\frac{4}{7}, 5, -7}$$

**.2**

$$(I) \frac{2}{a_3} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \Rightarrow \frac{2}{a_1 q^2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 q} \quad / \cdot a_1 q^2 \Rightarrow 2 = q^2 - q$$

$$\Rightarrow q^2 - q - 2 = 0 \quad q_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow q_1 = 2, q_2 = -1$$

$$(II) a_7 = 32 \Rightarrow a_1 q^6 = 32 \Rightarrow a_1 = \frac{32}{q^6}$$

$$q_1 = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{32}{2^6} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{20} - 1}{2 - 1}$$

$$\Rightarrow (1) S_{20} = 524,287.5$$

$$q_2 = -1 \Rightarrow a_1 = \frac{32}{(-1)^6} = 32 \Rightarrow S_{20} = 32 \cdot \frac{(-1)^{20} - 1}{(-1) - 1} = \frac{32 \cdot (1 - 1)}{-2}$$

$$\Rightarrow (2) S_{20} = 0$$

325 הוא המספר הקטן ביותר הניתן להצגה בשלושה אופנים שונים כסכום של שני מספרים ריבועיים:

$$325 = 1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2 = 10^2 + 15^2$$

**סדרה הנדסית אינסופית - שאלות**

1. (005, קיץ ס"ה - 2005, מועד ב)

בסדרה הנדסית אינסופית סכום האיבר הראשון והאיבר החמישי הוא 5440. האיבר הראשון גדול מהאיבר הרביעי פי 8. מצא את: א. סכום הסדרה.

ב. סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה. (38)

2. (005, סתיו ס"ט - 2009, מועד לוחמים)

נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת  $a_1, a_2, a_3, \dots$ .

סכום האיברים בסדרה זו גדול פי 1.4

מסכום האיברים הנמצאים במקומות האיזוגיים באותה סדרה אינסופית.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. מאיברי הסדרה הנתונה  $a_1, a_2, a_3, \dots$  בונים שתי סדרות אינסופיות חדשות I ו-R:

$$I: a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots; \quad II: a_1^3, a_2^3, a_3^3, \dots$$

ידוע כי הסכום של איברי סדרה II גדול פי 35 מהסכום של איברי סדרה I.

מצא את הסכום של איברי הסדרה הנתונה  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . (38)

3. (006, חורף ס"ה - 2005)

נתונה סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה היא  $4q^2$  ( $0 < q < \frac{1}{2}$ ).

בין כל שני איברים בסדרה הנתונה הכניסו איבר נוסף,

ונוצרה סדרה הנדסית חדשה שכל איבריה חיוביים.

א. הבע באמצעות q את מנת הסדרה החדשה.

ב. נתון כי סכום הסדרה החדשה גדול פי  $48q^2$  מסכום הסדרה הנתונה. חשב את q.

ג. עבור הערך של q שמצאת בסעיף ב', חשב בסדרה החדשה את היחס

בין האיבר במקום הראשון ובין סכום האיברים שאחרי האיבר הראשון. (39)



1. א.  $S = 10,240$  ב.  $S = 3,413\frac{1}{3}$

2. א.  $q = 0.4$  ב.  $S = 65$

3. א.  $k = 2q$  ב.  $q = \frac{1}{6}$  ג. 2

סדרה הנדסית אינסופית - פתרונות

א. 1.

$$(I) a_1 + a_5 = 5440 \Rightarrow a_1 + a_1 q^4 = a_1(1 + q^4) = 5440$$

$$(II) a_1 = 4a_4 \Rightarrow a_1 = 8a_1 q^3 \Rightarrow^* q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (I) a_1(1 + \frac{1}{16}) = a_1 \cdot \frac{17}{16} = 5440 \Rightarrow a_1 = \frac{5440 \cdot 16}{17} = 5120$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5120}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5120}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 5120 \Rightarrow S_\infty = 10,240$$

(\*)  $a_1 \neq 0$  לכן ניתן לחלק בו את שני אגפי המשוואה.

ב.

$$A_1 = a_2 = a_1 q ; Q = q^2 \Rightarrow S = \frac{a_1 q}{1-q} = \frac{5120 \cdot \frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2560}{\frac{1}{2}} = \frac{2560 \cdot 4}{3} \Rightarrow S = 3413 \frac{1}{3}$$

א. 2. נסמן:  $S_O$  - סכום האיברים במקומות הלא-זוגיים (odd).

$$\frac{S}{S_O} = \frac{\frac{a_1}{1-q}}{\frac{a_1}{1-q^2}} = \frac{a_1(1-q^2)}{a_1(1-q)} = \frac{(1-q)(1+q)}{1-q} = 1+q = 1.4 \Rightarrow q = 0.4$$

ב.

$$q_I = \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = q^2 = 0.4^2 = 0.16$$

$$q_{II} = \frac{a_{n+1}^3}{a_n^3} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^3 = q^3 = 0.4^3 = 0.064$$

$$\frac{S_{II}}{S_I} = \frac{\frac{a_1^3}{1-0.064}}{\frac{a_1^2}{1-0.16}} = \frac{a_1^3 \cdot 0.84}{a_1^2 \cdot 0.936} = \frac{0.84 a_1}{0.936} = \frac{35}{39} a_1 = 35 \Rightarrow a_1 = 39$$

נתון

$$a_1 = 39 , q = 0.4 \Rightarrow S = \frac{39}{1-0.4} = \frac{39}{0.6} \Rightarrow S = 65$$

**לוטו חריג פעם ראשונה**

בשנת 2010 התקבלו בשתי הגרלות הלוטו בישראל 6 מספרים זהים בתוך פחות מחודש!

ב-21.9.2010 בהגרלה מספר 2187 עלו בגורל המספרים הבאים: 13, 14, 26, 32, 33, 36 והמספר הנוסף: 1.

ב-16.10.2010 בהגרלה מספר 2194 עלו בגורל המספרים הבאים: 13, 14, 26, 32, 33, 36 והמספר הנוסף: 2.

128 מהמרים שמו את כספם על ששה מספרים אלו.

3 מהם שניחשו נכון גם את המספר הנוסף וזכו ב-4,000,000 ש כל אחד.

92 מהם זכו ב-4,000 ש כל אחד, ו-33 מהם זכו ב-8,000 ש כל אחד.

**סדרות כלליות - שאלות**

1. (005, קיץ ס"ה - 2005, מועד א) נתונה סדרה המוגדרת לכל  $n$  טבעי על ידי הכלל:

$$T_n = 2 + 6 + 18 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} \quad \text{כאשר: } a_n = 5 \cdot 3^n + T_n + 1$$

א. מצא נוסחה ל- $a_n$  (הבע באמצעות  $n$  בלבד).

ב. מצא נוסחה לסכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה הנתונה. (44)

2. (005, קיץ ס"ט - 2009, מועד לוחמים) הסדרה  $a_n$  מוגדרת לכל  $n$  טבעי על ידי כלל הנסיגה:

$$a_1 = k, \quad a_{n+1} = (n+1)(a_n + 1)$$

א. הבע באמצעות  $k$  את האיברים  $a_2$  ו- $a_3$  של הסדרה  $a_n$ .

הסדרה  $b_n$ , המוגדרת לכל  $n$  טבעי על ידי  $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n+1}$ , היא סדרה חשבונית.

ב. מצא את: (1)  $b_1$  (2) הפרש הסדרה  $b_n$

ג. נתון כי סכום שלושת האיברים הראשונים של הסדרה  $a_n$  קטן ב-39

מסכום 11 האיברים הראשונים של הסדרה  $b_n$ . חשב את  $k$ . (44)

3. (005, חורף תש"ע - 2010, מועד לוחמים)

נתונה סדרה המקיימת לכל  $n$  טבעי:  $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n - 1}$ . נתון:  $a_1 + a_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_1 > 0$ .

א. (1) מצא את  $a_1$  ואת  $a_2$  בסדרה הנתונה (2) הראה כי  $a_3 = a_1$

ב. חשב את סכום 251 האיברים הראשונים בסדרה. (44)

4. (005, קיץ תש"ע - 2010, המבחן הגנז)

הסדרה:  $a_1, a_2, a_3, \dots$  מקיימת לכל  $n$  טבעי את כלל הנסיגה:  $a_{n+1} = 4 + 2n - a_n$

א. הוכח כי בסדרה מתקיים:  $a_{n+2} - a_n = 2$

ב. נתון:  $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100} = 2250$ . חשב את  $a_2$ . (45)

ג. חשב את סכום 100 האיברים הראשונים בסדרה הנתונה ( $a_1, a_2, a_3, \dots$ ).

**סלולות**

1. א.  $a_n = 6 \cdot 3^n$  ב.  $S_n = 9(3^n - 1)$

2. א.  $a_2 = 2k + 2, a_3 = 6k + 9$  ב.  $b_1 = 2$  (1)  $d_b = 1$  (2) ג.  $k = 3$

3. א. (1)  $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -1$  ב.  $S_{251} = -62$

4. א.  $a_2 = -4$  ב.  $S_{100} = 5200$  ג.

4. א.

$$a_{n+1} = 4 + 2n - a_n \Rightarrow a_{n+2} = 4 + 2(n+1) - a_{n+1} = 4 + 2n + 2 - (4 + 2n - a_n)$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = a_n + 2 \Rightarrow a_{n+2} - a_n = 2 \quad (\checkmark)$$

ב.

לפי סעיף א, הסדרה:  $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{100}$  היא חשבונית שבה:  $d = 2$  ו-  $n = 50$

$$\frac{50}{2}(2a_2 + 2 \cdot 49) = 2250 \quad / : 25 \Rightarrow 2a_2 + 98 = 90 \Rightarrow 2a_2 = -8 \Rightarrow a_2 = -4$$

ג.

$$a_2 = 4 + 2 \cdot 1 - a_1 = -4 \Rightarrow -a_1 = -10 \Rightarrow a_1 = 10$$

$$S_{100} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{99}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{100}) = \frac{50}{2}(2 \cdot 10 + 2 \cdot 49) + 2250$$

$$\Rightarrow S_{100} = 5200$$

5. א.

$$a_1 = 6, \quad a_{n+1} = 5n + 4 - a_n$$

$$a_{n+2} - a_n = (5(n+1) + 4 - a_{n+1}) - a_n = 5n + 5 + 4 - (5n + 4 - a_n) - a_n$$

$$= 5n + 9 - 5n - 4 + a_n - a_n \Rightarrow a_{n+2} - a_n = 5 \quad (\checkmark)$$

ב.

מסעיף א: האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית שהפרשה  $d = 5$ ,

$$a_1 = 6, \quad d = 5 \Rightarrow S_{15 \text{ odd}} = \frac{15}{2} \cdot (2 \cdot 6 + 5 \cdot 14) = \frac{15}{2} \cdot (12 + 70) \Rightarrow S_{15 \text{ odd}} = 615$$

ג.

מסעיף א: גם האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים סדרה חשבונית שהפרשה  $d = 5$ ,

$$a_2 = 5 \cdot 1 + 4 - a_1 = 9 - 6 = 3 \Rightarrow S_{15 \text{ even}} = \frac{15}{2} \cdot (2 \cdot 3 + 5 \cdot 14) = 570$$

$$S_{30} = S_{15 \text{ odd}} + S_{15 \text{ even}} = 615 + 570 \Rightarrow S_{30} = 1185$$

### בעיית אתגר - מה שאפס יכול לעשות

א. איך ניתן לקבל את המספר 6 משלושה אפסים בעזרת כל כלי מתמטי חוקי ?

שים לב: אין מדובר ב'טריק' מתחכם, כמו לחתוך במספריים חלק מ-0

ולהדביק אותו לחלק אחר . . . הפתרון הוא בכלים של מתמטיקה אמיתית!

זו עוד היתה השאלה הקלה. הנה זה שאלה:

ב. כיצד ניתן להגיע למספר 6 עם אפס אחד בלבד ! (יש לפחות ארבע דרכים שונות).

**הסתברות**

**שאלות** (כל השאלות בפרק הן משאלון 005).

1. (קיץ ס"ד - 2004, מועד א) בעיר מסוימת יש שני בתי ספר, בית ספר א, ובית ספר ב'.

55% מתלמידי שכבת י"ב בעיר למדו בתשס"ג בבית ספר א'.

75% מתלמידי שכבת י"ב בעיר היו זכאים לתעודת בגרות בשנה זו.

12% מתלמידי שכבת י"ב בעיר, גם לא היו זכאים לתעודת בגרות בשנה זו, וגם למדו בבית ספר א'.

א. בוחרים באקראי תלמיד מבין תלמידי שכבה י"ב בבית ספר א'.

מהי ההסתברות שהוא זכאי לתעודת בגרות?

ב. בוחרים באקראי תלמיד מבין תלמידי שכבה י"ב בעיר שאינם זכאים לתעודת בגרות.

מהי ההסתברות שהוא לומד בבית ספר ב ? (67)

2. (קיץ ס"ד - 2004, מועד ב) אם בוחרים באקראי תושב מעיר מסוימת, ההסתברות שעיניו כחולות היא 0.3.

אם בוחרים באקראי תושב מבין בעלי העיניים הכחולות באותה עיר, ההסתברות ששיערו שחור

היא 0.6. ידוע כי ל-0.65 מתושבי העיר יש לפחות אחת משתי תכונות אלה.

א. בוחרים באקראי תושב מהעיר.

(1) מהי ההסתברות שעיניו כחולות וגם שיערו שחור?

(2) מהי ההסתברות ששיערו שחור?

ב. בוחרים באקראי תושב מבין בעלי השיער השחור בעיר. מהי ההסתברות שעיניו אינן כחולות?

(67)

3. (חורף ס"ה - 2005) בעיר מסוימת חלק מהתושבים, צעירים ומבוגרים, תומכים בבניית גורדי שחקים,

והשאר מתנגדים לבנייתם. אם בוחרים באקראי תושב מהעיר, ההסתברות שהוא מתנגד לבניה היא 0.6.

20% מבין התומכים בבניה הם צעירים.

ההסתברות לבחור באקראי תומך בבניה שהוא גם מבוגר, גדולה פי 4 מההסתברות לבחור באקראי

מתנגד לבניה שהוא גם צעיר.

א. מהי ההסתברות לבחור באקראי תושב צעיר מבין תושבי העיר?

ב. בוחרים באקראי תושב מבין הצעירים בעיר. מהי ההסתברות שהוא תומך בבניה?

ג. בוחרים באקראי תושב מהעיר.

מהי ההסתברות שהוא תושב מבוגר או תושב (מבוגר או צעיר) המתנגד לבניה? (68)

**תשובות**

3. א. 0.16 ב. 0.5 ג. 0.92

1. א. 0.78 ב. 0.52

2. א. (1) 0.18 (2) 0.53 ב. 0.6604



38. (005, קיץ תשע"ב - 2012, מועד ב)

בשכבה י' בבית ספר מסוים יש שלוש כיתות:  $1/3$ ,  $2/3$ ,  $1/3$ .  
בכל כיתה יש 20 בנים ו-12 בנות.

א. מוציאים באקראי 3 תלמידים מכיתה  $1/3$  בזה אחר זה. תלמיד שהוצא אינו חוזר לכיתה.  
מהי ההסתברות להוציא 3 בנים?

ב. אחרי ששלושת התלמידים שהוצאו חזרו לכיתה שלהם,

הוציאו באקראי תלמיד אחד מכיתה  $1/3$ , תלמיד אחד מכיתה  $2/3$  ותלמיד אחד מכיתה  $1/3$ .

(1) מהי ההסתברות להוציא לפחות 2 בנים?

(2) ידוע שהוציאו לפחות 2 בנים. מהי ההסתברות שלא כל השלושה שהוצאו היו בנים?

39. (005, קיץ תשע"ב - 2012, לוחמים)

יוסי נוסע מביתו לעבודה. מסלול הנסיעה שלו עובר בשני כבישים:

תחילה בכביש A ואחריו בכביש B. ההסתברות שיהיה פקק תנועה בכביש A היא 0.6.

ההסתברות שיהיה פקק תנועה בכביש B היא  $\frac{4}{5}$ .

כאשר יש פקק תנועה בכביש B, ההסתברות שגם בכביש A יש פקק תנועה היא  $\frac{3}{4}$ .

א. קבע עבור כל אחד מההיגדים (1)-(3) שלפניך אם הוא נכון או לא נכון. נמק כל קביעה.

(1) אם כביש A פקוק, אז גם כביש B פקוק.

(2) אם כביש B אינו פקוק, ההסתברות שכביש A אינו פקוק היא  $\frac{1}{2}$ .

(3) ההסתברות שכביש B אינו פקוק אם כביש A אינו פקוק, (87)

שווה להסתברות שכביש A אינו פקוק אם כביש B אינו פקוק.

ב. יוסי נוסע לעבודה בימים א, ב, ג, ד, ה. מהי ההסתברות שיוסי ייקלע לפקק תנועה

בימים א, ב, ג, ולא ייקלע לפקק תנועה בימים ד ו-ה?

המספר האסטרונומי:  $10^{33}$  הינו המספר הגדול ביותר שניתן להצגה ככפולה של שני גורמים

שאף לא אחד מהם מכיל את הספרה '0':

$$10^{33} = 2^{33} \times 5^{33} = 8,589,934,592 \times 116,415,321,826,934,814,453,125$$

תשובות

38. א.  $P = \frac{57}{248} = 0.2298$  ב.  $P = \frac{175}{256} = 0.6836$  (1) ג.  $P = \frac{9}{14}$  (2)

39. א. (1) כן (2) לא (3) לא ב.  $P = 0.02048$

**הסתברות - פתרונות**

1. הגדרת מאורעות: A - למד בבי"ס א', B - היה זכאי לתעודת בגרות

ואז:

$\Sigma$	$\bar{A}$	A	
<u>0.75</u>	$0.45 - 0.13 = 0.32$	$0.55 - 0.12 = 0.43$	B
$1 - 0.75 = 0.25$	$0.25 - 0.12 = 0.13$	<u>0.12</u>	$\bar{B}$
1	$1 - 0.55 = 0.45$	<u>0.55</u>	$\Sigma$

בדיקה:  $0.32 + 0.43 = 0.75$  (✓)

א. הסתברות שתלמיד זכאי לבגרות, כשידוע כי הוא מבי"ס א':

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.43}{0.55} = 0.78$$

ב. הסתברות שתלמיד לומד בבי"ס ב', כשידוע כי הוא אינו זכאי לבגרות:

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.13}{0.25} = 0.52$$

2. הגדרת מאורעות: A - בעל עיניים כחולות, B - בעל שיער שחור

$$P(A) = 0.3, P(B/A) = 0.6, P(A \cup B) = 0.65$$

(1)  $P(A \cap B) = ?$ , (2)  $P(B) = ?$

$$P(A \cup B) = 0.65 = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.65 = 0.35$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{0.3} = 0.6 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.18$$

$\Sigma$	$\bar{A}$	A	
$0.18 + 0.35 = \underline{0.53}$	$0.7 - 0.35 = \underline{0.35}$	0.18	B
$1 - 0.53 = \underline{0.47}$	0.35	$0.3 - 0.18 = \underline{0.12}$	$\bar{B}$
1	$1 - 0.3 = \underline{0.7}$	0.3	$\Sigma$

א.

(1)  $P(A \cap B) = 0.18$ , (2)  $P(B) = 0.53$

ב.

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0.35}{0.53} \Rightarrow P(\bar{A}/B) = 0.6604$$

39. הגדרת מאורעות: A - כביש A פקוק, B - כביש B פקוק

(1)  $P(A) = 0.6$  , (2)  $P(B) = 0.8$  ,  $P(A/B) = 0.75$

	A	$\bar{A}$	$\Sigma$
B	(3) 0.6	$0.8 - 0.6 = 0.2$	(2) 0.8
$\bar{B}$	$0.6 - 0.6 = 0$	$0.4 - 0.2 = 0.2$	$1 - 0.8 = 0.2$
$\Sigma$	(1) 0.6	$1 - 0.6 = 0.4$	1

(3)  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0.8} = 0.75 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.75 \cdot 0.8 = 0.6$

(1) א.

$P(B/A) \stackrel{?}{=} 1$  ,  $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.6}{0.6} = 1 \Rightarrow \checkmark$  ב.

(2)

$P(\bar{A}/\bar{B}) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}$  ,  $P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.2}{0.2} = 1 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \times$  לא

(3)

$P(\bar{B}/\bar{A}) \stackrel{?}{=} P(\bar{A}/\bar{B})$  ,  $P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}$  ,  $P(\bar{A}/\bar{B}) = 1 \Rightarrow \times$  לא

ב.

ההסתברות להיקלעות לפקוק היא:  $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.2 = 0.8$  . לכן:

$P = 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \Rightarrow P = 0.02048$

40. א. הגדרת מאורעות: A - לומד בקורס הכנה, B - מצליח

$P = P(\bar{B}/A) \cdot P(\bar{B}/\bar{A}) \cdot P(B/A) = 0.25 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \Rightarrow P = \frac{3}{64}$

ב.

	A	$\bar{A}$	$\Sigma$
B	$0.15^{(1)}$	$0.4^{(2)}$	$0.15 + 0.4 = 0.55$
$\bar{B}$	$0.2 - 0.15 = 0.05$	$0.8 - 0.4 = 0.4$	$1 - 0.55 = 0.45$
$\Sigma$	0.2	$1 - 0.2 = 0.8$	1

(1)  $P(B/A) = 0.75 \Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{0.2} = 0.75 \Rightarrow P(B \cap A) = 0.15$

(2)  $P(B/\bar{A}) = 0.5 \Rightarrow \frac{P(B \cap \bar{A})}{0.8} = 0.5 \Rightarrow P(B \cap \bar{A}) = 0.4$

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.55} \Rightarrow P = \frac{3}{11}$

ג.

$P = P(\bar{B}/\bar{A}) \cdot P(\bar{B}/A) \cdot P(B/A) = \frac{0.4}{0.8} \cdot \frac{0.05}{0.2} \cdot \frac{0.15}{0.2} \Rightarrow P = \frac{3}{32}$

**גאומטריה אוקלידית - א - פרופורציה ללא מעגל**

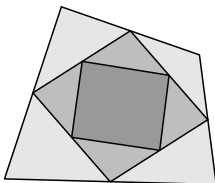
לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות. המספרים המצויינים הם מספרי השאלות שבפרק זה. שאלות עם כוכביות ניתן לפותרן גם בכלים טריגונומטרים. שאלות עם קו נטוי - מתייחסות למבחנים. דוגמה:  $3/4$  - מבחן מס' 3 שאלה מספר 4. את החלוקה הכין שרון חיים.

קטעים מיוחדים ונקודות מפגש	משולשים
- אנך אמצעי	- חפיפה
4/4	6, 7, $1/5$ , $11/5$
- קטע אמצעים במשולש	- משפט פיתגורס
16	2, 4, 6, $2/4$
- תיכון ליתר	<b>מרובעים</b>
17	- דלתון
- מפגש תיכונים במשולש	$1/5$
4, 5, $2/4$ , $9/5^*$	- מקבילית
<b>שטחים</b>	11, 14, 17, $11/5$
1, 11, 12, 14	- מלבן
<b>פרופורציה</b>	$2/4$
- תאלס	- ריבוע
1, 3, 7, 9, 12, 13, 16, $1/5$ , $9/5^*$ , $10/4$ , $13/4$	2, 6, 7
- משפט חוצה-זווית במשולש	- טרפז
4, 8, 9, 15, 16, $5/4$ , $9/5^*$	1, 3, 8, 13, 17
- דמיון משולשים	- טרפז שווה-שוקיים
1, 2, 5, 6, 8, 10, 11, 14, 15, 17, $5/4$	4, $5/4$
- יחס שטחי משולשים דומים	
8, 17, $8/4$	
- יחס היקפי משולשים דומים	
10	
- משפט דמיון צלע-זווית-צלע	
2, 3, 5, $6/4$	

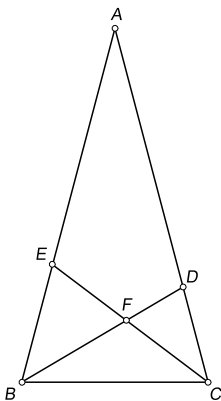
בן כמה אמרת שקוראים לך ?



**מרובע, מקבילית ומלבן**



אם נחבר בעקביות אמצעי צלעות של מרובע קמור כלשהו נקבל מקבילית.  
אם נחבר אמצעי מקבילית נקבל מלבן.  
מכאן אפשר להמשיך ולקבל לסדרוגין מקבילית ומלבן עד אינסוף.



10. (חורף תש"ע - 2010, מועד לוחמים)

במשולש שווה-שוקיים  $ABC$  ( $AB = AC$ ) הוא חוצה-זווית  $CE$ .

$D$  היא נקודה על  $AC$  כך ש-  $BD = BC$ .

$BD$  ו-  $CE$  נחתכים בנקודה  $F$ .

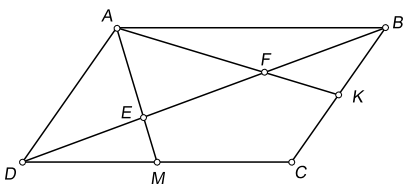
א. הוכח:  $\triangle AEC \sim \triangle BFC$ .

נתון גם:  $AC = 4a$ ,  $BC = 2a$ .

ב. חשב את היחס בין היקף המשולש  $AEC$

ובין היקף המשולש  $BFC$ .

ג. הוכח כי  $BF$  הוא תיכון לצלע  $EC$  במשולש  $BEC$ . (101)



11. (קיץ תש"ע - 2010, מועד א) במקבילית  $ABCD$

הנקודה  $M$  היא אמצע הצלע  $DC$ ,

והנקודה  $K$  היא אמצע הצלע  $BC$ .

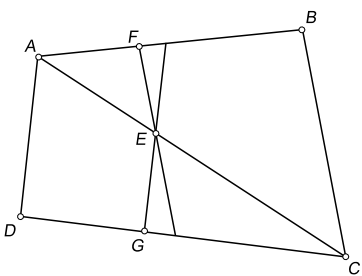
$AM$  ו-  $BK$  חותכים את האלכסון  $DB$  בנקודות

$E$  ו-  $F$  בהתאמה.

א. (1) הוכח:  $\frac{DE}{EB} = \frac{DM}{AB}$  (2) מצא את היחס:  $\frac{DE}{EB}$ . נמק. (102)

ב. הוכח:  $\frac{FB}{DF} = \frac{1}{2}$ .

ג. נתון כי שטח המשולש  $MED$  הוא 8 סמ"ר. חשב את שטח המשולש  $AED$ . נמק.



12. (קיץ תש"ע - 2010, מועד ב)

במרובע  $ABCD$  נקודה  $E$  נמצאת על האלכסון  $AC$ .

דרך נקודה  $E$  מעבירים שני ישרים:

ישר המקביל לצלע  $BC$  וחותך את  $AB$  בנקודה  $F$ ,

וישר המקביל לצלע  $AD$  וחותך את  $DC$  בנקודה  $G$ .

א. הוכח: (1)  $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AC}$  (2)  $\frac{EF}{BC} + \frac{EG}{AD} = 1$ .

ב. נתון:  $\frac{EF}{BC} = \frac{2}{5}$ .

(1) מצא את היחס  $\frac{GC}{DG}$ .

(2) מהו היחס בין שטח המשולש  $AGC$  לשטח המשולש  $ADG$ ? נמק. (103)

תשובות

11. א. (2)  $\frac{DE}{EB} = \frac{1}{2}$  ג.  $S_{AED} = 16 \text{ cm}^2$

10. ב. 2

12. ב. (1) 1.5 (2) 1.5

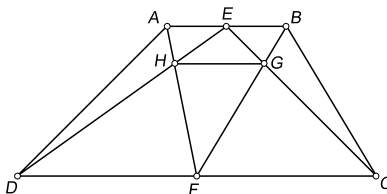
(1)  $AE = EB = \frac{8}{2} = 4$  ,  $DF = FC = \frac{24}{2} = 12$

א. 3

(2)  $EB \parallel FC \Rightarrow^{(3)} \frac{EG}{GC} = \frac{BG}{GF}$

(4)  $\angle AHE = \angle FHD \Rightarrow^{(5)} \triangle EBG \sim \triangle CFG$

(5)  $\frac{EG}{CG} = \frac{EB}{CF} = \frac{4}{12} \Rightarrow \frac{EG}{CG} = \frac{1}{3}$



ב.

(6)  $\frac{EH}{HD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EH}{HD} = \frac{EG}{CG} \Rightarrow^{(7)} HG \parallel CD (\checkmark)$

ג.

$\frac{EH}{HD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EH}{ED} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

(5)  $\triangle EHG \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{HG}{DC} = \frac{EH}{ED} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{HG}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow HG = 6\text{cm}$

(1) נתון (2) הגדרת טרפז (3) משפט תאלס המורחב (4) זוויות קודקודיות שוות זו לזו

(5) משפט דמיון צ.ז.צ. (6) כמו ההוכחה שבסעיף א' (7) משפט תאלס הפוך

א. 4. בניית עזר:  $AF \parallel BC$  לכן: ABCF מקבילית לפי הגדרה.

(1)  $AF = BC = a$  ,  $FC = AB = a \Rightarrow DF = 2a - a = a$

$AD = DF = AF = a \Rightarrow^{(2)} \angle ADF = 60^\circ \Rightarrow^{(3)} \angle BAD = 120^\circ$

(4)  $AD = AB \Rightarrow^{(5)} \angle ADB = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle PDF = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ \Rightarrow \triangle ADF$  חוצה זווית ב'  $DP \Rightarrow^{(6)} \triangle ADF$  תיכון ב'  $DP$

(4)  $AH \perp DF \Rightarrow^{(6)} DH = HF \Rightarrow^{(7)} \frac{AE}{EH} = 2$

אפשר גם: הוכח:  $DH = \frac{a}{2}$  ,  $DE$  חוצה זווית ב'  $\triangle ADH$ . הפעל את משפט חוצה הזווית ב'  $\triangle ADH$ .

ב.

$\triangle ADH$ :  $DH = \frac{a}{2} \Rightarrow^{(8)} AH = \sqrt{AD^2 - HD^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

(7)  $AE = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$  (יחידות אורך)

(1) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו (2) זווית במשולש שווה-צלעות ( $\triangle ADF$ ) היא בת  $60^\circ$

(3) השלמה ל-  $180^\circ$  של זוויות על שוק בטרפז (4) נתון (5) זוויות בסיס במש"ש שוות זו לזו

(6) במשולש שווה-צלעות חוצה הזווית, הגובה והתיכון מתלכדים

(7) מפגש תיכונים במשולש מחלקת אותם ביחס של 2:1 כשהחלק הגדול קרוב לקודקוד

(8) משפט פיתגורס

**גאומטריה אוקלידית - ב - מעגל ללא פרופורציה**

לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות. המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה. כל השאלות שאין מצוין אחרת - נלקחו משאלון 005. שאלות עם כוכביות ניתן לפותרן גם בכלים טריגונומטריים. שאלות עם קו נטוי - מתייחסות למבחנים. דוגמה:  $3/4$  - מבחן מס' 3 שאלה מספר 4. את החלוקה הכין שרון חיים.

משולשים	קטעים מיוחדים ונקודות מפגש
- חפיפה	- תיכון ליתר
- משולש שווה-צלעות	5/5
- משפט פיתגורס	14/4
<b>מרובעים</b>	<b>מעגל</b>
- דלתון	- משולש חסום במעגל
- מקבילית	5, 1/4, 4/5, 13/5
- ריבוע	- משולש חוסם מעגל
- טרפז שווה-שוקיים	7/5*
<b>שטחים</b>	- מרובע חסום במעגל
	1, 5, 6, 14/4, 20/4
	- שני מעגלים
	3, 6, 20/4
	- קטע מרכזים
	5/5
	- מפגש חוצי-זוויות במשולש
	7/5*

$$\sqrt{41 - 5} = 6$$

$$\sqrt{4411 - 55} = 66$$

$$\sqrt{444111 - 555} = 666$$

$$\sqrt{44441111 - 5555} = 6666$$

$$\sqrt{4444411111 - 55555} = 66666$$

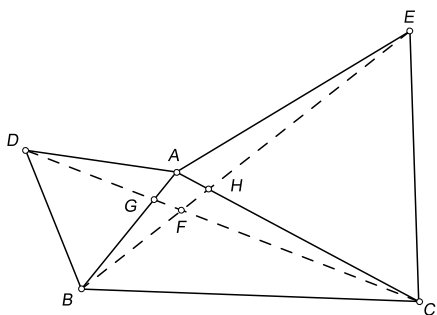
$$\sqrt{444444111111 - 555555} = 666666$$

$$\sqrt{44444441111111 - 5555555} = 6666666$$

$$\sqrt{4444444411111111 - 55555555} = 66666666$$

⋮

**גאומטריה אוקלידית - ב - מעגל ללא פרופורציה - שאלות**



1.1 (005, קיץ ס"ז - 2007, מועד א)

על הצלעות AB ו-AC של המשולש ABC

בנו משולשים שווים-צלעות: ACE ו-ABD.

א. הוכח:  $BE = DC$ .

BE חותך את הצלע AC בנקודה H.

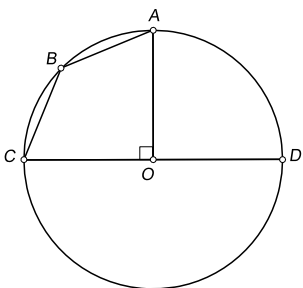
DC חותך את הצלע AB בנקודה G.

BE ו-DC נפגשים בנקודה F.

ב. מצא את גודל הזווית GFB. נמק. הנחיה: סמן:  $\angle ADG = \beta$ .

ג. מה צריך להיות גודל הזווית BAC,

(110) כדי שיהיה אפשר לחסום במעגל את המרובע AHFG? נמק.



1.2 (005, קיץ ס"ח - 2008, מועד א)

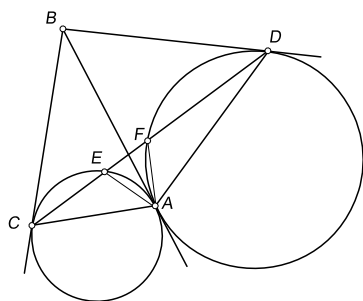
במעגל שמרכזו O הרדיוס AO מאונך לקוטר CD.

א. מצא את גודל הזווית ABC. נמק.

נתון גם כי  $\angle BCA = \angle BAC$ .

ב. הוכח כי  $BO \perp AC$ .

ג. BO ו-AC נחתכים בנקודה M. הוכח כי  $CM = OM$ . (111)



1.3 (005, קיץ ס"ח - 2008, מועד ב)

נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה A.

AB הוא המשיק המשותף לשני המעגלים.

BC משיק למעגל אחד בנקודה C,

ו-BD משיק למעגל האחר בנקודה D.

CD חותך מעגל אחד בנקודה E, ואת המעגל האחר בנקודה F.

הוכח: א.  $BC = BD$

ב.  $\angle CAE = \angle FAD$

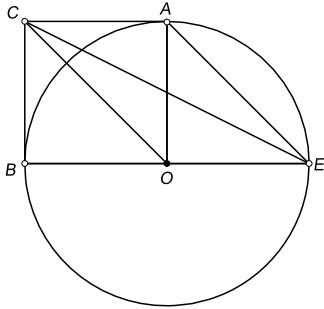
(111) ג. אם שני המעגלים בעלי רדיוסים שווים, אז  $CE = FD$ .



2. א.  $\angle ABC = 135^\circ$

1. ב.  $60^\circ$  ג.  $60^\circ$





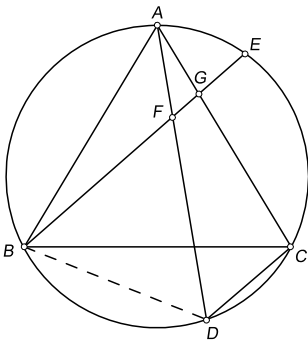
4. (005, אביב ס"ח - 2008, לוחמים)

BE הוא קוטר מעגל שמרכזו O.  
CA ו- CB הם שני משיקים למעגל המאונכים זה לזה.

הוכח: א. המרובע ACBO הוא ריבוע

ב.  $\angle AEC = \angle OCE$

ג. נתון:  $S_{\triangle ACE} = 32 \text{ cm}^2$ . חשב את רדיוס המעגל. (112)



5. (005, קיץ תש"ע - 2010, לוחמים)

ABC הוא משולש שווה-צלעות החסום במעגל.

D היא נקודה על הקשת  $\widehat{BC}$ , ו- E היא נקודה

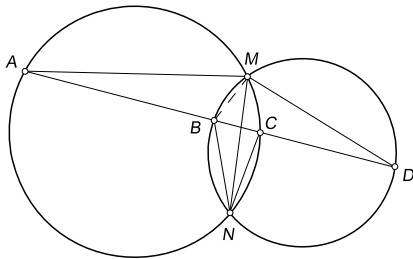
על הקשת  $\widehat{AC}$  כך ש- DC מקביל ל- BE.

BE חותך את AD בנקודה F ואת AC בנקודה G.

א. הוכח:  $\angle ADC = 60^\circ$ .

ב. הוכח: המשולש BFD הוא שווה-צלעות.

ג. הוכח שלא קיים מעגל העובר דרך קדקודי המרובע BGCD. (112)



6. (804, קיץ תש"ע, מועד א)

שני מעגלים נחתכים בנקודות M ו- N.

ישר חותך את שני המעגלים בנקודות

A, B, C ו- D.  $\angle BNC = \alpha$ ,  $\angle BNM = \beta$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו-  $\beta$  (במידת הצורך) את:

(1)  $\angle MDB$ . נמק (2)  $\angle MAC$ . נמק (3)  $\angle AMD$

ב. האם המרובע AMDN הוא בר-חסימה במעגל? נמק. (113)



שתיית תה ירוק מונעת שבץ. גם המשפט ההפוך נכון: שבץ מונע שתיית תה ירוק...

תשובות

4. ג.  $R = 8 \text{ cm}$

6. א. (1)  $\angle MDB = \beta$  (2)  $\angle MAC = \alpha - \beta$  (3)  $\angle AMD = 180^\circ - \alpha$ . ב. לא

**גאומטריה אוקלידית - ב - מעגל ללא פרופורציה - פתרונות**

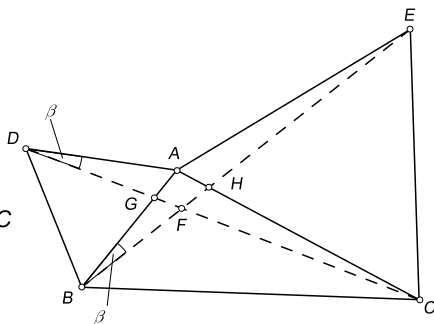
1. א.

$\triangle ADC \cong \triangle ABE$ : (1)  $AD = AB$  ,  $AC = AE$

(2)  $\angle DAC = 60^\circ + \angle BAC$

$\angle BAE = 60^\circ + \angle BAC \Rightarrow \angle DAC = \angle BAC$

$\Rightarrow$  (3)  $\triangle ADC \cong \triangle ABE \Rightarrow$  (4)  $BE = DC$  (✓)



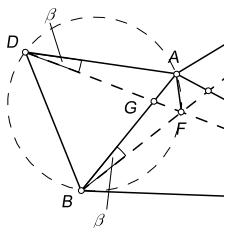
ב.

(5)  $\triangle ADC \cong \triangle ABE \Rightarrow$  (6)  $\angle ADC = \angle ABE = \beta$

$\triangle DFB$ : (2)  $\angle FDB = 60^\circ - \beta$  ,  $\angle FBD = 60^\circ + \beta$

(7)  $\angle BFD = 180^\circ - (60^\circ - \beta) - (60^\circ + \beta) = 60^\circ \Rightarrow \angle GFB = 60^\circ$

דרך נוספת: הקטע AF נראה משתי הנקודות B ו- D באותה זווית ( $\beta$ ). לכן הנקודות A, F, D נמצאות על מעגל אחד. משפט זה אינו נכלל בחומר הלימוד.



(8)  $\angle BFD = \angle BAD =$  (2)  $60^\circ \Rightarrow \angle GFB = 60^\circ$

ג.

(5)  $\angle GFB = 60^\circ \Rightarrow$  (9)  $\angle GFH = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

(10)  $\angle GAF = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ$

- (1) נתון (משולשים שווי-צלעות) (2) זווית במשולש שווה צלעות היא  $60^\circ$   
 (3) משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (4) צלעות מתאימות במשולשים חופפים (5) מסעיף קודם  
 (6) זוויות מתאימות במשולשים חופפים (7) השלמה ל-  $180^\circ$  במשולש (8) זוויות היקפיות במעגל  
 הנשענות על אותו מיתר - שוות זו לזו (9) זוויות צמודות משלימות ל-  $180^\circ$   
 (10) מרובע ניתן לחסימה במעגל אם ורק אם זוויותיו הנגדיות משלימות ל-  $180^\circ$

אמרה חסידית

העבר - אין . העתיד - ענין . ההווה - כהרף עין . דאגה, אם-כן - מנין ?

**גאומטריה אוקלידית - ג - פרופורציה עם מעגל**

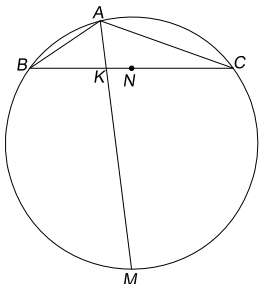
לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות. המספרים המצויינים הם מספרי השאלות שבפרק זה. שאלות עם כוכביות ניתן לפותרן גם בכלים טריגונומטרים. שאלות עם קו נטוי - מתייחסות למבחינים. דוגמה:  $3/4$  - מבחן מס' 3 שאלה מספר 4. את החלוקה הכין שרון חיים.

פרופורציה	משולשים
- משפט תאלס	- חפיפה
$1/5, 12/5^*, 14/5, 18/4$	$5, 18, 2/5, 3/4, 6/5, 7/4$
- משפט חוצה-זווית במשולש	- משולש שווה-צלעות
$1, 7, 11$	5
- פרופורציה במעגל	- משולש $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$
$7, 17, 18, 19, 2/5, 7/4, 9/4, 17/4$	$10, 23/4$
- דמיון	- משפט פיתגורס
$2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 3/4, 4/5_{b,c}, 6/5, 10/5, 11/4, 15/5^*, 19/4, 22/4, 23/4$	$3, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 16, 19, 10/5, 12/5^*, 14/5$
- יחס דמיון שטחים	<b>מרובעים</b>
$9, 14, 3/4, 15/5^*, 19/4$	- מלבן
<b>מעגל</b>	- מקבילית
- מפגש חוצי-זוויות	$24/1$
$7/5^*$	- ריבוע
- משולש חסום במעגל	$3, 6/5$
$1, 2, 4, 8, 9, 11, 12, 4/5_{b,c}$	- טרפז
- מרובע חסום במעגל	$10, 17$
$10, 17, 3/4, 6/5, 12/4, 12/5^*, 15/5^*, 17/4, 19/4, 21/4_b, 23/4$	- טרפז שווה-שוקיים
- שני מעגלים	$1/5$
$14, 19, 5/5, 12/4, 18/4$	- קטע אמצעים במשולש
- יחס דמיון שטחים	4
$23/4$	- מפגש תיכונים במשולש
	$17/4$
	<b>שטחים</b>
	$19, 9/4$

**האריה של ברנולי**

פעם פרסם **דניאל ברנולי** (Daniel Bernoulli, 1700-1782) בעיה מתמטית והקציב לפתרונה חצי שנה. לבקשתו של המתמטיקאי **לייבניץ** (Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646-1716) הוסיף ברנולי עוד חצי שנה לפתרונה. ניוטון פתר את הבעיה בתוך שעות ספורות. כשהתפרסם פתרונו בעילום שם, אמר ברנולי כי רק ניוטון יכול היה לפתור בעיה זו, והוסיף משפט פרגון יפהפה: **'מוזה אני את האריה לפי טביעת כף רגלו...'**

גאומטריה אוקלידית - ג - פרופורציה עם מעגל - שאלות



(121)

1. (קיץ ס"ד - 2004, מועד א)

משולש ABC חסום במעגל.

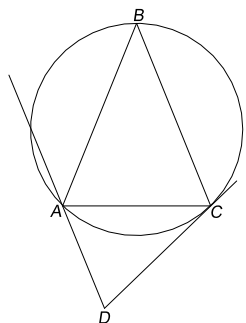
הנקודה M היא אמצע הקשת  $\widehat{BC}$ .

הקטע AM חותך את הצלע BC בנקודה K.

הנקודה N היא אמצע הצלע BC.

נתון:  $AB = 40\text{cm}$ ,  $AC = 50\text{cm}$ ,  $BC = 72\text{cm}$ .

חשב את אורך הקטע KN.



(121)

2. (קיץ ס"ד - 2004, מועד ב)

משולש שווה-שוקים ABC ( $BA = BC$ )

חסום במעגל. דרך הקודקוד C עובר משיק למעגל.

דרך הקודקוד A עובר ישר המקביל לצלע BC,

וחותך את המשיק בנקודה D.

נתון:  $AB = 16\text{cm}$ ,  $AD = 9\text{cm}$ .

חשב את היקף המשולש ACD.

3. (חורף ס"ז - 2006)

במשולש ישר-זווית ABC ( $\angle C = 90^\circ$ )

חסום חצי מעגל שמרכזו O.

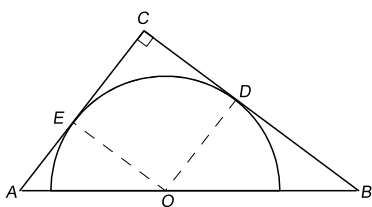
המעגל משיק לצלעות AC ו-BC

בנקודות E ו-D בהתאמה.

א. הוכח כי המרובע CDOE הוא ריבוע.

ב. נתון:  $R = 4.8\text{cm}$  (רדיוס חצי המעגל),  $BD = 6.4\text{cm}$ .

חשב את אורך הצלע AB.



(122)

27 הספרות הראשונות של  $\pi$ , עם 26 הספרות הראשונות שלו מהסוף להתחלה,

יוצרות מספר פלינדרומי ראשוני:

31, 415, 926, 535, 897, 932, 384, 626, 433, 833, 462, 648, 323, 979, 853, 562, 951, 413

**תשובות**

3. ב.  $AB = 14\text{cm}$

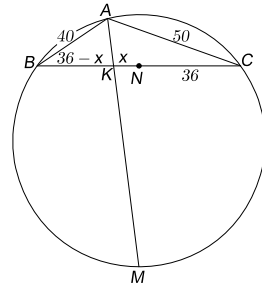
2.  $33\text{cm}$

1.  $KN = 4\text{cm}$

גאומטריה אוקלידית - ג - פרופורציה עם מעגל - פתרונות

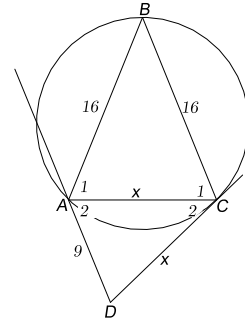
.1

- (1)  $BC = 72\text{cm} \Rightarrow BN = \overset{(1)}{36} \quad NC = 36\text{cm}$
- (2)  $KN = x \Rightarrow BK = 36 - x, \quad KC = 36 + x$
- (3)  $\angle BAM = \angle MAC$
- (4)  $\frac{36-x}{36+x} = \frac{40}{50} \quad / \cdot 5(36+x)$
- $\Rightarrow 180 - 5x = 144 + 4x \Rightarrow 9x = 36 \Rightarrow x = 4\text{cm}$



.2

- (1)  $AD \parallel BC \Rightarrow \overset{(5)}{\angle A_2 = \angle C_1}, \quad (6) \angle B = \angle C_2$
- (1)  $BA = BC \Rightarrow \overset{(7)}{\angle A_1 = \angle A_2}$
- (8)  $\angle D = \angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow \overset{(9)}{CA = CD} = \overset{(2)}{x}$
- (10)  $\triangle BAC \sim \triangle CAD \Rightarrow \overset{(11)}{\frac{BA}{CA} = \frac{AC}{AD}} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{x}{9} \quad / \cdot 9x$
- $\Rightarrow x^2 = 9 \cdot 16 \Rightarrow x = 12\text{cm}$



$\Rightarrow AC + CD + AD = 12\text{cm} + 12\text{cm} + 9\text{cm} = 33\text{cm}$

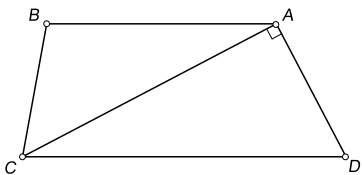
- (1) נתון (2) סימון (3) זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות - שוות זו לזו
- (4) משפט חוצה-זווית במשולש
- (5) זוויות מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי, שוות זו לזו
- (6) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על המיתר מצידו האחר
- (7) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים, שוות זו לזו
- (8) השלמה ל- $180^\circ$  במשולשים BAC ו-CAD
- (9) מול זווית שוות במשולש מונחות צלעות שוות (10) משפט דמיון זווית-זווית
- (11) יחס הדמיון

10:10

חפשו במרשקת, או בסתם פרסומת, תמונות של שעונים. רובם המכריע מצביעים על השעה: 10:10 ...

**טריגונומטריה במישור**

**ללא מעגל - שאלות**



1. (004, קיץ תש"ע - 2010, מועד ב)

בטרפז  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ) נתון:

$\angle CAD = 90^\circ$ ,  $CD = a$ ,  $AB = b$ ,  $\angle ADC = \alpha$

א. (1) הבע באמצעות  $\alpha$  את  $\angle BAC$ .

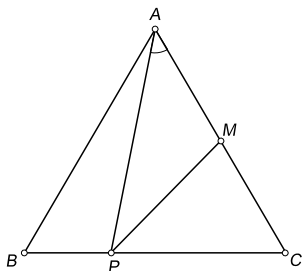
(2) הבע באמצעות  $a$ ,  $b$  ו- $\alpha$  את האורכים של שוקי הטרפז.

(135)

ב. דרך הקדקוד  $A$  העבירו ישר המקביל לשוק  $BC$ .

המקביל חותך את הבסיס  $CD$  בנקודה  $E$ .

חשב את  $\alpha$ , אם נתון כי שטח המרובע  $ABCE$  הוא  $a^2 \frac{\sqrt{3}}{8}$  ו- $a = 2b$  (שני פתרונות).



2. (004, חורף תשע"א - 2011, לוחמים)

$ABC$  הוא משולש שווה-צלעות שאורך צלעו הוא  $a$ .

$P$  היא נקודה על הצלע  $BC$  כך ש- $\angle PAC = \alpha$ .

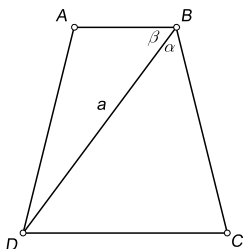
הנקודה  $M$  היא אמצע הצלע  $AC$ .

א. הבע באמצעות  $a$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש  $APM$ .

ב. נתון ששטח המשולש  $APM$  הוא  $\frac{1}{4}$  משטח

(136)

המשולש  $ABC$ . חשב את  $\alpha$ .



3. (004, קיץ תשע"א - 2011, לוחמים)

בציור שלפניך טרפז שווה-שוקיים  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ).

האלכסון  $BD$  של הטרפז יוצר זווית  $\alpha$  עם השוק  $BC$ ,

וזווית  $\beta$  עם הבסיס הקטן  $AB$  ( $0^\circ < \beta < 60^\circ$ ).  $BD = a$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $a$  את אורכי הבסיסים  $AB$  ו- $CD$ .

(137)

ב. נתון:  $DC = 2AB$ ,  $\alpha = 2\beta$ . חשב את גודל הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$ .

**תשובות**

1. א. (1)  $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$  (2)  $BC = \sqrt{b^2 + a(a - 2b) \sin^2 \alpha}$ ,  $AD = a \cos \alpha$  (יחידות אורך)

ב.  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 60^\circ$

2. א.  $S_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3} \sin \alpha}{8 \sin(60^\circ + \alpha)}$  (יחידות ריבועיות) ב.  $\alpha = 30^\circ$

3. א.  $AB = \frac{a \sin(\alpha + 2\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ ,  $DC = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$  (יחידות אורך) ב.  $\alpha = 75.52^\circ$ ,  $\beta = 37.76^\circ$

נסמן:  $\angle A = \alpha$ ,  $DE = x$

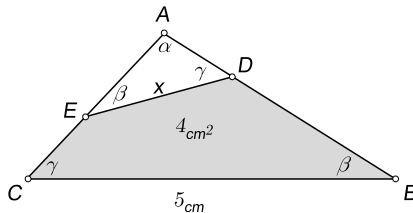
$$\triangle ABC: (1) \frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{5}{\sin \alpha} \Rightarrow AB = \frac{5 \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{5}{\sin \alpha} \Rightarrow AC = \frac{5 \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$(2) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot \frac{5 \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha$$

$$= \frac{25 \sin \gamma \sin \beta}{2 \sin \alpha}$$



$$(3) S_{\triangle AED} = S_{\triangle ABC} - 4 = \frac{25 \sin \gamma \sin \beta}{2 \sin \alpha} - 4$$

$$(4) \triangle AED \sim \triangle ABC \Rightarrow (5) \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{x}{5}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{25} = \frac{\frac{25 \sin \gamma \sin \beta}{2 \sin \alpha} - 4}{\frac{25 \sin \gamma \sin \beta}{2 \sin \alpha}} = \frac{25 \sin \gamma \sin \beta - 8 \sin \alpha}{25 \sin \gamma \sin \beta} = 1 - \frac{8}{25} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma \sin \beta} \quad / \cdot 25$$

$$x^2 = 25 - 8 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma \sin \beta} \stackrel{(6)}{=} 25 - 8 \cdot \frac{\sin(180^\circ - (\gamma + \beta))}{\sin \gamma \sin \beta}$$

$$\stackrel{(7)}{=} 25 - \frac{8 \sin(\gamma + \beta)}{\sin \gamma \sin \beta} \stackrel{(8)}{=} 25 - \frac{8(\sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta)}{\sin \gamma \sin \beta}$$

$$= 25 - 8 \left( \frac{\sin \gamma \cos \beta}{\sin \gamma \sin \beta} + \frac{\cos \gamma \sin \beta}{\sin \gamma \sin \beta} \right) = 25 - 8 \left( \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \right)$$

$$x^2 \stackrel{(9)}{=} 25 - 8 \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \right) \Rightarrow x = \sqrt{25 - 8 \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \right)} \quad (\checkmark)$$

אפשר גם ללא שימוש בדמיון לפי שטח משולש לפי צלע אחת:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{5^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}, \quad S_{\triangle ADE} = \frac{x^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

הצבה במשוואה:  $S_{\triangle ADE} + 4 = S_{\triangle ABC}$  וחילוף  $x$ .

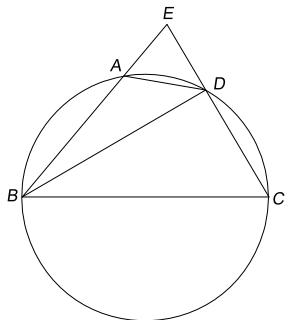
(1) משפט הסינוסים (2) נוסחת שטח משולש (3) נתון (4) משפט דמיון ז-ז

(5) היחס בין שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון

(6) השלמה ל- $180^\circ$  במשולש (7)  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

(8) נוסחת סינוס של סכום שתי זוויות (9)  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

**טריגונומטריה במישור - מעגל - שאלות**



1. (שאלון 005, קיץ ס"ד - 2004, מועד א)

מרובע ABCD חסום במעגל.

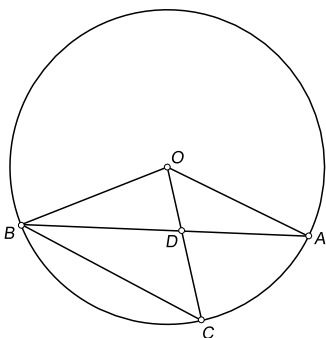
המשכי הצלעות AB ו-DC נפגשים בנקודה E.

נתון:

$$\angle ABC = 50^\circ, \angle DCB = 60^\circ, BC = 30 \text{ cm},$$

א. מצא את האורך של AD

ב. מצא את הרדיוס של המעגל החוסם את המשולש AED. (151)



2. (004, קיץ ס"ח - 2008, מועד א)

AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.

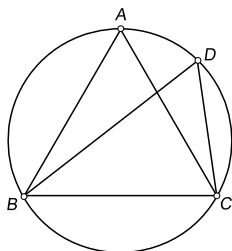
OC ו-AB נחתכים בנקודה D.

נתון:  $\angle OAD = \beta, \angle AOD = \alpha, OB = R$

א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס:  $\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOC}}$

ב. נתון גם:  $\alpha = \beta$  וכן:  $\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{2}{3}$

מצא את הזווית  $\alpha$ . (151)



3. (004, קיץ ס"ח - 2008, מועד לוחמים)

ABC הוא משולש שווה-שוקים ( $AB = AC$ ) החסום במעגל.

D היא נקודה על הקשת AC.

$$\text{נתון: } DC = 5 \text{ cm}, AB = 7 \text{ cm}, \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{49}{40}$$

כל הזוויות בשני המשולשים הן זוויות חדות.

א. חשב את האורך של הצלע BD.

ב. חשב את זוויות המשולש BDC, אם נתון כי שטח המשולש BDC הוא  $10\sqrt{3}$  י"ר. (152)

חמשת הימים הראשונים שאחרי סוף השבוע - הם הקשים ביותר

**תהליך**

1. א.  $AD = 10.26 \text{ cm}$  ב.  $R = 5.46 \text{ cm}$

2. א.  $\frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$  ב.  $\alpha = 41.41^\circ$

3. א.  $BD = 8 \text{ cm}$  ב.  $\angle C = 81.79^\circ, \angle D = 60^\circ, \angle B = 38.21^\circ$



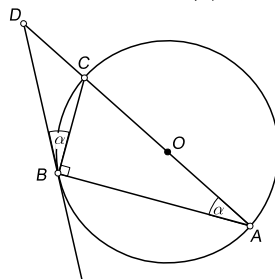
4. א. (1)

$$(1) \angle DBC = \angle A = \alpha, \quad (2) \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow (3) \angle ACB = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle BCD = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$$

$$(4) \angle D = 180^\circ - \alpha - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \triangle BDC: \angle B = \alpha, \angle C = 90^\circ + \alpha, \angle D = 90^\circ - 2\alpha$$



(2)

$$\angle BCD = 90^\circ + \alpha \Rightarrow \angle BCD > \angle D, \angle BCD > \angle DBC$$

$$\Rightarrow (5) \triangle BDC: BD > BC, BD > CD$$

$$\triangle ABC: \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{2R} = \sin \alpha \Rightarrow BC = 2R \sin \alpha$$

$$\triangle BCD: (6) \frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin (90^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow (7) CD = \frac{BC \sin \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2R \sin \alpha \sin \alpha}{\cos 2\alpha} \Rightarrow CD = \frac{2R \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$$

ב.

$$BC = DC \Rightarrow 2R \sin \alpha = \frac{2R \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha} \Rightarrow \sin \alpha \cos 2\alpha = \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \cos 2\alpha \Rightarrow (8) \sin \alpha = \sin (90^\circ - 2\alpha)$$

$$(1) \alpha = 90^\circ - 2\alpha + 360^\circ k \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ + 360^\circ k \Rightarrow \alpha = 30^\circ + 120^\circ k \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$(2) \alpha = 180^\circ - (90^\circ - 2\alpha) + 360^\circ k \Rightarrow \alpha = 90^\circ + 2\alpha + 360^\circ k$$

$$\Rightarrow -\alpha = 90^\circ + 360^\circ k \Rightarrow \alpha = -90^\circ + 360^\circ k = (9) \emptyset$$

(1) זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני

(2) זווית היקפית הנשענת על קוטר - ישרה (3) השלמה ל- $180^\circ$  ב- $\triangle ABC$

(4) השלמה ל- $180^\circ$  ב- $\triangle BCD$  (5) מול הזווית הגדולה במשולש מונחת הצלע הגדולה

(6) משפט הסינוסים (7)  $\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$  (8)  $\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

(9) אין זווית שלילית במשולש

### הסתברות מפתיעה

ההסתברות ששני אנשים מתוך 23 אנשים אקראיים, חוגגים יום הולדת באותו תאריך גבוהה מ-50% !

(0.5073)

**חשבון דיפרנציאלי**

**פונקציות רציונליות ללא פיתול - שאלות** (כל השאלות שלא צוין לגביהן אחרת - נלקחו משאלון 004).

1. (קיץ ס"ד - 2004, מועד ב) נתונה הפונקציה:  $g(x) = \frac{x^2 - k}{x + 5}$  (k פרמטר).

שיפוע הישר, המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = -2$ , הוא  $-\frac{7}{9}$ .

א. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. הצב את הערך של k שמצאת בסעיף א' ב- $g(x)$ .

ומצא את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה (2) נקודות החיתוך עם הצירים

(3) האסימפטוטה המקבילה לציר y (4) נקודות הקיצון וסוגן

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה. (178)

2. (קיץ ס"ה - 2005, מועד ב)  $y = 4$  אסימפטוטה אופקית של הפונקציה  $y = 1 + \frac{Ax^2}{x^2 - 4}$  (A פרמטר).

א. מצא את הערך של הפרמטר A.

ב. הצב בפונקציה את הערך של A שמצאת בסעיף א', ומצא את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה (2) נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים

(3) האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה (4) נקודות הקיצון של הפונקציה, וסוג הקיצון.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה. (179)

3. (חורף י"ז - 2006) נתונה הפונקציה  $y = \frac{x^2}{a - x}$  (a - פרמטר).

המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 6$  מקביל לציר x.

א. מצא את הערך של a.

ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א', ומצא עבור הפונקציה הנתונה את:

1. תחום ההגדרה 2. נקודת החיתוך של הגרף עם הצירים

3. נקודות הקיצון וסוג הקיצון 4. האסימפטוטה המקבילה לאחד הצירים

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתון הישר  $y = k$ . מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k,

הישר חותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת. (180)

**תשובות**

1. א.  $k = 9$

ב. (1)  $x \neq -5$  (2)  $(\pm 3, 0)$ ,  $(0, -1\frac{4}{5})$  (3)  $x = -5$  (4)  $\max : (-9, -18)$ ,  $\min : (-1, -2)$

2. א.  $A = 3$  ב. (1)  $x \neq \pm 2$  (2)  $(\pm 1, 0)$ ,  $(0, 1)$  (3)  $x = \pm 2$  (4)  $\max : (0, 1)$

3. א.  $a = 3$  ב. (1)  $x \neq 3$  (2)  $(0, 0)$  (3)  $\max (6, -12)$   $\min (0, 0)$  (4)  $x = 3$  ד.  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = -12$

**חשבון דיפרנציאלי - פונקציות רציונליות ללא פיתול - פתרונות**

א. 1.  $g(x) = \frac{x^2 - k}{x + 5}$  ,  $g'(-2) = -\frac{7}{9}$  ;  $k = ?$

$$g'(x) = \frac{2x(x+5) - 1 \cdot (x^2 - k)}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x + k}{(x+5)^2}$$

$$g'(-2) = \frac{4 - 20 + k}{3^2} = \frac{k - 16}{9} = -\frac{7}{9} \Rightarrow k = -7 + 16 \Rightarrow k = 9$$

ב. (1)

$$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 5} \Rightarrow x \neq -5$$

(2)

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{9}{5} \Rightarrow (0, -1\frac{4}{5}) ; y = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow (\pm 3, 0)$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 9}{x + 5} = \frac{16}{0} = \infty \Rightarrow x = -5 \text{ אסימפטוטה אנכית}$$

(4)

$$g'(x) = \frac{x^2 + 10x + k}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x + 9}{(x+5)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-10 \pm 8}{2} = -5 \pm 4$$

$$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -9$$

מכנה הנגזרת הראשונה חיובי. לכן מספיק לגזור את מונה הנגזרת הראשונה:

$$(x^2 + 10x + 9)' = 2x + 10$$

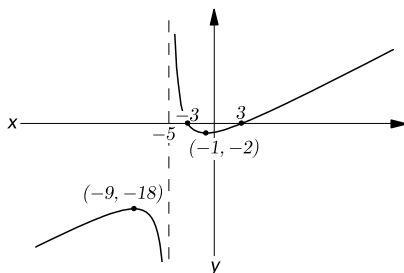
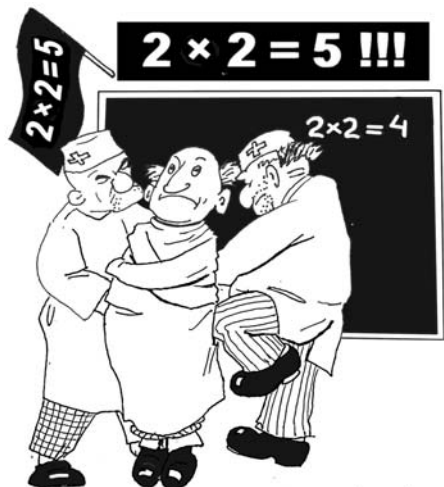
$$2 \cdot (-1) + 10 > 0 \Rightarrow g''(-1) > 0 \Rightarrow x_{min} = -1$$

$$2 \cdot (-9) + 10 < 0 \Rightarrow g''(-9) < 0 \Rightarrow x_{max} = -9$$

$$g(-1) = \frac{1 - 9}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \Rightarrow \text{min} : (-1, -2)$$

$$g(-9) = \frac{81 - 9}{-4} = \frac{72}{-4} = -18 \Rightarrow \text{max} : (-9, -18)$$

ג.



בצולם של עקומים - הישרים נראים מוזרים

**פונקציות רציונליות עם תחומי קעירות ונקודות פיתול - שאלות**

1. (006, קיץ תשס"ז - 2006, מועד ב') נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4a}{x^2} - \frac{4a}{x} + 3$  ( $a > 0$  פרמטר).

- א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.  
 ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה (הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך) וסוגה.  
 ג. קבע את תחומי העליה והירידה של הפונקציה. נמק.  
 ד. מצא את תחומי הקעירות כלפי מטה ( $\cup$ ) וכלפי מעלה ( $\cap$ ).  
 ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור  $a > 3$ . (196)

2. (006, קיץ תשס"ח - 2008, מועד ב') נתונה הפונקציה:  $y = 2x^2 - \frac{a^3}{2x}$

- א. עבור  $a > 0$  מצא את (הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך):  
 (1) האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).  
 (2) נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).  
 (3) השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.  
 (4) תחומי הקעירות של הפונקציה כלפי מעלה ( $\cup$ ) וכלפי מטה ( $\cap$ ).  
 ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור  $a > 0$ .  
 ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור  $a < 0$ . הסבר את שיקוליך בסרטוט הגרף. (197)

3. (006, קיץ תשס"ד - 2004, מועד א') נתונה הפונקציה  $y = x^2 + \frac{8}{x}$

- א. מצא את: תחום ההגדרה של הפונקציה  
 ב. נקודת הקיצון שלה, וקבע את סוגה.  
 ג. נקודת הפיתול של הפונקציה  
 ד. תחומי קעירות כלפי מטה ( $\cup$ ), ומעלה ( $\cap$ ). (198)

**תשובות**

1. א.  $x = 0, y = 3$  ב.  $\min(2, 3 - a)$  ג.  $0 < x < 2$  ,  $\cup$  :  $(x < 0) \cup (x > 2)$  ,  $\cap$  :

ד.  $x > 3$  ,  $\cup$  :  $(x < 0) \cup (0 < x < 3)$  ,  $\cap$  :

2. א. (1)  $x = 0$  (2)  $(-\frac{a}{\sqrt[3]{4}}, 0)$  (3)  $\min(-\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a^2)$

(4)  $0 < x < \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$  ,  $\cup$  :  $(x < 0) \cup (x > \frac{a}{\sqrt[3]{4}})$  ,  $\cap$  :

3. א.  $x \neq 0$  ב.  $\min : (\sqrt[3]{4}, \frac{12}{\sqrt[3]{4}}) = (1.59, 7.56)$

ג.  $(-2, 0)$  ד.  $-2 < x < 0$  ,  $\cap$  :  $x < -2, x > 0$  ,  $\cup$  :

**חשבון דיפרנציאלי - פונקציות רציונליות עם פיתול - פתרונות**

א. 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4a}{x^2} - \frac{4a}{x} + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4a - 4ax + 3x^2}{x^2} = \frac{-\rightarrow 4a}{-\rightarrow 0} = \infty$$

אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4a}{x^2} - \frac{4a}{x} + 3 \right) = 0 + 0 + 3 = 3 \Rightarrow y = 3 \text{ אסימפטוטה אופקית:}$$

$$y' = \left( \frac{4a}{x^2} - \frac{4a}{x} + 3 \right)' = -\frac{8a}{x^3} + \frac{4a}{x^2} \stackrel{?}{=} 0 \cdot x^3$$

$$\Rightarrow -8a + 4ax = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y(2) = \frac{4a - 8a + 12}{4} = \frac{12 - 4a}{4} = 3 - a$$

$$y' = \frac{-8a + 4ax}{x^3} = \frac{4a(x-2)}{x^3}$$

x		0		2	
y'	$\frac{-}{+} = +$	$\emptyset$	$\frac{-}{+} = -$	0	$\frac{+}{+} = +$
y	$\nearrow$	asym.	$\searrow$	min	$\nearrow$

$\Rightarrow \text{min: } (2, 3 - a)$

ג.

$\nearrow$ :  $(x < 0) \cup (x > 2)$  ,  $\searrow$ :  $0 < x < 2$

ד.

$$y'' = \left( -\frac{8a}{x^3} + \frac{4a}{x^2} \right)' = \frac{24a}{x^4} - \frac{8a}{x^3} = \frac{24a - 8ax}{x^4} = \frac{8a(3-x)}{x^4} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 3$$

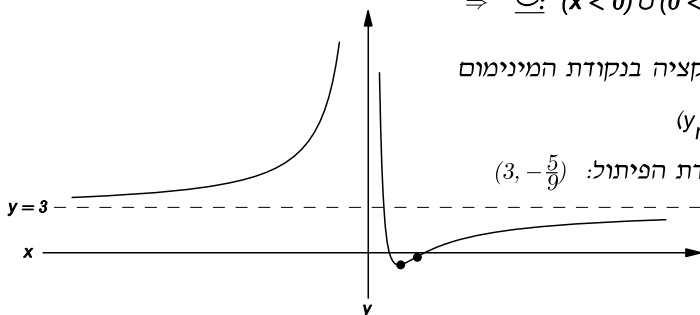
x		0		3	
y''	$\frac{+}{+} = +$	$\emptyset$	$\frac{+}{+} = +$	0	$\frac{-}{+} = -$
y	$\smile$	asym.	$\smile$	inflec.	$\frown$

$\Rightarrow \smile$ :  $(x < 0) \cup (0 < x < 3)$  ,  $\frown$ :  $x > 3$

ה. עבור  $a > 3$  ערך הפונקציה בנקודת המינימום

הוא שלילי ( $y_{\min} = 3 - a$ )

הצויר עבור  $a = 4$  נקודת הפיתול:  $(3, -\frac{5}{9})$



**חשבון דיפרנציאלי - פונקציות עם שורש ריבועי - שאלות**

(כל השאלות שלא מצוין בהן אחרת בפרק זה, נלקחו משאלון 004)

1. (קיץ ס"ו - 2006, מועד א)

נתונה הפונקציה  $y = \sqrt{ax^2 - 16a}$ ,  $a \neq 0$  פרמטר.

א. חשב את הערך של  $a$ , אם שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 8$  הוא  $\sqrt{\frac{2}{3}}$

הצב בפונקציה  $a = \frac{1}{2}$ , וענה על הסעיפים הבאים:

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ד. הראה כי הנגזרת של הפונקציה אינה מתאפסת בתחום ההגדרה של הפונקציה.

ה. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה. נמק.

ו. מה הם השיעורים של נקודות המינימום המוחלט של הפונקציה? נמק.

ז. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה. (203)

2. (סתיו ס"ז - 2006, מועד לוחמים)

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x-4}}{x}$

א. חקור את הפונקציה ומצא את:

(1) תחום ההגדרה (2) נקודות קיצון וסוגן (3) תחומי עליה וירידה

ב. נתון גם כי לפונקציה אסימפטוטה אופקית  $y = 1$

שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. עבור אילו ערכי  $k$  הישר  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת?

ה. מצא עבור אילו ערכי  $k$ , הישר  $y = k$  אינו חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$ . (204)

**הזמן האבוד**

מה קרה בין 5.10.1582 לבין 14.10.1582 ?

התשובה היא: כלום, אבל ממש כלום. תינוק לא נולד, עוף לא פרח, ציפור לא צייצה ואפילו השמש לא זרחה אז.

בעקבות אי התאמה לעונות השנה שהצטברה בלוח הגרגוריאני במשך שנים, החליט האפיפיור גרגיוס ה־13

למחוק (!) מלוח השנה 10 ימים, כך שהתאריך שלאחר 4.10.1582 היה 15.10.1582.

**השאלות**

1. א.  $a = \frac{1}{2}$  ב.  $(x \leq -4) \cup (x \geq 4)$  ג.  $(\pm 4, 0)$  ה.  $x < -4$ ,  $x > 4$  ז.  $(\pm 4, 0)$

2. א. (1)  $x \geq 4$  (2)  $\max(8, 1\frac{1}{4}), \min_{ep}(4, 1)$  (3)  $x > 8$ ,  $4 < x < 8$  ב. עמ' 251

ג.  $k_1 = 1, k_2 = 1\frac{1}{4}$

**חשבון דיפרנציאלי - פונקציות עם שורש ריבועי - פתרונות**

$$y = \sqrt{ax^2 - 16a} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{ax^2 - 16a}} \cdot 2ax = \frac{ax}{\sqrt{ax^2 - 16a}} \quad \text{א. 1.}$$

$$y'(8) = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{8a}{\sqrt{64a - 16a}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{8a}{\sqrt{48a}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad / ( )^2$$

$$\Rightarrow \frac{64a^2}{48a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4a}{3} = \frac{2}{3} \quad / \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

אין צורך לבדוק את נכונות הפתרון (משוואה לא רציונאלית) מאחר ששני אגפי המשוואה (לפני ההעלאה בריבוע) הינם חיוביים, ולכן לא יתקבלו פתרונות זרים.

**ב. 1.**

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 16 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 8}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 8 \geq 0 \quad / \cdot 2 \Rightarrow x^2 - 16 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \pm 4, \quad a = 1 > 0 \Rightarrow \begin{matrix} + & - & + \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ -4 & & 4 \end{matrix} \Rightarrow (x \leq -4) \cup (x \geq 4)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{-8} = \emptyset$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 8 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow (\pm 4, 0)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{0.5x^2 - 8}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{x}{2\sqrt{0.5x^2 - 8}} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{מחוץ לתחום ההגדרה:}$$

בנקודות שבהן  $x = \pm 4$  ערך הפונקציה הוא 0 (לעיל)

באותן נקודות הנגזרת אינה מוגדרת (0 במכנה)

מכנה הנגזרת בתחום ההגדרה חיובי לכל  $x$ , ולכן סימן הנגזרת ( $\pm$ ) נקבע ע"י מונה הנגזרת ( $x$ ):

x		-4		4	
y'	-	0	0	0	+
y	↘	0	0	0	↗

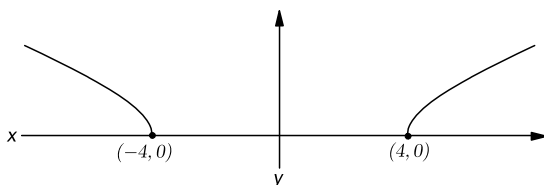
$$\Rightarrow \nearrow: x > 4 \quad \searrow: x < 4$$

נימוק (לתחומי עליה וירידה):  $y' > 0 \Rightarrow y \nearrow$ ,  $y' < 0 \Rightarrow y \searrow$

בתחום:  $x < -4$  הפונקציה יורדת ( $\searrow$ )  $\Leftarrow$  ב'  $x = -4$  היא מקבלת ערך מינימלי (0)

בתחום:  $x > 4$  הפונקציה עולה ( $\nearrow$ )  $\Leftarrow$  ב'  $x = 4$  היא מקבלת ערך מינימלי (0)

$$\Rightarrow \min_{ab}: (-4, 0) \quad (4, 0)$$



**חשבון דיפרנציאלי - פונקציות טריגונומטריות - שאלות**

1. (004, קיץ ס"ח - 2008, מועד א) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x}$  בתחום  $0 < x < \pi$ .

א. בתחום הנתון מצא את: (1) האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר  $y$ .

(2) נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר  $x$ .

(3) נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון. (211)

2. (004, קיץ תש"ע - 2010, מועד א) נתונה הפונקציה  $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

בתחום הנתון: א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה,

ואת האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר  $y$ .

ב. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה. (211)

3. (004, קיץ תש"ע - 2010, מועד א - המבחן הגנוז)

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{1 - \sin x}$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $a \neq 0$  פרמטר.

בתחום הנתון מצא את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר  $y$ .

(3) סימן הפרמטר  $a$ , אם ידוע כי בנקודה שבה  $x = \pi$  הפונקציה יורדת.

ב. (1) גרף הפונקציה חותך בתחום הנתון את הישר  $y = 1$  בשלוש נקודות

שבהן:  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ,  $x = 2\pi$ . מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

(2) הצב את הערך של  $a$  שמצאת, ומצא בתחום הנתון את השיעורים של נקודות הקיצון

של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. עבור  $a$  שמצאת, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון. (212)

**שאלות**

1. א. (1)  $x = 0$ ,  $x = \pi$  (2)  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  (3)  $\max: (\frac{\pi}{2}, 0)$

2. א. ת"ה:  $(0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} < x \leq \pi)$  אס:  $x = \frac{\pi}{2}$

ב.  $\searrow$ :  $(0 < x < \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4} < x < \pi)$ ,  $\swarrow$ :  $(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4})$

3. א. (1)  $x \neq \frac{\pi}{2}$  (2)  $x = \frac{\pi}{2}$  (3)  $\operatorname{sign}(a) = +$

ב. (1)  $a = 1$  (2)  $\min_{\text{ep}}(0, 1)$ ,  $\min(\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $\max_{\text{ep}}(2\pi, 1)$



**חשבון דיפרנציאלי - פונקציות טריגונומטריות - פתרונות**

$f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x} = 1 - \frac{1}{\sin x}$  ,  $0 < x < \pi$  .1

**א.**

(1)  $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, x \neq \pi$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \frac{1}{\sin x}) = 1 - \frac{1}{\rightarrow 0^+} = 1 - \infty = -\infty \Rightarrow x = 0_{\leftarrow}$

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} (1 - \frac{1}{\sin x}) = 1 - \frac{1}{\rightarrow 0^+} = 1 - \infty = -\infty \Rightarrow x = \pi_{\rightarrow}$

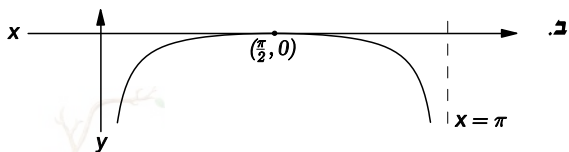
(2)  $y = 0 \Rightarrow \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\frac{\pi}{2}, 0)$

(3)  $f'(x) = -(-\frac{1}{\sin^2 x}) \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

מכנה הנגזרת חיובי בנקודה החשודה.

לכן מספיק לגזור את מונה הנגזרת לבדיקת סימן הנגזרת השניה באותה נקודה.

$(\cos x)' = -\sin x$  ,  $-\sin \frac{\pi}{2} < 0 \Rightarrow f''(\frac{\pi}{2}) < 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \max: (\frac{\pi}{2}, 0)$



$f(x) = \tan x - 2x$  ,  $0 \leq x \leq \pi \rightarrow (0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} < x \leq \pi)$  .2

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x - 2x) = \infty - \pi = \infty \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

**ב-ג.**

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

(1)  $\cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

(2)  $\cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

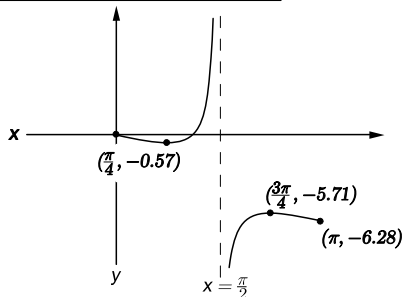
x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\pi$
y'		-	0	+	$\emptyset$	+	0	-	
y	0	\	min	/	asym.	/	max	\	-2π

$\searrow: (0 < x < \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4} < x < \pi)$

$\nearrow: (\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4})$

$f(0) = 0 - 0 = 0$  ,  $f(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\pi}{2} = -0.57$

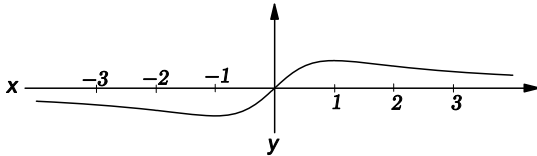
$f(\frac{3\pi}{4}) = -1 - \frac{3\pi}{2} = -5.71$  ,  $f(\pi) = 0 - 2\pi = -6.28$



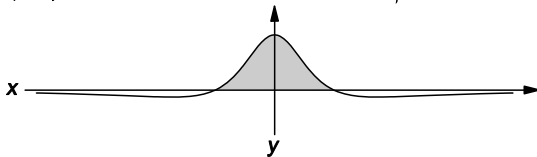
**חשבון דיפרנציאלי - הקשר בין גרף הנגזרת לפונקציה - שאלות** (כל השאלות משאלון 006)

1. (קיץ תשס"ז - 2007, מועד ב)

א. בציור להלן מסורטטת סקיצה של הגרף של פונקציית הנגזרת  $g'(x)$ :

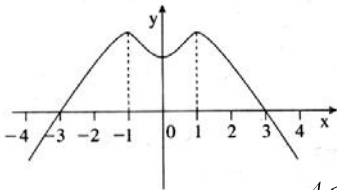


על סמך ציור זה בלבד, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ , אם נתון ש-  $g(0) = 0$ .  
 סמן בסקיצה את שיעורי  $x$  של נקודות הפיתול של  $g(x)$ .  
 הסבר את השיקולים שעל פיהם סרטטת את הסקיצה. (220)



ב. בציור להלן מסורטטת סקיצה של הגרף של  $g''(x)$ :

חשב את השטח הכלוא בין הגרף של  $g''(x)$  ובין ציר  $x$ , אם נתון כי  $g'(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .



2. (קיץ תשס"ח - 2008, מועד א)

$f(x)$  היא פונקציה בתחום  $-4 \leq x \leq 4$ .  
 בציור סקיצה של גרף  $f'(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 4$ .

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f''(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 4$ .  
 ציין מספרים על ציר  $x$  והסבר את שיקוליך בסרטוט הגרף.  
 ב. נתון:  $f(4) > 0$ ,  $f(-3) = 0$ .

(221) 1) בתחום  $-4 \leq x \leq 4$  רשום עבור הפונקציה  $f(x)$  את:

- שיעורי  $x$  של נקודות הקיצון וסוגן.
- שיעורי  $x$  של נקודות הפיתול, ותחומי הקעירות כלפי מעלה (-) וכלפי מטה (∪). נמק.

2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 4$ .

ציין מספרים על ציר  $x$ , סמן את נקודות הפיתול, וסרטט את תחומי הקעירות.

עם אקדה וחיוך תמיד השגתי יותר מאשר רק עם חיוך... (אל קאפונה, גנגסטר אמריקאי)

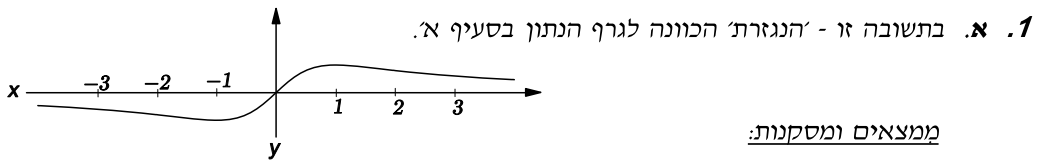


1. 1)  $S = 1$  (יחידה ריבועית אחת)

2. 1)  $\min_{ep} : 4$ ,  $\max : 3$ ,  $\min : -3$ ,  $\max_{ep} : -4$ ; פיתול:  $x = \pm 1$ ,  $x = 0$

∪:  $(-4 < x < -1) \cup (0 < x < 1)$ , ∩:  $(-1 < x < 0) \cup (1 < x < 4)$

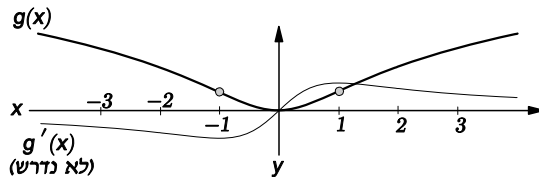
**הקשר בין גרף הנגזרת לפונקציה - פתרונות**



ממצאים ומסקנות:

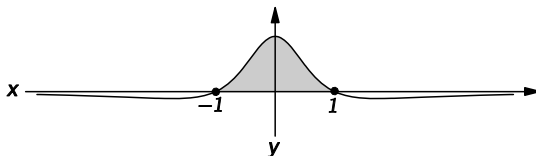
- נתון:  $g(0) = 0$
  - הנגזרת שלילית עבור  $x < 0$  ( $g(x)$  יורדת) וחיובית עבור  $x > 0$  ( $g(x)$  עולה)
  - הנגזרת יורדת עבור  $(x < -1) \cup (x > 1)$   $\Leftrightarrow$  הנגזרת השניה שם שלילית  $\Leftrightarrow$   $\curvearrowright$
  - הנגזרת עולה עבור  $-1 < x < 1$   $\Leftrightarrow$  הנגזרת השניה שם חיובית  $\Leftrightarrow$   $\curvearrowleft$
  - בנקודות בהן  $x = \pm 1$  יש לנגזרת קיצון מקומי  $\Leftrightarrow g''(\pm 1) = 0$   $\Leftrightarrow$  פיתול
- נסכם בטבלה ונצייר:

x		-1		0		1	
$g'$	-	-	-	0	+	+	+
$g''$	-	0	+	+	+	0	-
g	$\curvearrowright$	infl.	$\curvearrowleft$	min	$\curvearrowright$	infl.	$\curvearrowleft$



הנקודות המסומנות בציור הן של נקודות הפיתול המתקבלות בנקודות שבהן  $x = \pm 1$

ב. בנקודות שבהן  $x = \pm 1$  יש לגרף של  $g(x)$  פיתול  $\Leftrightarrow g''(\pm 1) = 0$   
 ולכן אלו הם גבולות האינטגרציה של הגרף הנתון ( $g''$ ) בסעיף זה:

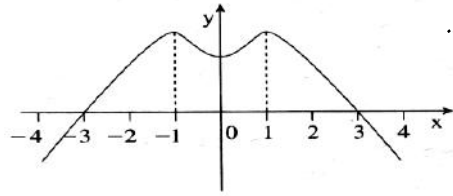


$$S = \int_{-1}^1 g''(x) dx = g'(x) \Big|_{-1}^1 = \frac{x}{1+x^2} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{1+1} - \frac{-1}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow S = 1 \quad (\text{יחידה ריבועית אחת})$$

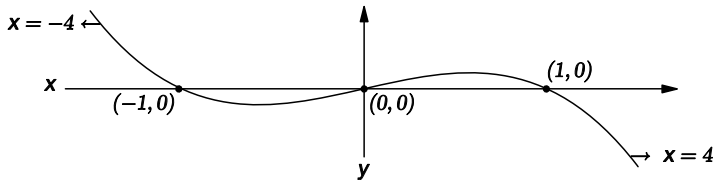
2. א.

לצורך נוחות נסמן:  $g(x) = f'(x)$

יש לצייר את הגרף של:  $g'(x) = f''(x)$



$x$	-4		-1		0		1		4
$g$		↗	max	↘	min	↗	max	↘	
$g'$		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
		+	0	-	0	+	0	-	



ב.

$x$	-4		-3		-1		0		1		3		4
$y'$		-	0				+				0		-
$y$		↓					↓				↓		↓
		↘	min				↗				max		↘

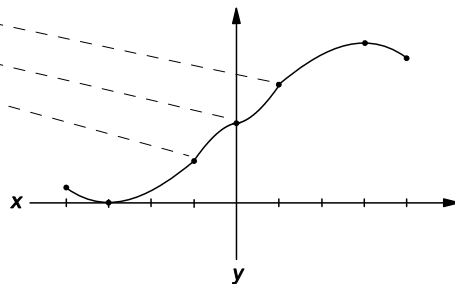
$y'$		↗		max	↘	min	↗	max		↘		
$y''$		↓		↓	↓	↓	↓	↓		↓		
		+		0	-	0	+	0		-		
$y$		↓		↓	↓	↓	↓	↓		↓		
		↘		infl.	↖	infl.	↘	infl.		↘		

(1)  $\max_{ep}: x = -4$  ,  $\min: x = -3$  ,  $\max: x = 3$  ,  $\min_{ep}: x = 4$

$\cup$ :  $(-4 < x < -1) \cup (0 < x < 1)$  ,  $\cap$ :  $(-1 < x < 0) \cup (1 < x < 4)$

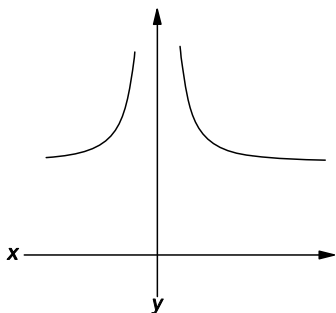
inflection:  $x = -1$  ,  $x = 0$  ,  $x = 1$

(2)



**חשבון אינטגרלי**

**שטחים - כללי - שאלות**



(224)

1. (006, קיץ תשס"ו - 2006, מיוחד)

נתונה הפונקציה  $y = \frac{5x^2 + 4}{x^2}$

ונתון הישר  $y = -tx + 4t$  ,  $t > 0$

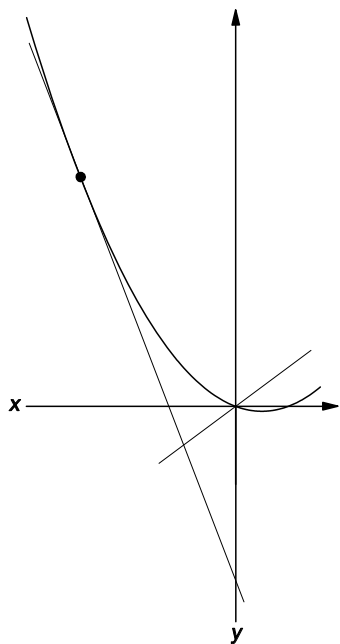
לישר ולפונקציה יש נקודת חיתוך אחת בלבד,

והיא נמצאת בתחום:  $x < 0$

הישר מחלק לשני שטחים שווים את השטח המוגבל

על ידי גרף הפונקציה, על ידי הישרים  $x = 1$  ו-  $x = 4$  , ועל ידי ציר  $x$

מצא את הערך של  $t$ .



2. (006, חורף תשס"ז - 2007)

נתונה הפרבולה  $y = 2x^2 - x$

(בציור הפרבולה אינה משיקה לציר  $x$  . היא חותכת אותו.

ראה הגדלה בציור תחתון. א.מ.)

בנקודה על הפרבולה שבה  $y = 6$

מעבירים ישר משיק ששיפועו שלילי.

א. מצא את משוואת הישר המשיק.

ב. דרך ראשית הצירים מעבירים ישר המחלק לשני

שטחים שווים את השטח המוגבל על ידי הפרבולה,

על ידי הישר המשיק ועל ידי ציר  $y$ .

הישר חותך את הישר המשיק שמצאת בסעיף א'

בנקודה שבה  $x = a$

מצא את ערכו של  $a$

(225)

$^{-1}$ =	$^2$ =	$^3$ =
-----------	--------	--------



2. א.  $y = -7x - 4\frac{1}{2}$  ב.  $a = -\frac{1}{2}$

1.  $t = 2$

אינטגרלים - שטחים - כללי - פתרונות

.1

נקודת החיתוך בין הישר הנתון לציר x:

$$y = 0 \Rightarrow -tx + 4t = 0 \quad / : t \neq 0$$

$$\Rightarrow -x + 4 = 0 \Rightarrow C(4, 0)$$

$$x_A = 1 \Rightarrow y_A = -t \cdot 1 + 4t = 3t \Rightarrow AB = 3t$$

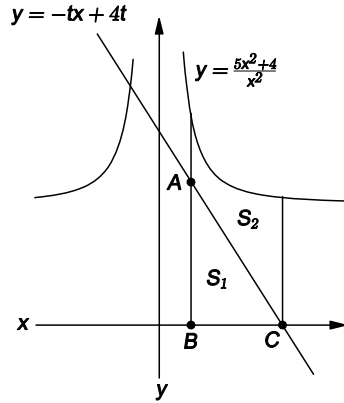
$$BC = x_C - x_B = 4 - 1 = 3$$

$$S_1 = S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{3t \cdot 3}{2} = \frac{9t}{2}$$

$$\int \left( \frac{5x^2+4}{x^2} \right) dx = \int \left( 5 + \frac{4}{x^2} \right) dx = 5x - \frac{4}{x} + c$$

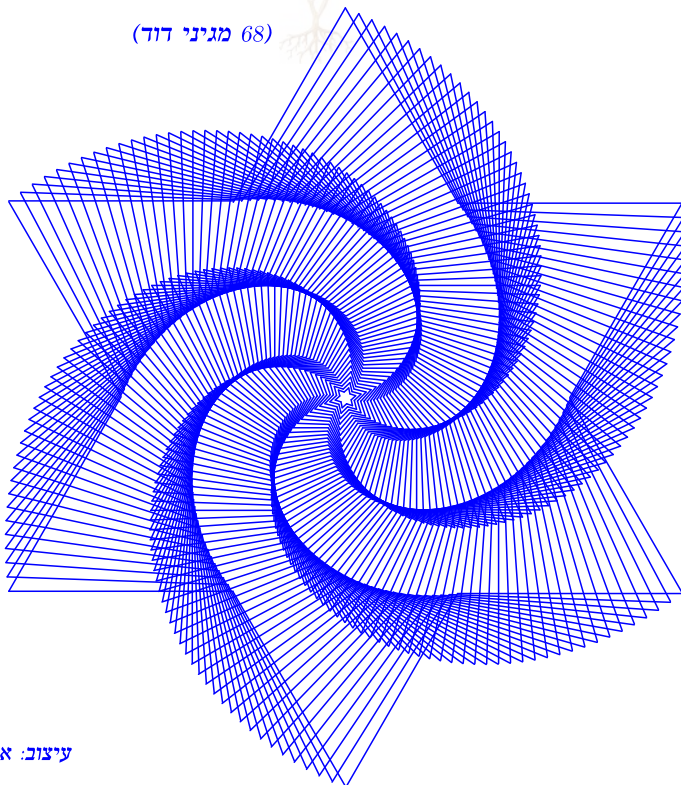
$$S_2 = \int_1^4 \left( \frac{5x^2+4}{x^2} \right) dx - S_1 = S_1 \Rightarrow \int_1^4 \left( \frac{5x^2+4}{x^2} \right) dx = 2 S_1 = 2 \cdot \frac{9t}{2} = 9t$$

$$\int_1^4 \left( \frac{5x^2+4}{x^2} \right) dx = \left( 5x - \frac{4}{x} \right) \Big|_1^4 = (20 - 1) - (5 - 4) = 19 - 1 = 18 = 9t \Rightarrow t = 2$$



לכבוד שישים ושמונה השנים הראשונות

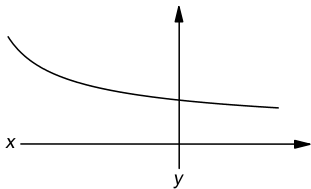
(68 מגיני דוד)



עיצוב: אלי מיטב

**אינטגרלים - שטחים - שורשים ריבועיים במכנה - שאלות**

1. (5 יח', קיץ תשנ"ט - 99) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+6}}$



א. דרך ראשית הצירים העבירו משיק לגרף הפונקציה.

מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה הנתונה,

ע"י המשיק שמצאת, וע"י ציר  $y$ . (227)

2. (שאלון 006, קיץ תשס"ו - 2006, מועד א) נתונה הפונקציה  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

א. הראה כי הפונקציה עולה לכל  $x$ .

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיזה של גרף הפונקציה.

ד. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה הפונקציה חותכת את ציר  $x$ .

(1) הראה כי המשיק אינו חותך את הפונקציה בנקודות נוספות.

(2) המשיק נפגש עם הישר  $y = 1$  בנקודה  $A$ . מנקודה  $A$  העבירו אנך לציר  $x$ . (228)

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק, ועל ידי האנך מ- $A$ .

3. (שאלון 006, קיץ תשס"ז - 2007, מועד א)

נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = ax^2$  ( $a > 0$ ) ו-  $g(x) = \frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$  ( $b > 0$ ).

א. מצא תחומי עליה וירידה של הפונקציה  $g(x)$  (אם יש כאלה). נמק.

ב. הבע באמצעות  $b$  אסימפטוטות (אם יש כאלה) של הפונקציה  $g(x)$  המקבילות לצירים.

ג. הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בשתי נקודות בלבד. שרטט, במערכת צירים אחת,

סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  וסקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ . (229)

ד. אחת מנקודות החיתוך שבין הגרפים של שתי הפונקציות היא ב- $x = 1$ , והשטח המוגבל

על ידי הגרפים של שתי הפונקציות הוא  $\frac{5}{3} - \sqrt{2}$ . חשב את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

**שאלות**

1. א.  $y = -\frac{\sqrt{2}}{8}x$  ב.  $S = 2\sqrt{6} - 3\sqrt{2} = 0.66$  (יחידות ריבועיות)

2. ב.  $y = \pm 1$  ד. (2)  $S = 4.5 - 3\sqrt{2} = 0.2574$  (יחידות ריבועיות)

3. א.  $\nabla: \forall x, \searrow: \emptyset$  ב.  $y_{\rightarrow} = b, y_{\leftarrow} = -b$  ד.  $a = 1, b = \sqrt{2}$

1. א.

העובר דרך הראשית  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+6}}$

$$A(x_1, \frac{1}{\sqrt{x_1+6}}), \quad m_{OA} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x_1+6}} - 0}{x_1 - 0} = \frac{1}{x_1 \sqrt{x_1+6}}$$

$$f'(x) = ((x+6)^{-0.5})' = -\frac{1}{2} \cdot (x+6)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2(\sqrt{x+6})^3}$$

$$m_{OA} = f'(x_1) = -\frac{1}{2(\sqrt{x_1+6})^3} = \frac{1}{x_1 \sqrt{x_1+6}} \quad / \cdot 2(\sqrt{x_1+6})^3$$

$$\frac{2(\sqrt{x_1+6})^3}{\sqrt{x_1+6}} = -x_1 \Rightarrow -x_1 = 2(\sqrt{x_1+6})^2 = 2(x_1+6) = 2x_1 + 12$$

$$-3x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = -4 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{\sqrt{-4+6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A(-4, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$y_{AO}: f'(-4) = -\frac{1}{2(\sqrt{-4+6})^3} = -\frac{1}{2 \cdot (\sqrt{2})^3} = -\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

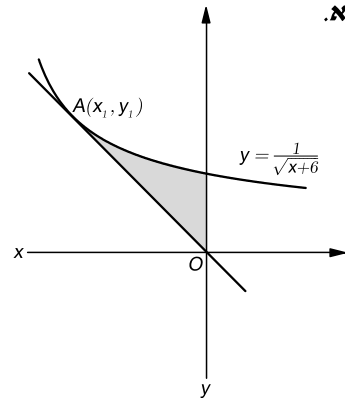
$$-\frac{\sqrt{2}}{8}(x+4) = y - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{8}x$$

ב.

$$S = \int_{-4}^0 (\frac{1}{\sqrt{x+6}} - (-\frac{\sqrt{2}}{8}x)) dx = \int_{-4}^0 (\frac{1}{\sqrt{x+6}} + \frac{\sqrt{2}}{8}x) dx$$

$$S = [\frac{(x+6)^{-0.5+1}}{-0.5+1} + \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{x^2}{2}]_{-4}^0 = [2\sqrt{x+6} + \frac{\sqrt{2}}{16}x^2]_{-4}^0$$

$$S = 2\sqrt{6} + 0 - 2\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{16} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \Rightarrow S = 2\sqrt{6} - 3\sqrt{2} = 0.66 \quad (\text{יחידות ריבועיות})$$



פונקציה מתה





**אינטגרלים - נפח גוף סיבוב - שאלות**

1. (006, חורף תשס"ח - 2008) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ ,  $a > 0$ .

א. מצא (הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך) את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה (2) נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים

(3) אסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (4) תחומי עליה וירידה של הפונקציה

ב. על פי תשובותיך לסעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה

ג. השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, ע"י הישר  $y = \sqrt{3}$  וע"י הצירים מסתובב סביב ציר  $x$ .

הבע באמצעות  $a$  את הנפח של גוף הסיבוב שמתקבל. (231)

2. (006, קיץ תשס"ח - 2008, מועד א) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2 + 3}$ .

א. מצא את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(3) השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של הפונקציה  $f(x)$ .

ג. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת הקיצון הפנימית שלה. השטח המוגבל ע"י הגרף של

של  $f(x)$ , ע"י ציר  $y$  וע"י המשיק מסתובב סביב ציר  $x$ . חשב את נפח גוף הסיבוב. (232)

3. (006, חורף תשס"ט - 2009, מועד מיוחד) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin x + \cos x$

בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ . השטח הנמצא מתחת לציר  $x$  בתחום הנתון, ומוגבל על ידי גרף הפונקציה

ועל ידי ציר  $x$ , מסתובב סביב ציר  $x$ . חשב את הנפח של גוף הסיבוב שנוצר. (233)

גוגל ראשוני	
6006LE	אם תהפכו את הכיתוב של גוגל שבציור, תקבלו את המספר הראשוני: 379,009.
(Prime curios)	

**תולדות**

1. א. (1)  $(-a \leq x < 0) \cup (0 < x \leq a)$  (2)  $(\pm a, 0)$  (3)  $x = 0$  (4) יורדת בכל תחום ההגדרה

ב. עמ' 194 ג.  $V = 2a\pi$  (יחידות קוב)

2. א. (1)  $x \geq 0$  (2)  $y \rightarrow 0$  (3)  $\min_{ep}(0, 0)$ ,  $\max(1, 1)$  ב. עמ' 194 ג.  $V = \frac{\pi}{3}$  (י"ק)

3.  $V = \pi^2$  (יחידות קוב)

**נפח גוף סיבוב - פתרונות**

**א. 1.**

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}, \quad a > 0$$

$$(1) \quad \underline{a^2 - x^2 \geq 0}, \quad x_{1,2} = \pm a, \quad -x^2 = -1 \cdot x^2, \quad -1 < 0 \Rightarrow \overset{+}{-a} \overset{-}{a} x \Rightarrow \underline{-a \leq x \leq a}$$

$$(2) \quad \underline{x \neq 0}, \quad (1) \cap (2) \Rightarrow \underline{(-a \leq x < 0) \cup (0 < x \leq a)}$$

חיתוך עם הצירים:  $(-a, 0), (a, 0)$

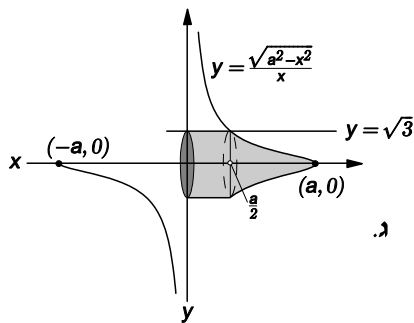
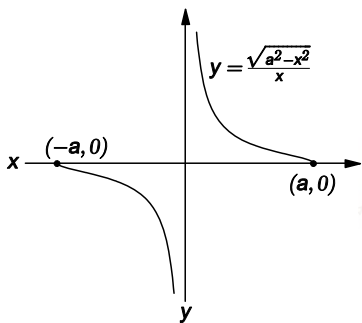
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \frac{a}{+0} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \frac{a}{-0} = -\infty \Rightarrow \underline{x = 0}$$

תחומי עליה / ירידה:

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot x - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} < 0 \quad \forall x \in \{(-a < x < 0) \cup (0 < x < a)\}$$

במילים: הנגזרת שלילית לכל  $x$  בתחום ההגדרה. לכן: הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה (✓).

**ב.**



$$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \sqrt{3} \quad / ( )^2$$

$$\frac{a^2 - x^2}{x^2} = 3 \Rightarrow a^2 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow 4x^2 = a^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{a}{2}$$

בדיקה:

$$\sqrt{3} > 0, \quad x = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} > 0 \quad (\checkmark), \quad x = -\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} < 0 \quad (\times) \Rightarrow \underline{x = \frac{a}{2}}$$

$$V = \pi r^2 h + \pi \int_{\frac{a}{2}}^a \left( \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right)^2 dx = \pi \cdot 3 \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \pi \Rightarrow \underline{V = 2a\pi} \quad (\text{יחידות קוב})$$

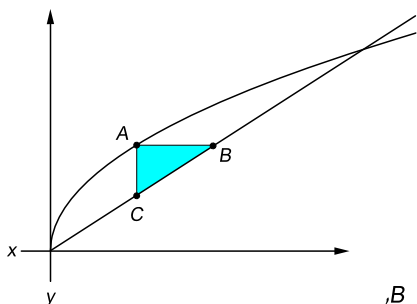
$$\begin{aligned} \pi \int_{\frac{a}{2}}^a \left( \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right)^2 dx &= \pi \int_{\frac{a}{2}}^a \left( \frac{a^2 - x^2}{x^2} \right) dx = \pi \int_{\frac{a}{2}}^a \left( \frac{a^2}{x^2} - x^2 \right) dx = \pi \int_{\frac{a}{2}}^a \left( \frac{a^2}{x^2} - 1 \right) dx = \pi \left( -\frac{a^2}{x} - x \right) \Big|_{\frac{a}{2}}^a \\ &= \pi \left( \left( -\frac{a^2}{a} - a \right) - \left( -\frac{a^2}{\frac{a}{2}} - \frac{a}{2} \right) \right) = \pi \left( -a - a + 2a + \frac{a}{2} \right) = \frac{a}{2} \pi \end{aligned}$$

**בעיות קיצון - שאלות**

1. (004, קיץ ס"ט - 2009, מועד א)

הסכום של שני היקפים, היקף ריבוע והיקף משולש שווה-צלעות, שווה ל-20cm. מה צריך להיות האורך של צלע הריבוע, כדי שהסכום של שני השטחים, שטח הריבוע ושטח המשולש, יהיה מינימלי?

(238)



2. (004, סתיו ס"ט - 2008, מועד לוחמים)

בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{1}{6}x, \quad x \geq 0$$

מהנקודה A שעל גרף הפונקציה  $f(x)$

מעבירים ישר המקביל לציר x, וישר המאונך לציר x.

הישר המקביל חותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה B,

והישר המאונך חותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה C.

נתון כי שיעור x של הנקודה A הוא  $t^2$  ( $0 < t < 6$ ).

א. הבע באמצעות t את שיעורי הנקודות B ו-C.

ב. הבע באמצעות t את שטח המשולש ABC.

ג. מצא עבור איזה ערך של t, שטח המשולש ABC הוא מקסימלי. (2392)

3. (006, קיץ ס"ד - 2004, מועד א)

הגרפים של הפונקציות  $f(x) = -x^2 + x$  ו- $g(x) = ax^2$  ( $a > 0$ ) נחתכים בנקודות M ו-O.

מהנקודה M הורידו אנך לציר x.

א. הבע באמצעות a את שיעור x של הנקודה M,

ואת השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$ , על ידי האנך ועל ידי ציר x.

ב. חשב את ערך a, שעבורו השטח שהבעת בסעיף א' הוא מקסימלי. (239)

אי אפשר לעשות פעמיים משהו בפעם הראשונה



1.  $x = \frac{20\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \text{ cm} = 2.17 \text{ cm}$

2. א.  $B(6t, t), C(t^2, \frac{t^2}{6})$  ב.  $S = \frac{1}{12}(6t - t^2)^2$  ג.  $t = 3$

3. א.  $x_M = \frac{1}{a+1}, S = \frac{a}{3(a+1)^3}$  (יחידות ריבועיות) ב.  $a = \frac{1}{2}$

**בעיות קיצון - פתרונות**

1. נסמן:  $x$  - אורך צלע הריבוע,  $k$  - אורך צלע המשולש

שטח הריבוע  $x^2$   
 $cm^2$

$$4x + 3k = 20 \Rightarrow 3k = 20 - 4x \Rightarrow k = \frac{20}{3} - \frac{4}{3}x$$

$$S_{\Delta} : S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot k^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot k^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{20}{3} - \frac{4}{3}x \right)^2$$

$$f(x) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{20}{3} - \frac{4}{3}x \right)^2$$

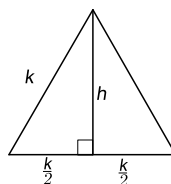
$$f'(x) = 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 \left( \frac{20}{3} - \frac{4}{3}x \right) \cdot \left( -\frac{4}{3} \right) = 2x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \left( \frac{20}{3} - \frac{4}{3}x \right) \stackrel{?}{=} 0 \quad / \cdot 9$$

$$18x - 2\sqrt{3}(20 - 4x) = 0 \Rightarrow 18x - 40\sqrt{3} + 8\sqrt{3}x = 0$$

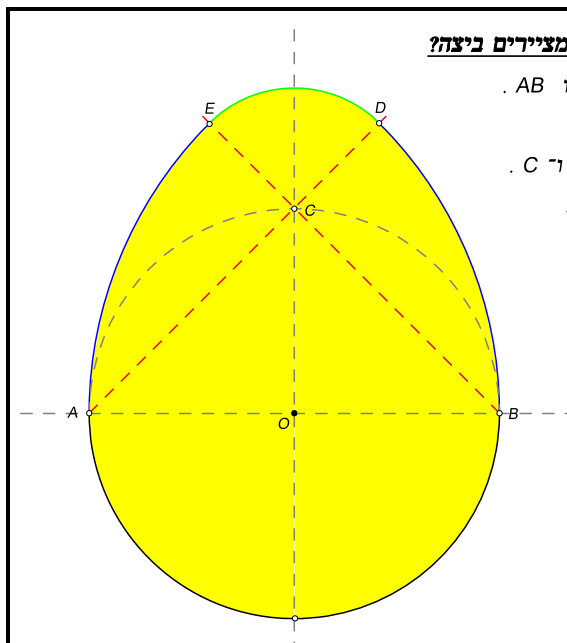
$$(18 + 8\sqrt{3})x = 40\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{18 + 8\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}}$$

$$f''(x) = (2x - \frac{80\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{9}x)' = 2 + \frac{8\sqrt{3}}{9} > 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{20\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}\right) > 0 \Rightarrow \min(\sqrt{\quad}) \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \text{ cm} = 2.17 \text{ cm}$$



**כיצד מציינים ביצה?**



- על מערכת צירים חגים מעגל שמרכזו O וקוטרו AB.
- C היא נקודת חיתוך המעגל עם ציר y.
- מעבירים ישר דרך B ו-C וישר דרך A ו-C.
- חגים קשת מעגל  $\widehat{DB}$  שמרכזו A ומחוגו AB.
- חגים קשת מעגל  $\widehat{AE}$  שמרכזו B ומחוגו BA.
- D ו-E הן נקודות חיתוך של המשך הישרים AC ו-BC עם הקשתות.
- חגים קשת מעגל  $\widehat{ED}$  שמרכזו C וחוגו CE.
- זהו. בתיאבון.

### מבנה מבחן הבגרות לשאלון 806

שאלון ר' (35806) מהווה 60% מהציון הסופי.

שאלון ז' (35807) מהווה 40% מהציון הסופי.

משך זמן המבחן: שלוש שעות וחצי .

**פרק א - בחירה: 2 שאלות מתוך 3 שאלות.**

- שאלות מילוליות - סדרות - הסתברות

**פרק ב - בחירה: שאלה אחת מתוך שתי שאלות.**

תהיה שאלה בכל נושא: - גיאומטריה במישור - טריגונומטריה במישור

**פרק ג - בחירה: 2 שאלות מתוך 3 שאלות.**

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, שורש ריבועי, פונקציות רציונליות וטריגונומטריות.

שאלה 2 שחסרה ב־13 המבחנים הראשונים שבפרק זה, עסקה באינדוקציה.

נושא זה ירד מחומר הלימודים.



#### **מה היה הצבע של הסוס הלבן של נפוליאון?**

1. כמה זמן נמשכה 'מלחמת 100 השנים'?
  2. באיזו ארץ מיוצרים כובעי פנמה?
  3. באיזה חודש חוגגים ברוסיה את מהפכת אוקטובר?
  4. על שם איזו חיה קרויים האיים הקנריים?
  5. מה היה שמו הפרטי של המלך ג'ורג' הששי?
  6. מהיכן מגיעות הדודמניות (סוג צימוקים קטנטנים) הסיניות?
  7. מה צבעה של הקופסה השחורה (המתערת ניהול טיסה)?
- תשובות: 1. 116 שנים 2. אקוודור 3. נובמבר 4. כלב 5. אלברט 6. ניו-זילנד 7. כתום

**מבחן 26 - קיץ התשע"ו - 2016 - מועד ב**

**בחירה:** שתי שאלות מהשאלות 1-3, שאלה אחת מהשאלות 4-5, שתי שאלות מהשאלות 6-8

**פרק ראשון - אלגברה והסתברות**

1. שני הטכנאים גל ודני עבדו בהרכבת מחשבים. קצב העבודה של כל אחד מהם קבוע.

א. ביום העבודה הראשון הרכיבו שני הטכנאים אותו מספר של מחשבים.

גל התחיל לעבוד בשעה 8:00, וסיים לעבוד בשעה 15:00.

דני התחיל לעבוד לאחר השעה 8:00 ולפני השעה 9:00, וסיים לעבוד בשעה 13:00.

ידוע שגל ודני הרכיבו אותו מספר של מחשבים,

מהרגע שכל אחד מהם התחיל לעבוד ועד השעה 9:00.

כמה זמן אחרי השעה 8:00 התחיל דני לעבוד?

ב. ביום העבודה השני, התחילו גל ודני לעבוד באותה שעה וסיימו לעבוד באותה שעה.

ביום זה הם הרכיבו סך הכל יחד את אותו מספר מחשבים שהרכיבו יחד ביום העבודה הראשון.

כמה זמן עבדו הטכנאים ביום העבודה השני?

2. נתונה סדרה חשבונית שיש בה  $n$  איברים. הפרש הסדרה הנתונה הוא 3.

א. בין כל שני איברים עוקבים הכניסו איבר אחד נוסף, ונוצרה סדרה חשבונית חדשה.

(1) הראה כי היחס בין סכום האיברים בסדרה החדשה לסכום האיברים בסדרה הנתונה

$$\text{הוא } \frac{2n-1}{n}.$$

(2) נתון כי היחס שמופיע בתת-סעיף (1) שווה ל- 1.9.

סכום כל האיברים שהכניסו לסדרה הנתונה הוא 130.5.

מצא את האיבר הראשון בסדרה הנתונה.

ב. יוצרים סדרה חשבונית נוספת על-ידי הכנסת  $k$  איברים בין כל שני איברים עוקבים של

הסדרה הנתונה.

הבע באמצעות  $k$  את הפרש הסדרה המתקבלת.

אתה יכול להיות סוציאליסט עד שנגמר לך הכסף של אחרים  
(מרגרט תאצ'ר, ראש ממשלת בריטניה, 1925-2013)

**השאלות**

1. א.  $t = \frac{1}{3} \text{ hour} = 20 \text{ minutes}$     ב.  $t = 5.6 \text{ hours}$

2. א. (2)  $a_1 = 1$     ב.  $d = \frac{3}{k+1}$

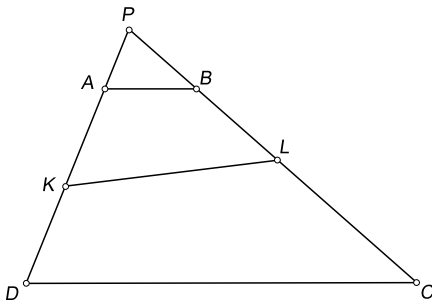
3. שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכול להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו. יעל ואנה משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים. ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לנצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.
- א. בסבב הראשון יש 4 משחקים. ההסתברות שיעל תנצח ב־2 משחקים או ב־3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב־4 משחקים.
- חשב את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.
- בסבב השני יש שני משחקים.

ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויון היא 0.34.

ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?

ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויון.

#### פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. נתון משולש PDC.

הנקודה B ו־L מונחות על הצלע PC.

הנקודות A ו־K מונחות על הצלע PD.

נתון כי המרובע ABLK הוא ב־ר־חסימה במעגל,

וגם המרובע KLCD הוא ב־ר־חסימה במעגל.

א. הוכח:  $AB \parallel DC$ .

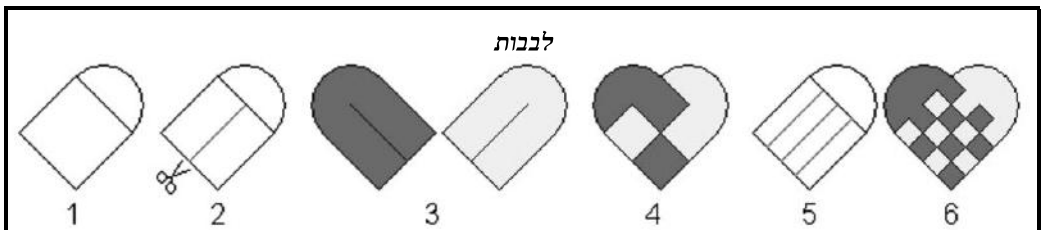
נתון גם:  $PA = 3\text{cm}$ ,  $PB = 4\text{cm}$ ,  $S_{\triangle ABP} = S_{\text{cm}^2}$ ,  $S_{ABCD} = 24 S_{\text{cm}^2}$ .

ב. האם אפשר לחסום במעגל את המרובע ABCD? נמק.

ג. מצא את אורך הצלע PD.

ד. נתון גם:  $BL = 5\text{cm}$ .

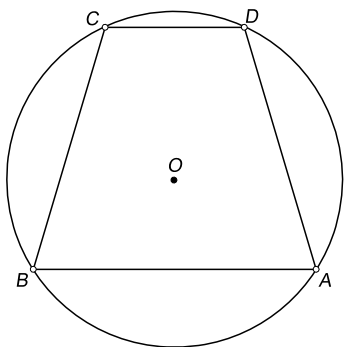
היעזר בדמיון משולשים והבע באמצעות S את שטח המרובע KLCD.



#### תשובות

3. א.  $P = \frac{1}{2}$  ב.  $P = 0.3$  ג.  $P = \frac{15}{34} = 0.4412$

4. א. לא ג.  $PD = 15\text{cm}$  ד.  $S_{KLCD} = 16 S_{\text{cm}^2}$



5. במעגל חסום טרפז  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ).

מרכז המעגל  $O$  בתוך הטרפז.

רדיוס המעגל הוא  $R$  וגובה הטרפז הוא  $h$ .

נתון:  $\angle COD = \alpha$ ,  $\angle BOA = 3\alpha$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $\angle DAB$ .

ב. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות  $\alpha$  ו- $R$ .

ג. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות  $\alpha$  ו- $h$ .

ד. נתון כי שטח המשולש  $COD$  הוא  $\frac{h^2}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ .

מצא את  $\alpha$ .

**פרק שלישי - חדו"א של פולינומים, של פונקציות שורש, פונ' רצינות ופונ' טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2 \cos^2 x - 1}{2 \cos^2 x}$ .

א. מצא בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לציר  $x$  (אם יש כאלה).

(3) נקודות החיתוך של הפונקציה  $f(x)$  עם ציר  $x$  (אם יש כאלה).

(4) השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. בתחום  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ :

(1) הראה שהפונקציה  $f(x)$  היא זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. מצא את השטח ברביע הראשון המוגבל על-ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

על-ידי ציר  $x$  ועל-ידי ציר  $y$ .

**ההברל בין תרבות ישראל לתרבות יוון**

הרב שלמה גורן ז"ל (1918-1994) הגדיר את מלחמת התרבות ההיסטורית בין ישראל ליוון כך:  
לפי תרבות יוון: מה שיפה - טוב. לפי תרבות ישראל: מה שטוב - יפה.

**תשובות**

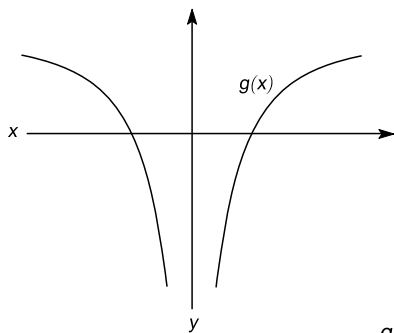
5. א.  $\angle DAB = \angle CBA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$  ב.  $AD = BC = 2R \cos \alpha$  (יחידות אורך)

ג.  $AD = BC = \frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}}$  (יחידות אורך) ד.  $\alpha = 30^\circ$

6. א. (1)  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  (2)  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  (3)  $(\frac{\pi}{4}, 0)$  (4)  $\max_{ep.} (0, \frac{1}{2})$

ג.  $S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = 0.2854$  (יחידה ריבועית)





7. בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $g(x)$ .

$$g(x), g'(x), g''(x)$$

מוגדרות לכל  $x \neq 0$ ,

ואין להן נקודות קיצון או נקודות פיתול.

הישר  $x = 0$  הוא האסימפטוטה האנכית

לכל אחד מן הגרפים של הפונקציות האלה.

א. (1) סרטוט סקיצה של גרף פונקציה הנגזרת  $g'(x)$ .

נמק את שיקולידך.

(2) סרטוט סקיצה של גרף פונקציה הנגזרת השנייה  $g''(x)$ . נמק את שיקולידך.

נתון כי השטח המוגבל על-ידי הגרף של פונקציה הנגזרת השנייה  $g''(x)$ ,

על-ידי ציר  $x$  ועל-ידי הישרים  $x = 1$  ו-  $x = 2$  שווה ל- 5.25.

ב. הישר  $x = 1$  חותך את הגרף של פונקציה הנגזרת  $g'(x)$  בנקודה  $A$ ,

והישר  $x = 2$  חותך גרף זה בנקודה  $B$ .

מצא את ההפרש בין שיעור  $y$  של הנקודה  $A$  ובין שיעור  $y$  של הנקודה  $B$ . נמק.

ג. הביטוי  $y = \frac{a}{x^3}$  מתאר אחת מן הפונקציות  $g(x), g'(x), g''(x)$ .  $a > 0$  פרמטר.

(1) קבע איזו מן הפונקציות הביטוי מתאר. נמק את קביעתך.

(2) מצא את הערך של  $a$ .

8. במשולש ישר-זווית  $ABC$  ( $\angle ABC = 90^\circ$ ) אורך היתר הוא  $k_{cm}$  ( $k$  הוא פרמטר).

הניצב  $AB$  הוא גם יתר במשולש  $ADB$ , שהוא שווה-שוקיים וישר-זווית ( $\angle ADB = 90^\circ$ ).

א. סמן  $AB = x$  והבע את  $BC$  באמצעות  $x$  ו-  $k$ .

ב. נתון כי הערך המקסימלי של המכפלה  $BC \cdot AD^2$  הוא  $3\sqrt{3}$ .

מצא את שטח המשולש  $ADB$  (ערך מספרי), כאשר המכפלה  $BC \cdot AD^2$  היא מקסימלית.

### בהצלחה

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

### תשובות

7. א.  $y_A - y_B = 5.25$  ב.  $g'(x)$  (1) ג.  $a = 6$  (2)

8. א.  $BC = \sqrt{k^2 - x^2}$  cm ב.  $S_{\triangle ADB} = 1.5$  cm<sup>2</sup>

**פתרון מבחן 26**

1. א. x - הספק של גל (מספר מחשבים לשעה), y - הספק של דני (כנ"ל)

t - הזמן שדני עבד בין 8:00 ל-9:00 ביום הראשון.

(I)  $7x = (4 + t)y$       שוויון עבודה של היום הראשון

(II)  $x = ty$       שוויון עבודה מתחילת העבודה עד השעה 9:00

(I)  $7 \cdot ty = (4 + t)y \Rightarrow 7t = 4 + t \Rightarrow 6t = 4$

$\Rightarrow t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - t = \frac{1}{3} \text{hour} = 20 \text{minutes}$

בטבלה (P - הספק, T - זמן, W - עבודה):

		P	T	W
Gal	8 → 9	x	1	x
	9 → 15	x	6	6x
Dani	8 → 9	y	t	ty
	9 → 13	y	4	4y

$\Rightarrow$  (I)  $ty = x$   
 $\Rightarrow$  (II)  $6x = 4y$

אפשר גם:

עד 9:00 הם הרכיבו מספר שווה של מחשבים, וכך גם במשך כל אותו יום עבודה ראשון.

לכן גם בין השעה 9:00 לסיום עבודתם הם הרכיבו מספר שווה של מחשבים.

משך זמן זה של גל היה  $6 = 15 - 9$  ושל דני  $4 = 13 - 9$ .

לכן יחס הזמנים שלהם לאותה עבודה הוא  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

מכאן שעבור עבודה שווה, כשזמן העבודה של גל הוא שעה אחת

- זמן העבודה של דני הוא  $\frac{2}{3}$  של אותה שעה.

**ב.**

(II)  $x = ty = \frac{2}{3}y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$

ביום הראשון ההספק של שניהם היה  $14x = 7x + \frac{14}{3} \cdot \frac{3}{2}x$

ביום השני הם עבדו במשך k שעות.

הספקם הכולל לשעה הוא  $x + 1.5x = 2.5x$

הספקם באותו יום היה, אם כן  $2.5x \cdot k$  וזה שווה, לפי הנתון, ל- $14x$ .

מכאן:

$2.5x \cdot k = 14x \Rightarrow k = \frac{14}{2.5} = 5.6 \text{hours}$

(גם כאן ניתן להמחיש בטבלה, אבל אין בכך צורך).

ההבדל בין זכוכית, שדרכה אדם רואה אנשים מצידה האחר,

לבין מרְאָה, שבה אדם רואה רק את עצמו. הוא שהמְרָאָה מצופה בכסף . . .

2. א. (1) בין  $n$  איברים יש  $(n-1)$  מקומות. לכן מספר איברי הסדרה החדשה הוא  $2n-1$ .

האיבר הראשון  $(a_1)$  והאיבר האחרון  $(a_n)$  זהים בשתי הסדרות.

$$\frac{S_{\text{new}}}{S_{\text{given}}} = \frac{\frac{2n-1}{2}(a_1+a_n)}{\frac{n}{2}(a_1+a_n)} = \frac{2n-1}{2} : \frac{n}{2} = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2}{n} \Rightarrow \frac{S_{\text{new}}}{S_{\text{given}}} = \frac{2n-1}{n} \quad (\checkmark)$$

(2)

$$(I) \quad \frac{2n-1}{n} = 1.9 \Rightarrow 2n-1 = 1.9n \Rightarrow 0.1n = 1 \Rightarrow n = 10$$

$$(II) \quad S_{\text{new}} - S_{\text{given}} = 130.5 \Rightarrow \frac{2n-1}{2}(a_1+a_n) - \frac{n}{2}(a_1+a_n) = 130.5$$

$$\frac{a_1+a_n}{2}(2n-1-n) = \frac{n-1}{2}(a_1+a_n) = \frac{9}{2}(a_1+a_1+9 \cdot 3) = \frac{9}{2}(2a_1+27) = 130.5 \quad /: \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1+27=29 \Rightarrow 2a_1=2 \Rightarrow a_1=1$$

ב. הכנסת  $k$  איברים בין שני איברים סמוכים, יוצרת סדרה של  $k+2$  איברים.

מספר המרווחים בין איברים אלו הוא  $k+1$ .

כדי שהסדרה תהיה חשבונית - מרווחים אלו צריכים להיות שווים.

מכיון שהמרווח בין הקצוות הוא 3, הרי המרווח בין כל שני איברים אלו צריך להיות  $\frac{3}{k+1}$ .

3. א.  $p$  - ההסתברות של יעל לנצח במשחק בודד.

$$\left(\frac{4}{5}\right) \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 + \left(\frac{4}{3}\right) \cdot p^3 \cdot (1-p) = 10 \cdot p^4 \quad /: p^2 \Rightarrow 6(1-p)^2 + 4p(1-p) = 10p^2$$

$$6 - 12p + 6p^2 + 4p - 4p^2 = 10p^2 \Rightarrow 8p^2 + 8p - 6 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-8 \pm 16}{16} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

ב.  $q$  - ההסתברות של אנה לנצח במשחק בודד.

$Y$  - נצחון של יעל,  $A$  - נצחון של אנה,  $T$  - משחק בודד שהסתיים בתיקו

1 - משחק ראשון, 2 - משחק שני

$$P(Y_1) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(Y_2) + P(T_1) \cdot P(T_2) = 0.34$$

$$\frac{1}{2} \cdot q + q \cdot \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2} - q)^2 = q + (\frac{1}{2} - q)^2 = q + \frac{1}{4} - q + q^2 = q^2 + \frac{1}{4} = 0.34$$

נתון

$$\Rightarrow q^2 = 0.09 \Rightarrow q = 0.3$$

ג.  $D$  - סבב שהסתיים בתיקו (draw)

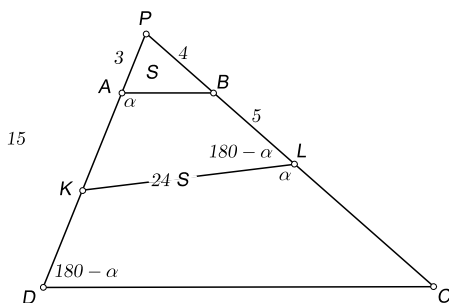
$$P(A_2/D) = \frac{P(A_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(Y_1) \cdot P(A_2)}{0.34} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{0.34} \Rightarrow P = \frac{15}{34} = 0.4412$$

כל הספרות מ" 1 עד 9 מופיעות כאן פעם אחת בריוק (למעט החזקה עצמה)  $567^2 = 321,489$   
 המספר הנוסף היחיד עם תכונה זו הוא:  $854^2 = 729,316$

$$(1) \angle BAK = \alpha \Rightarrow^{(2)} \angle BLK = 180^\circ - \alpha$$

$$(3) \angle KLC = \alpha \Rightarrow^{(2)} \angle D = 180^\circ - \alpha$$

$$\angle BAK + \angle D = 180^\circ \Rightarrow^{(4)} AB \parallel DC \quad (\checkmark)$$



ב.

אם ABCD הוא בר־חסימה במעגל, אזי:

$$(2) \angle C = 180^\circ - \alpha = \angle D \Rightarrow^{(5)} PD = PC$$

$$(6) \angle PAB = \angle D = 180^\circ - \alpha, \angle PBA = \angle C = 180^\circ - \alpha \Rightarrow^{(7)} \angle PAB = \angle PBA$$

$$(5) PA = PB \Rightarrow \times \leftarrow \{PA = 3_{cm}, PB = 4_{cm}\} \Rightarrow \underline{\text{לא}}$$

ג.

$$(8) \frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC} \Rightarrow^{(9)} \triangle PAB \sim \triangle PDC \Rightarrow^{(10)} \left(\frac{PA}{PD}\right)^2 = \frac{S}{25S} = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{PD} = \frac{1}{5} \Rightarrow PD = 15_{cm}$$

ד.

$$(11) \triangle PLK \sim \triangle PDC \Rightarrow^{(10)} \frac{S_{\triangle PLK}}{25S} = \left(\frac{PL}{PD}\right)^2 = \left(\frac{9}{15}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{\triangle PLK} = 9S$$

$$S_{KLCD} = S_{\triangle PDC} - S_{\triangle PLK} = 25S - 9S \Rightarrow S_{KLCD} = 16S_{cm^2} \quad (\text{יחידות ריבועיות})$$

(1) סימון (2) זוויות נגדיות במרובע בר־חסימה במעגל, משלימות ל- $180^\circ$

(3) השלמה ל- $180^\circ$  של זווית שטוחה

(4) אם זוויות חד־צדדיות של שני ישרים הנחתכים על־ידי ישר שלישי, משלימות ל- $180^\circ$

- שני הישרים מקבילים זה לזה

(5) מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות

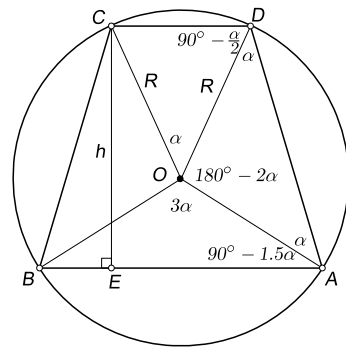
(6) זוויות מתאימות במקבילים הנחתכים על־ידי ישר שלישי, שוות זו לזו (7) כלל המעבר

(8) תאלס (9) משפט דמיון צלע־זווית־צלע (אפשר גם זווית־זווית על־פי  $AB \parallel DC$ )

(10) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון (11) משפט דמיון זווית־זווית

ראש הממשלה לשעבר אהוד ברק. נשאל פעם (אוגוסט 2000) להערכתו את הסיכויים את הסיכוי להקמת ממשלת אחדות לאומית בשבועות הקרובים, וענה: "50-50, כמו כל דבר שיש לגביו שתי אפשרויות...".

5. א.



טרפז חסום במעגל הוא שווה-שוקיים. משפט זה אינו ברשימת המשפטים, לכן יש להוכיחו, אם משתמשים בו: זוויות נגדיות במרובע בר-חסימה משלימות ל- $180^\circ$ . זוויות חד-צדדיות במקבילים הנחתכים על-ידי ישר שלישי משלימות ל- $180^\circ$ . מכלל המעבר: זוויות בסיס הטרפז שוות זו לזו. טרפז שזוויות בסיסיו שוות זו לזו הוא שווה-שוקיים.

$$(1, 2) \angle ODC = \frac{180^\circ}{2} - \alpha, \quad \angle OAB = \frac{180^\circ}{2} - 3\alpha, \quad (2) \angle OAD = \angle ODA = \beta \quad (3)$$

$$(4) \angle DAB + \angle ADC = 180^\circ \Rightarrow (90^\circ - \frac{3\alpha}{2} + \beta) + (90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \beta) = 180^\circ \Rightarrow 2\beta = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha \Rightarrow \angle DAB = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2} + \alpha \Rightarrow \angle DAB = \angle CBA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

ב.

$$\triangle AOD: (5) \frac{AD}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{R}{\sin \alpha} \Rightarrow (6) AD = \frac{R \sin 2\alpha}{\sin \alpha} = (7) \frac{R \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow AD = BC = 2R \cos \alpha \quad (\text{יחידות אורך})$$

ג.

$$\triangle CEB: \sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \frac{h}{BC} \Rightarrow BC = \frac{h}{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \Rightarrow (8) AD = BC = \frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}} \quad (\text{יחידות אורך})$$

ד.

$$(9) 2R \cos \alpha = \frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow R = \frac{h}{2 \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$S_{\triangle COD} = \frac{R^2 \sin \alpha}{2} = (10) \frac{h^2 \sin \alpha}{4 \cos^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot 2} = (11) \frac{h^2}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{24 \cos^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{h^2}$$

$$3 \sin \alpha = 2 \cos^2 \alpha = (12) 2(1 - \sin^2 \alpha) \Rightarrow 3 \sin \alpha = 2 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha - 2 = 0 \Rightarrow (\sin \alpha)_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow (\sin \alpha)_1 = \frac{1}{2}, \quad (\sin \alpha)_2 = -2$$

$$|\sin \alpha| < 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}, \quad (13) 0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

(1) השלמה ל- $180^\circ$  במשולש (2) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים, שוות זו לזו (3) סימון

(4) זוויות חד-צדדיות במקבילים הנחתכים על-ידי ישר שלישי, משלימות ל- $180^\circ$

(5) משפט הסינוסים (6)  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  (7)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

(8)  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$  (9) כלל המעבר (10) הצבה (11) נתון

(12)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  (13)  $\alpha + 3\alpha < 360^\circ \Rightarrow \alpha < 90^\circ$

1. א. 6

$$f(x) = \frac{2 \cos^2 x - 1}{2 \cos^2 x}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$$

$$2 \cos^2 x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2 \cos^2 x - 1}{2 \cos^2 x} = \frac{2 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0} = \frac{-1}{+0} = -\infty \Rightarrow x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

(3)

$$y = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

(4)

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2 \cos^2 x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\cos^4 x} \cdot 2 \cos x (-\sin x)\right) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0$$

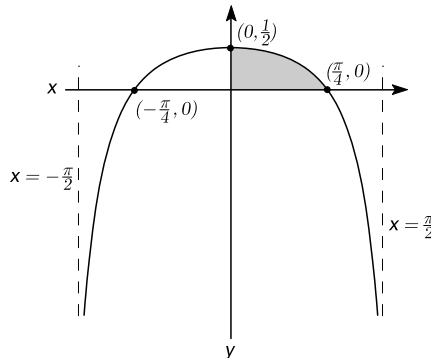
x	0		$\frac{\pi}{2}$
f'	0	$-\frac{+}{+} = -$	$\emptyset$
f	max <sub>ep.</sub>	$\searrow$	asym.

$$f(0) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \max_{ep.} \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

1. ב.

$$f(-x) = \frac{2 \cos^2(-x) - 1}{2 \cos^2(-x)} = \frac{2 \cos^2 x - 1}{2 \cos^2 x} = f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x) \quad (\checkmark)$$

$\cos(-x) = \cos x$



(2)

(סימון השטח - עבור סעיף ג.)

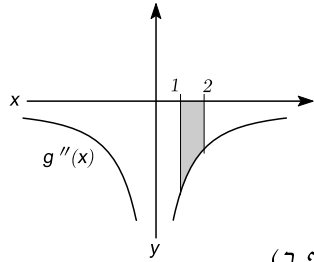
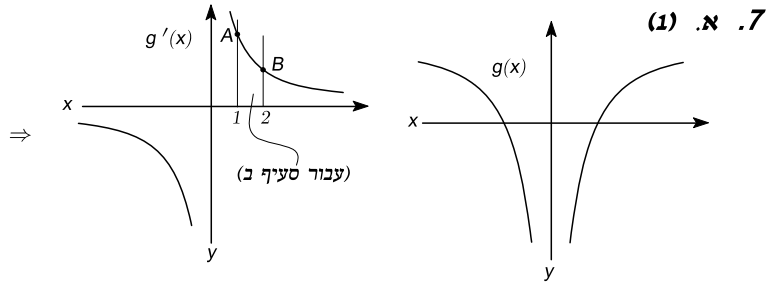
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 x}\right) dx = \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0)$$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = 0.28548 \quad (\text{יחידה ריבועית})$$

ג.

ב-1989, עת מלאת 200 שנה למהפכה הצרפתית (ב-1789) נשאל צ'ו אן לאיי, ראש ממשלת סין אז, כיצד הוא מסכם היום את המהפכה הצרפתית. תשובתו המפתיעה היתה: "עוד מוקדם להעריכה היום..."

x		0	
g	↘	asym.	↗
g'	-	asym.	+



(סימון השטח - עבור סעיף ב.)

x		0	
g'	↘	asym.	↘
g''	-	asym.	-

(2)

$$S = \left| \int_1^2 g''(x) dx \right| \stackrel{(*)}{=} g'(x) \Big|_1^2 = g'(2) - g'(1) = 5.25 \Rightarrow y_A - y_B = 5.25$$

(\*) הפיכת גבולות האינטגרציה לקיזוז שליליות השטח (שמתחת לציר x).

ג. (1) הביטוי  $y = \frac{a}{x^3}$ , כאשר  $a > 0$ , הינו שלילי עבור  $x < 0$  וחיובי עבור  $x > 0$ .

לפי ציורי הגרפים - מתאים רק ל-  $g'(x)$ .

(2)

$$g'(1) - g'(2) = \frac{a}{1^3} - \frac{a}{2^3} = 5.25 \Rightarrow \frac{7}{8}a = 5.25 = \frac{21}{4} \Rightarrow a = \frac{21}{4} \cdot \frac{8}{7} \Rightarrow a = 6$$

א. 8

$$BC = \sqrt{k^2 - x^2} \text{ cm} \quad \text{פיתגורס}$$

$$2AD^2 = AB^2 = x^2 \Rightarrow AD^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$BC \cdot AD^2 = f(x) = \sqrt{k^2 - x^2} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{k^2 - x^2}} \cdot \frac{x^2}{2} + \sqrt{k^2 - x^2} \cdot x = \frac{-x^3 + 2x(k^2 - x^2)}{2\sqrt{k^2 - x^2}} = \frac{2k^2x - 3x^3}{2\sqrt{k^2 - x^2}} \stackrel{?}{=} 0$$

$$2k^2x - 3x^3 = 0 \quad / : x (> 0) \Rightarrow 3x^2 = 2k^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} k$$

מכיון שמכנה  $f'$  חיובי עבור ה-  $x$  החשוד, מספיק לגזור את המונה של  $f'$  כדי לזהות

את סימן  $f'$  עבור אותו  $x$  על-ידי הצבתו בנגזרת של מונה  $f'$ :

$$(2k^2x - 3x^3)' = 2k^2 - 9x^2 \Rightarrow 2k^2 - 9 \cdot \frac{2k^2}{3} = -4k^2 < 0 \Rightarrow \max (\checkmark)$$

הצבת ה-  $x$  החשוד בנגזרת של מונה  $f'$

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}} k\right) = \sqrt{k^2 - \frac{2k^2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2k^2}{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{3}} \cdot \frac{k^2}{3} = 3\sqrt{3} \quad / \cdot 3\sqrt{3} \Rightarrow k^3 = 3^3 \Rightarrow k = 3$$

$$S_{\triangle ADB} = \frac{AD^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot x^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} k^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \Rightarrow S_{\triangle ADB} = 1.5 \text{ cm}^2$$