

אלי מיטב

מבחני בגרות במתמטיקה לשאלון **482** (805)

עם תשובות סופיות

- | | | | |
|-----|---------------------------------|-----|----------------------------------|
| 127 | 6 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד ב | 1 | גידול ודעיכה |
| 129 | 7 - חורף תשע"ב - 2012 | | סדרות |
| 131 | 8 - קיץ תשע"ב - 2012 - מועד א | 8 | - חשבונית |
| 133 | 9 - קיץ תשע"ב - 2012 - מועד ב | 20 | - הנרסית |
| 135 | 10 - חורף תשע"ג - 2013 | 27 | - הנרסית אינסופית מתכנסת |
| 137 | 11 - חורף תשע"ג - 2013 - לוחמים | 31 | - מעורבות (חשבונית והנרסית) |
| 139 | 12 - קיץ תשע"ג - 2013 - מועד א | 34 | - כלליות |
| 142 | 13 - קיץ תשע"ג - 2013 - מועד ב | 36 | - המוגדרות ע"י נסיגה |
| 145 | 14 - קיץ תשע"ג - 2013 - לוחמים | 42 | טריגונומטריה במרחב |
| 148 | 15 - חורף תשע"ד - 2014 | | חשבון דיפרנציאלי |
| 151 | 16 - חורף תשע"ד - 2014 - לוחמים | 56 | - פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות |
| 153 | 17 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד א | 73 | - פונקציות טריגונומטריות |
| 155 | 18 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד ב | | חשבון אינטגרלי - שטחים |
| 158 | 19 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד ג | 86 | - פונקציות מעריכיות |
| 160 | 20 - סתו תשע"ה - 2014 - מועד ד | 97 | - פונקציות שפתרון לוגריתמי |
| 162 | 21 - חורף תשע"ה - 2015 | 104 | - פונקציות טריגונומטריות |
| 164 | 22 - חורף תשע"ה - 2015 - לוחמים | | מבחני בגרות |
| 166 | 23 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד א | 116 | מבנה מבחן הבגרות |
| 169 | 24 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד ב | 117 | 1 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד א |
| 172 | 25 - חורף תשע"ו - 2016 | 119 | 2 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד ב |
| 175 | 26 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד א | 121 | 3 - קיץ תש"ע - 2010, המבחן הגנוז |
| 177 | 27 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד ב | 123 | 4 - חורף תשע"א - 2011 |
| 182 | נוסחאון הבגרות לארבע יחידות | 125 | 5 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד א |

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יצאו גם לשאלונים 481-581-582

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יצאו לשאלונים 382-481-482-581-582

מספר מילים לפני

ספר זה מכיל שאלות ממבחני בגרות מהשנים 1967-2016, המתאימות לשאלון 482 (805) בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. השאלות מחולקות לפי נושאים. לכל שאלה תשובה סופית בעמוד השאלה. 27 מבחני הבגרות של שאלון זה שנערכו עד כה, מובאים אף הם בחלקו השני של הספר.

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

\forall - לכל , \in - שייך , \nearrow - עליה , \searrow - ירידה , U - איחוד: היחס 'או' , \emptyset - קבוצה ריקה
 $\sqrt{\quad}$ - אישור למה שבקשנו לברוק או להוכיח , ab - מוחלט , $ep.$ - נקודת קצה (end point)

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוטי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוטי עריכה. דיוקים נדרשים הושטמו ככוונה.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ-2012 (נכון להיום), כפי שהם מופיעים בספר המקביל של הפתרונות המלאים, נמצאים באתר ההוצאה במקושת (internet), בעלות שנתית מצחיקה של 20 (עשרים) שקלים בלבד. ראו בגב הכריכה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי ברואל. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורים מארכימדס - פתרונות למידה ולמורה שריף אמארה מכפר יז'פה.

לאחר כל מבחן בגרות שיערך בשנה הקרובה (התשע"ז - 2017), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את חלק מהחללים שבין השאלות והפתרונות קלחתי בהבוקי אנקדוטות וסיפורים. רוב ה'הבוקים' קשורים למתמטיקה, חלקם אינו כזה, וביניהם גם אנקדוטות בעלות אופי לאומי או יהודי.

ב ה צ ל ח ה



© כל הזכויות על השאלות שמורות למרינת ישראל - משרד החינוך, התרבות והספורט

כל הזכויות על הקדר ועל הפתרונות שמורות למחבר

האיורים בספר צוירו עלידי אלכסנדר לויטס מקיבוץ גשור שברמת הגולן.
 אלכסנדר הוא אביו של סרן דמיטרי (דימה) לויטס ז"ל, שנהרג ביצוק איתן.

גידול ודעיכה

(כל השאלות שלא צוין מקורן - הן משאלון 004).

1. (4 יח', קיץ תש"ן - 90) בשמורת טבע בוצעו שתי מדידות של אוכלוסיית עופות דורסים. במדידה הראשונה נמצאו 1100 עופות, במדידה השנייה, שנערכה שמונה חודשים לאחר מכן, נמצאו 1510 עופות (הנח גידול מעריכי של אוכלוסיית העופות).
חשב כעבור כמה חודשים מהמדידה הראשונה תגיע אוכלוסיית העופות ל-4800.
2. (5 יח', קיץ תש"ן - 90) 'זמן מחצית החיים' של חומר רדיואקטיבי הוא פרק הזמן שבסופו נשארת מחצית מכמותו ההתחלתית. נגדיר 'זמן רבע חיים' של חומר רדיואקטיבי כפרק הזמן שבסופו נשארת רבע מכמותו ההתחלתית.
זמן רבע החיים של חומר א שווה לזמן מחצית החיים של חומר ב. אם מ⁻ 100gr של חומר א נשארו 80gr כעבור 4 שנים, מאיזו כמות של חומר ב יישארו 80gr כעבור 4 שנים?
3. (4 יח', קיץ תשנ"ג - 93) כמות הדגים בבִּרְכַת דגים גדלה ב־ 8% בכל שבוע. הכמות ההתחלתית של הדגים היא 5 טון.
כעבור 9 שבועות מכרו 5 טון דגים, והמשיכו לגדל את הדגים הנותרים באותם התנאים.
כעבור x שבועות נוספים היו בבִּרְכַת 10 טון דגים. חשב את x.
4. (5 יח', קיץ תשנ"ג - 93) כמות הדגים בבִּרְכַת דגים גדלה ב־ p% בכל שבוע. הכמות ההתחלתית של הדגים היא k טון.
כעבור x שבועות מכרו k טון דגים, והמשיכו לגדל את הדגים הנותרים באותם התנאים.
כעבור x שבועות נוספים היו בבִּרְכַת 2k טון דגים. בטא את x באמצעות p.
5. (חורף ס"ז - 2006) במדינה מסוימת נערך לראשונה מפקד אוכלוסין.
9 שנים אחרי מפקד האוכלוסין הראשון נערך מפקד שני, ונמצא שהאוכלוסיה גדלה פי שניים. הנח שהאוכלוסיה גדלה בצורה מעריכית.
א. פי כמה גדלה האוכלוסיה 17 שנים אחרי המפקד הראשון?
ב. כמה שנים אחרי המפקד הראשון גדלה האוכלוסיה ב־ 75%?

למספר הראשוני 23, 333, 333, 333, 333, 333, 333 יש 23 ספרות!



- | | | | | | | |
|------------|-----|----|--|----|------------|----|
| 7.27 years | 3.7 | .5 | x = 9.019 weeks | .3 | 37.2 month | .1 |
| | | | $x = \frac{\ln 2}{\ln(1 + \frac{p}{100})}$ | .4 | 89.44gr | .2 |

סדרות

סדרה חשבונית

1. (4 יח', חורף תש"ל - 70)

הוכח: אם הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ היא חשבונית, אז:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n} \quad \left(\frac{1}{ab} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \text{ היעזר בשוויון} \right)$$

2. (4 יח', קיץ תש"ל - 70)

האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא 100, והפרשה - 6. בסדרה זו איברים חיוביים ושליליים. כמה איברים עוקבים, לכל היותר, של הסדרה הנ"ל, החל בראשון, יש לחבר כדי שסכומם יהיה עדיין חיובי? מהו סכום כל האיברים האלה?

3. (4 יח', חורף תשל"א - 71)

באולימפיאדה מתמטית לתלמידי בת"ס על-יסודיים חולקו פרסים בסכום כולל של 4050 ש. הפרס הראשון (הגדול ביותר) היה גדול פי ארבע מהפרס האחרון (הקטן ביותר). כל פרס היה קטן מקודמו ב-54 ש. כמה פרסים חולקו באולימפיאדה הנ"ל?

4. (4 יח', קיץ תשל"ב - 72)

נתונה סדרה חשבונית: $37.6, -13.4, -13.7, -14, \dots, (37.6 \text{ האחרון})$.

- א. מצא את סכום האיברים במקומות הזוגיים (ז"א במקום השני, הרביעי וכו') בסדרה הנ"ל.
 ב. מהו סכום האיברים השליליים בסדרה הנ"ל?

5. (4 יח', קיץ תשל"ג - 73)

בסדרה חשבונית $2n$ איברים. סכום n האיברים האחרונים בסדרה זו גדול פי שלושה מסכום n האיברים הראשונים בסדרה. האיבר השמיני בסדרה הנ"ל שווה ל-45. מצא את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה הנ"ל.

$$100 = \text{מבחן}$$

$$! 40 + 2 + 8 + 50 = 100 \text{ הגימטריה של 'מבחן' היא בדיוק מאה:}$$



4. א. 1014.8 ב. -333.7

2. $n = 34, S_{34} = 34$

5. $a_1 = 3, d = 6$

3. 10

סדרות - סדרה הנדסית

1. (4 יח', קיץ תשכ"ז - 67)

בסדרה הנדסית $2n$ איברים. האיבר הראשון בסדרה שווה ל-1.
 בסדרה זו שווה סכום n האיברים העומדים במקומות הזוגיים ל-682,
 וסכום n האיברים במקומות האי-זוגיים ל-341.
 מצא את מנת הסדרה ואת מספר האיברים שבה.

2. (4 יח', חורף תשכ"ט - 69)

בריכת מים ריקה נתמלאה מים במשך חמש שעות במהירות פוחתת:
 כמות המים שנכנסה בכל שעה מהווה חלק מסוים, קבוע, מן הכמות שנכנסה בשעה הקודמת.
 הכמות שנכנסה בארבע השעות הראשונות היתה פי שניים מן הכמות שנכנסה בארבע השעות
 האחרונות (מתוך החמש).
 בשעתיים הראשונות נכנסו לבריכה 48 מ"ק מים.
 מצא את נפח הבריכה.

3. (4 יח', קיץ תשל"ל - 70)

הוכח: אם שלושה מספרים חיוביים שונים a, b, c , לפי הסדר, שלושה איברים עוקבים בסדרה
 הנדסית, הרי: $a^n + c^n > 2b^n$ עבור כל n טבעי.

4. (4 יח', חורף תשל"ד - 74) בסדרה הנדסית $2n$ איברים.

א. הוכח: האיברים העומדים במקומות הלא-זוגיים, מהווים סדרה הנדסית.
ב. הוכח: בסדרה הנ"ל (המורכבת מ- $2n$ איברים) היחס בין סכום n האיברים העומדים במקומות
 הזוגיים לבין סכום n האיברים העומדים במקומות הלא-זוגיים שווה למנת הסדרה הנ"ל.

5. (4 יח', קיץ תשל"ד - 74)

את המספר 65 חילקו לארבעה מחוברים חיוביים, המהווים סדרה הנדסית.
 ההפרש בין שני המחוברים הראשונים (ז"א ההפרש בין האיבר השני של הסדרה לראשון) גדול פי
 $2\frac{1}{4}$ מההפרש שבין שני המחוברים האחרונים.
 מצא את אותם ארבעה מחוברים.



5. 27, 18, 12, 8

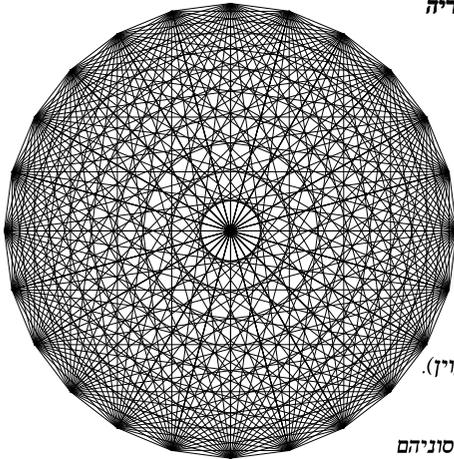
2. $V = 62m^3$

1. $q = 2, 2n = 10$

24. (005, קיץ תשע"ב - 2012, לוחמים)

- האיבר הראשון בסדרה הנדסית נתונה הוא a_1 ומנת הסדרה היא q .
 בין כל שני איברים סמוכים הכניסו איבר נוסף כך שנוצרה סדרה הנדסית חדשה,
 שכל איבריה חיוביים והמנה שלה היא q_0 .
- א. הבע באמצעות q את המנה q_0 של הסדרה ההנדסית החדשה.
- ב. נתון כי האיבר השני בסדרה החדשה קטן פי 2 מהאיבר השני בסדרה הנתונה. חשב את q .
- ג. מספר האיברים בסדרה החדשה הוא 9.
- (1) מצא את מספר האיברים בסדרה הנתונה.
- (2) נתון כי סכום הסדרה החדשה גדול ב-340 מסכום הסדרה הנתונה. חשב את a_1 .

יופי של גאומטריה



בציור מתואר מצולע משוכלל בעל 24 צלעות, וכל אלכסוניו.
 מספר נקודות המפגש הפנימיות של אלכסוניו,
 הוא 7297 - שהוא מספר ראשוני.
 במספר זה כלולים:

- 6144 נקודות מפגש משותפות לשני אלכסונים.
- 864 נקודות מפגש משותפות לשלושה אלכסונים.
- 264 נקודות מפגש משותפות לארבעה אלכסונים.
- 24 נקודות מפגש משותפות לחמישה אלכסונים.

ונקודת מפגש אחת משותפת ל-12 אלכסונים (מרכז המעיין).

$$\text{סה"כ: } 6144 + 864 + 264 + 24 + 1 = 7297.$$

מצולעים משוכללים נוספים שמספר נקודות המפגש של אלכסוניהם

הוא מספר ראשוני, אלו המצולעים שמספר צלעותיהם הוא:

5, 6, 14, 44, 58, 72, 76, 80, 84, 86, 104, 128, 134, 138, 180,

360, 360, 186, 188, 218, 228, 246, 256, 266, 280, 300, 320, 352

מספר נקודות החיתוך הפנימיות של אלכסוני המצולע האחרון (360 צלעות), הוא 677, 630, 881 - מספר ראשוני.

(Prime curios, Chris K. Caldwell and G. L. Honaker, Jr.)



תשובות

24. א. $q_0 = \sqrt{q}$ ב. $q = 4$ ג. (1) 5 איברים (2) $a_1 = 2$

סדרות - סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת

1. (4 יח', קיץ תשל"א - 71)

הוכח: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{3}{7^4} + \dots = \frac{17}{48}$ (המכנים של השברים מהווים סדרה הנדסית אינסופית, והמונים 2, 3 חוזרים כל הזמן כפי שנראה הדבר באיברים הכתובים).

2. (4 יח', קיץ תשל"ט - 79)

מצא את a_1 בטור הנדסי יורד שסכמו 3 וסכום ריבועי איבריו הוא 1.

3. (4 יח', קיץ תשמ"ג - 83)

נתון טור הנדסי אינסופי שסכמו גדול פי 3.5 מסכום האיברים במקומות הזוגיים. פי כמה גדול סכום הטור מסכום האיברים במקומות האי זוגיים?

4. (4 יח', קיץ תשמ"ד - 84) נתון טור גיאומטרי אינסופי שסכמו 16.

סכום ארבעה האיברים הראשונים בטור זה הוא 15. מהי מנת הטור? (מצא את כל הפתרונות).

5. (4 יח', קיץ תשמ"ז - 87)

האיבר הראשון של סדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 30.

סכום כל איברי הסדרה העומדים במקומות הזוגיים $(a_2 + a_4 + a_6 + \dots)$ הוא 36.

חשב את סכום כל איברי הסדרה העומדים במקומות האיזוגיים, כלומר: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots$.

6. (4 יח', קיץ תש"ן - 90)

סכום טור גיאומטרי אינסופי יורד, שכל איבריו חיוביים, הוא 243.

סכום שני איבריו הראשונים הוא 216.

בונים טור חדש המורכב מהאיברים העומדים במקומות הזוגיים בטור הגאומטרי הנתון.

הראה שהטור החדש גם הוא טור גיאומטרי יורד, וחשב את הסכום שלו.

7. (4 יח', קיץ תשנ"ג - 93)

בסדרה הנדסית אינסופית יורדת $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ שכל איבריה חיוביים,

מתקיים: (1) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots = 20$, (2) $a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} + \dots = 4$

א. חשב את מנת הסדרה. ב. חשב את הסכום של כל איברי הסדרה.

השאלות

6. $S = 60.75$

4. $q_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$

2. $a_1 = \frac{3}{5}$

7. א. $q = \frac{1}{2}$ ב. $S = 30$

5. 54

3. פי 1.4

15. (005, קיץ תשע"ב - 2012, מועד ב)

נתונה סדרה הנדסית אינסופית: $2k, 4k^2, 8k^3, \dots$.

מנת הסדרה היא חיובית וקטנה מ-1. ריבוע הסכום של כל האיברים בסדרה הוא 4.

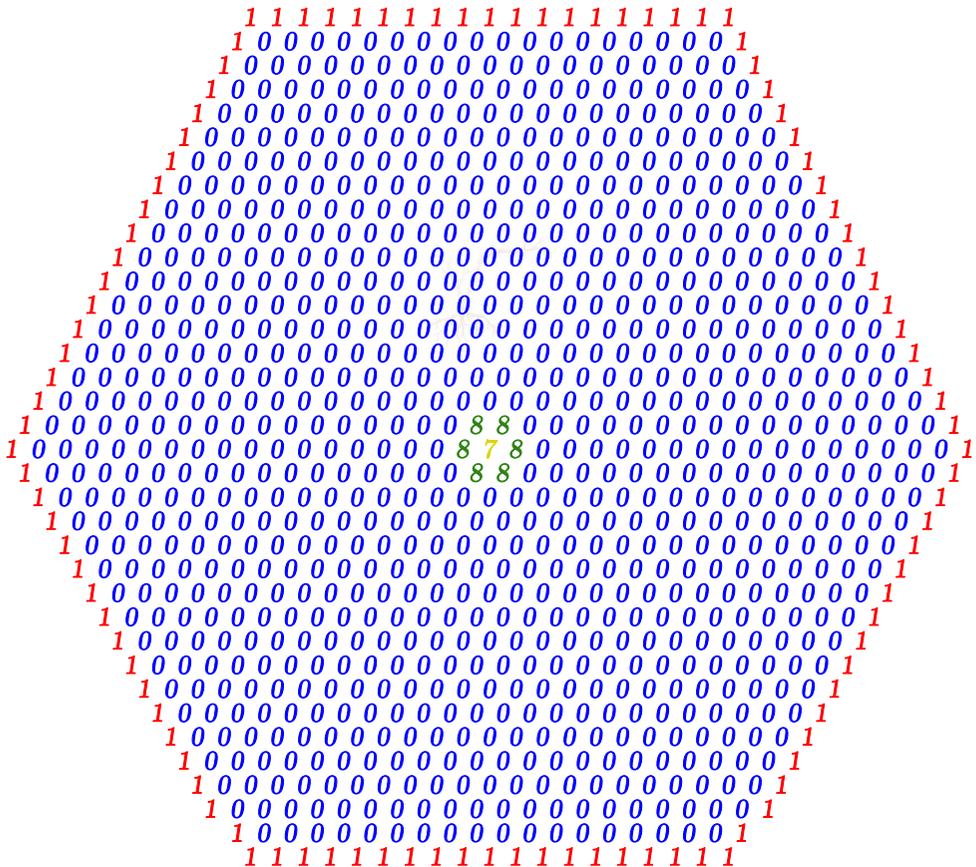
א. חשב את מנת הסדרה.

ב. מצא פי כמה גדול סכום כל האיברים שלפני האיבר החמישי,

מסכום כל האיברים שאחרי האיבר החמישי.

משושה ראשוני

במשושה שבציור רשום מספר ראשוני המורכב מ-1027 ספרות. המספר הוא פלינדרומי: נקרא מימין לשמאל ומשמאל לימין באופן זהה. גם את התבנית של מספר ראשוני זה גילה ר"ר מיכאל הרטלי (Dr. Michael Hartley).



סדרות - סדרות מעורבות (חשבונית והנדסית)

1. (4 יח', חורף תשכ"ח - 68) בסדרה חשבונית וסדרה הנדסית עולה שווים האיברים הראשונים וכל אחד מהם שווה ל-2. גם האיברים השלישיים שווים זה לזה.
האיבר השני בסדרה החשבונית גדול ב-4 מהאיבר השני בסדרה ההנדסית.
מצא את שלושת האיברים הראשונים בכל אחת מהסדרות הנ"ל.

2. (5 יח', חורף תשכ"ח - 68) בסדרה חשבונית 11 איברים. האיבר הראשון בסדרה זו הוא 24.
האיבר הראשון, החמישי והאחד-עשר בסדרה הנ"ל מהווים סדרה הנדסית.
מצא את הפרש הסדרה החשבונית.

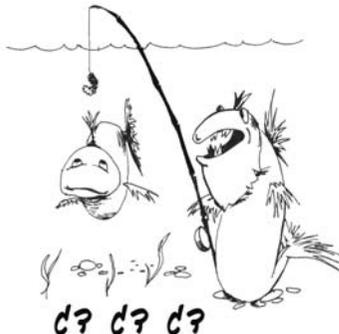
3. (4-5 יח', קיץ תשכ"ח - 68) בסדרה חמישה מספרים. שלושת המספרים הראשונים בסדרה הנ"ל מהווים סדרה הנדסית, ואילו ארבעת האיברים האחרונים, שסכומם שווה ל-30, מהווים סדרה חשבונית. מכפלת האיבר השני בחמישי בסדרה הנ"ל בת חמישה איברים שווה ל-36.
מצא את חמשת האיברים של הסדרה.

4. (4 יח', חורף תשל"ג - 73) בסדרה, המורכבת מארבעת איברים, יוצרים שלושת הראשונים סדרה הנדסית, ואילו שלושת האחרונים יוצרים סדרה חשבונית.
סכום האיברים הראשון והרביעי הוא 21, ואילו סכום השני והשלישי - 18.
מצא את ארבעת האיברים של הסדרה הנ"ל (הבחן שתי אפשרויות).

5. (4 יח', חורף תשל"ו - 76) בשתי סדרות עולות, אחת חשבונית והשנייה הנדסית, שווה האיבר הראשון ל-9. גם האיבר השלישי בסדרה החשבונית שווה לאיבר השלישי של הסדרה ההנדסית, ואילו האיבר השני של הסדרה החשבונית גדול ב-2 מאיברה השני של הסדרה ההנדסית.
מצא את האיבר השני והשלישי בכל אחת מאותן סדרות.

את המספר הראשוני 7129 ניתן להציג תוך שימוש בכל הספרות פעם אחת בלבד: $7129 = 5^0 + 6^1 + 7^2 + 8^3 + 9^4$

תהנית



1. חש': 2, 10, 18 הנ': 2, 6, 18

2. $d_1 = 0$, $d_2 = 3$

3. (1) 1.5, 3, 6, 9, 12 ; (2) 16, 12, 9, 6, 3

4. (1) 3, 6, 12, 18 ; (2) $18\frac{3}{4}$, $11\frac{1}{4}$, $6\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{4}$

5. חשבונית: $a_2 = 15$, $a_3 = 25$, הנדסית: $a_2 = 17$, $a_3 = 25$

סדרות - סדרות כלליות

1. (5 יח', חורף תשל"א - 71) נתונה הסדרה $\frac{3}{4}, \frac{5}{36}, \frac{7}{144}, \dots$ שבה: $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

מצא, בהסתמך על השוויון: $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$,

את הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של הסדרה הנתונה.

2. (5 יח', סתיו תשל"ז - 75) האיבר ה- n של סדרה נתון ע"י $a_n = k \cdot t^{n-1}$ (t, k - קבועים; $t \neq 1$).

נסמן: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$; $T_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$.

א. מצא את S_n ב. הוכח: $(1-t)T_n + t \cdot S_n = k \cdot n$.

ג. בדוק אם השוויון בסעיף ב ישאר בתוקפו כאשר $t = 1$.

3. (4 יח', קיץ תשנ"א - 91) נתונה נוסחת סכום n איברים ראשונים של סדרה: $S_n = Bn^2 + Cn$.

א. הבע את a_n (האיבר ה- n של הסדרה) באמצעות B, C ו- n .

ב. נוסחת האיבר הכללי של הסדרה היא $a_n = -3n + 7$. חשב את ערכי B ו- C .

4. (5 יח', קיץ תשס"ב - 2002 - מועד ב) נתונה סדרה: a_1, a_2, \dots, a_n .

נוסחת סכום n איבריה הראשונים היא $S_n = 2^7 - 2^{7-n}$.

א. הבע באמצעות n את ההפרש: $S_n - S_{n-1}$.

ב. הוכח שהסדרה הנתונה היא סדרה הנדסית יורדת.

ג. נסמן: $T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$. הראה כי $\frac{S_n}{T_n} = 2^{13-n}$.

5. (5 יח', קיץ תשס"ג - 2003) נתונה סדרה שנוסחת האיבר הכללי שלה היא $a_n = 2n - 6$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה זו הוא S_n .

סדרה אחרת מקיימת: $b_{n+1} - b_n = S_n + 6$.

בסדרה האחרת (b_n) יש שלושה איברים עוקבים השווים זה לזה.

מצא את המקום של כל אחד מהאיברים אלה.

את המספר הראשוני 5039 ניתן להציג כך: $5039 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + 5 \cdot 5! + 6 \cdot 6! = 7! - 1$

הנלות

4. א. $S_n - S_{n-1} = 2^{7-n}$

5. $b_2 = b_3 = b_4$

1. $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

2. א. $S_n = k \cdot \frac{t^n - 1}{t - 1}$ ג. כן

3. א. $a_n = 2Bn - B + C$

ב. $B = -1\frac{1}{2}$, $C = 5\frac{1}{2}$

סדרות - סדרות המוגדרות לפי כלל נסיגה

1. (5 יח', קיץ תשנ"ב - 92) נתונה הסדרה: $a_{n+1} = 3n - a_n$, $a_1 = c$.

- א. הראה כי האיברים הנמצאים במקומות האיזוגיים מהווים סדרה חשבונית, וכי גם האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים סדרה חשבונית.
 ב. חשב את סכום n האיברים הראשונים בסדרה, אם נתון ש- n מספר זוגי.
 הראה שסכום זה בלתי תלוי ב- c .

2. (4 יח', קיץ תשנ"ג - 93) נתונה הסדרה: $a_{n+1} = 5 + 2n - a_n$; $a_1 = 9$.

- א. חשב את a_2 ואת a_3 .
 ב. הוכח כי האיברים העומדים במקומות האיזוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה חשבונית. הדרכה: הבע את a_{n+2} באמצעות a_n .
 ג. חשב את a_{99} .

3. (5 יח', קיץ תשנ"ג - 93) נתונה הסדרה: $a_{n+1} = \frac{2^n}{2a_n}$, $a_1 = 1$.

- א. הוכח שהסדרה החלקית a_1, a_3, a_5, \dots היא סדרה הנדסית.
 ב. הוכח שכל איבר הנמצא במקום זוגי בסדרה הנתונה שווה לאיבר הקודם לו בסדרה.

4. (4 יח', קיץ תשנ"ד - 94) נתונה הסדרה: $a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 7$. נתון כי $a_3 = k$.

- א. מצא את הערך של k שעבורו a_3, a_4, a_5 הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית, וחשב את מנת הסדרה.
 ב. חשב את a_6 לפי נוסחת הנסיגה הנתונה, וקבע אם גם a_3, a_4, a_5 ו- a_6 יהיו ארבעה איברים עוקבים בסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א'. נמק.

5. (4 יח', קיץ תשנ"ה - 95) נתונה הסדרה: $a_{n+1} = 5n - a_n + 2$, $a_1 = -3$.

- א. חשב את חמשת האיברים: a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 .
 ב. הוכח כי $a_{n+2} - a_n = 5$.
 ג. סדרת האיברים העומדים במקומות האיזוגיים היא: a_1, a_3, a_5, \dots .
 חשב את הסכום של 40 האיברים הראשונים בסדרה זו. היעזר בסעיפים הקודמים.

תהליך

1. ב. $S_n = \frac{3n^2}{4}$

2. א. $a_2 = -2, a_3 = 11$. ג. $a_{99} = 107$

4. א. $q = 4\frac{1}{2}, k = \frac{4}{5}$. ב. $a_6 = 50.4$; לא

5. א. $a_2 = 10, a_3 = 2, a_4 = 15, a_5 = 7, a_6 = 20$. ג. $S_{40} = 3780$

טריגונומטריה במרחב

בכל השאלות במנסרה, הקטעים AA' , BB' , CC' , DD' הם המקצועות הצדייים של המנסרה.

1. (4 יח', קיץ תשכ"ז - 67) נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$.

בסיס המנסרה הוא משולש שווה-צלעות שאורך צלעו a .

אלכסון הפאה הצדדית, $A'C$, נטוי בזווית α לפאה הצדדית $BCC'B'$.

הבע את שטח מעטפת המנסרה הנתונה באמצעות a ו- α .

2. (5 יח', קיץ תשכ"ז - 67)

בסיסה של פירמידה ישרה הוא משולש שווה-שוקיים. אורך שוק המשולש הוא 40cm .

בסיס המשולש הוא 48cm , ואורך המקצוע הצדדי של הפירמידה הוא 65cm .

חשב את הזוויות בין המקצועות הצדדיים לבין מישור הבסיס.

3. (4 יח', חורף תש"ל - 70) $ABCA'B'C'D'$ היא מנסרה ישרה. בסיסה הוא ריבוע $ABCD$.

את קדקודי הבסיס $ABCD$ חיברו עם נקודת החיתוך O של אלכסוני הבסיס $A'B'C'D'$.

$AA' = 12\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$.

א. מצא את הזווית שבין הישר AO לפאה $ADD'A'$.

4. (5 יח', חורף תש"ל - 70) בסיס מנסרה ישרה $ABCA_1B_1C_1D_1$ הוא ריבוע.

גובה המנסרה הוא h ו- $\angle B_1AD_1 = \alpha$.

א. הבע את צלע בסיס המנסרה הנ"ל באמצעות h ו- α .

ב. באיזה תחום צריכה להימצא זווית α , כדי שלבעיה יהיה פתרון?

ג. הבע את שטח המעטפת המנסרה הנ"ל באמצעות h ו- α .

5. (4 יח', קיץ תשל"א - 71)

אורך האלכסון AC' בתיבה $ABCA'B'C'D'$ הוא d .

אלכסון זה יוצר עם בסיס התיבה זווית α , ועם הפאה $ADD'A'$ - זווית β .

הבע את נפח התיבה באמצעות d , α ו- β .

דרך כל שלוש נקודות נקודות ניתן להעביר קו ישר - אם הוא מספיק עבה...

השאלות

1. $\frac{3a^2}{2} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$.1
 2. 67.38° .2
 3. 15.78° .3
 4. א. $\frac{\sqrt{2} h \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}}$ (י"א) .ב. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.ג. $\frac{4\sqrt{2} h^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}}$

5. $V = d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}$ (י"ק) .5

46. (5 יח', קיץ תש"ס - 2000)

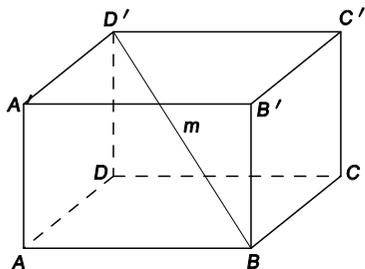
SABC היא פירמידה ישרה ומשוכללת. הגובה SO שווה למקצוע הבסיס.

א. מצא את הזווית בין מקצוע צדדי לבין מישור הבסיס ABC.

ב. מצא את הזווית בין המקצוע SC לבין המישור SAB.

47. (5 יח', חורף תש"ס - 2000) הגובה של פירמידה מרובעת, ישרה ומשוכללת הוא h.

זווית הראש של כל פאה צדדית היא α . הבע באמצעות h ו- α את נפח הפירמידה.



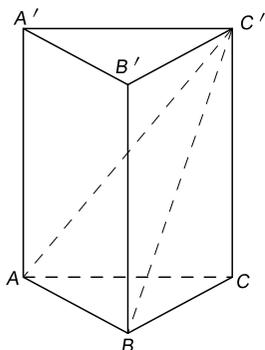
48. (4 יח', קיץ תשס"א - 2001)

ABCD A'B'C'D' היא תיבה שבסיסה מלבן ABCD.

$\angle ABD = 30^\circ$. אורך האלכסון D'B הוא m.

הזווית בין האלכסון D'B לבסיס היא 60° .

בטא באמצעות m את נפח התיבה.



49. (4 יח', קיץ תשס"א - 2001, מועד ב')

הבסיס של מנסרה ישרה ABCA'B'C' הוא משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים.

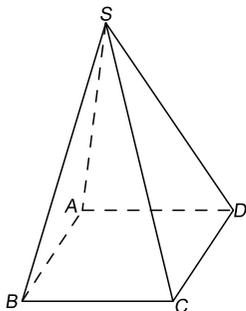
$AB = BC = 8\text{cm}$.

הזווית בין הפאה BCC'B' ובין האלכסון AC' היא 25° .

א. מהו הגודל של $\angle C'BA$? נמק.

ב. חשב את האורך של BC'.

ג. מצא את נפח המנסרה.



50. (4 יח', חורף תשס"א - 2001)

נתונה פירמידה ישרה ABCDS.

בסיס הפירמידה הוא ריבוע שאורך צלעו הוא 6cm.

הזווית בין מקצוע הפירמידה לבסיס היא 42° .

בפאה צדדית של הפירמידה, מצא את הגובה לצלע הבסיס.

תשובות

49. א. $\angle C'BA = 90^\circ$. ב. $BC' = 17.16\text{cm}$.

ג. $V = 485.65\text{cm}^3$.

50. $HE = 4.86\text{cm}$.

46. א. 60° . ב. 46.106° .

47. $V = \frac{4h^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 \cos \alpha}$ (יחידות קוב).

48. $V = \frac{3}{32} m^3$.

חשבון דיפרנציאלי

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

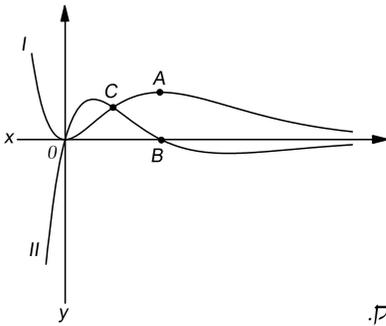
1. (4 יח', קיץ תשכ"ח - 68) חקור את הפונקציה $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$: א. תחום הגדרה
 ב. נקודות קיצון ג. נקודות חיתוך עם הצירים ד. תחומי עליה וירידה ה. ציור סקיצת הגרף
2. (4 יח', חורף תשכ"ח - 68) חקור את הפונקציה $y = \frac{x^2}{e^x}$: א. תחום הגדרה ב. נקודות קיצון
 ג. תחומי עליה וירידה ד. חיתוך עם הצירים ה. ציור סקיצה של גרף הפונקציה
3. (4 יח', קיץ תשל"ב - 72) חקור את הפונקציה: $y = 4x^2 e^{-x}$: א. תחום הגדרה
 ב. חיתוך עם הצירים ג. נקודות קיצון ד. תחומי עליה וירידה ה. שרטוט סקיצת הגרף
4. (4 יח', קיץ תשל"ו - 76) חקור את הפונקציה $y = x \ln x$: א. תחום הגדרה ב. נקודות קיצון
 ג. תחומי עליה וירידה ד. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה
5. (4 יח', חורף תשל"ח - 78) חקור את הפונקציה $y = x^2 e^x$: א. חיתוך עם הצירים
 ב. נקודות קיצון ג. תחומי עליה וירידה ד. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה
6. (4 יח', קיץ תשל"ה - 78) חקור את הפונקציה $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$: א. תחום הגדרה ב. נקודות קיצון
 ג. תחומי עליה וירידה ד. האם גרף הפונקציה חותך את ציר x? נמק ה. סקיצת גרף הפונקציה

הסתברות מפתיעה

ההסתברות ששני אנשים מתוך 23 אנשים אקראיים, חוגגים יום הולדת באותו תאריך גבוהה מ-50%!
 (ההסתברות היא 0.5073)

השאלות

1. א. $\forall x$ ב. $\min(1, 0)$ ג. $(1, 0)$ ד. $x > 1$, $x < 1$ ה. עמ' 70
2. א. $\forall x$ ב. $\max(2, \frac{4}{e^2})$, $\min(0, 0)$ ג. $0 < x < 2$, $(x < 0) \cup (x > 2)$ ד. $(0, 0)$ ה. עמ' 70 (לא נדרש: $y = 0$ אסימפטוטה חד-צדדית)
3. א. $\forall x$ ב. $(0, 0)$ ג. $\max(2, \frac{16}{e^2})$, $\min(0, 0)$ ד. $0 < x < 2$, $(x < 0) \cup (x > 2)$ ה. עמ' 70
4. א. $x > 0$ ב. $\min(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$ ג. $x > \frac{1}{e}$, $0 < x < \frac{1}{e}$ ד. עמ' 70
5. א. $(0, 0)$ ב. $\max(-2, \frac{4}{e^2})$, $\min(0, 0)$ ג. $-2 < x < 0$, $(x < -2) \cup (x > 0)$ ד. עמ' 70 (לא נדרש: $y_{\text{אסימפטוטה חד-צדדית}} = 0$)
6. א. $x > 0$ ב. $\min(1, \frac{1}{2})$ ג. $x > 1$, $0 < x < 1$ ד. לא ה. עמ' 70



68. (004, קיץ תשע"ב - 2012, לוחמים)

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

בציור שלפניך מוצגים גרפים I ו-II.

אחד מהגרפים הוא גרף הפונקציה,

והגרף האחר הוא גרף הנגזרת שלה.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. איזה גרף, I או II, הוא גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

ג. (1) מצא את תחום העלייה של $f(x)$.

(2) מצא את תחום החיוביות ואת תחומי השליליות של גרף II. נמק.

ד. על הגרפים I ו-II מסומנות הנקודות A ו-B.

AB מקביל לציר y. נקודה B נמצאת על ציר x.

(1) חשב את אורך הקטע AB.

(2) אחת מנקודות החיתוך של הגרפים I ו-II היא נקודה C המסומנת בציור.

מצא את שטח המשולש ABC.

69. (004, חורף תשע"ג - 2013)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3x^2 - 8x}{e^x}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. פונקצית הנגזרת של $g(x)$ מקיימת: $f(x) = g'(x)$.

מצא את שיעורי הנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$. נמק.

השניה הראשונה

00:00:01

תשובות

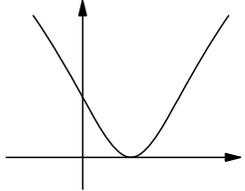
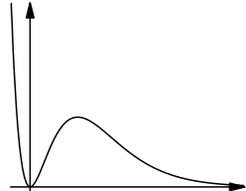
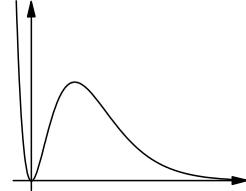
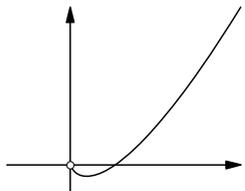
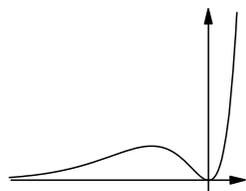
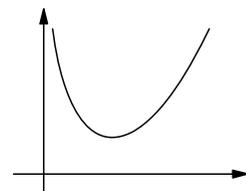
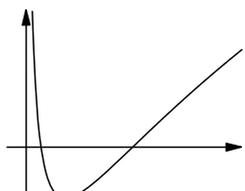
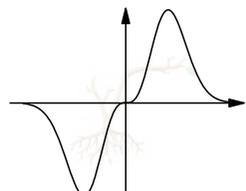
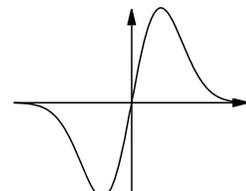
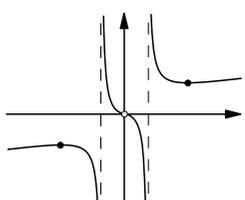
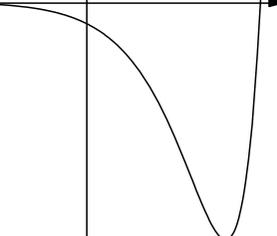
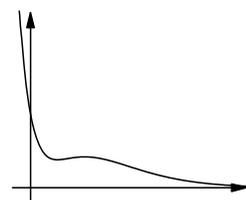
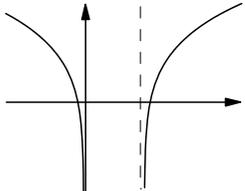
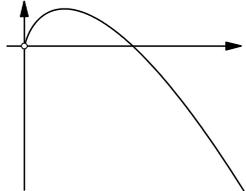
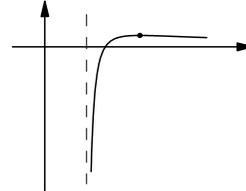
68. א. $\forall x$ (כל x) ב. $f(x) \leftrightarrow I$

ג. (1) $0 < x < 2$; (2) $0 < x < 2$; $+$; $(x < 0) \cup (x > 2)$; $-$;

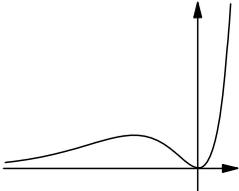
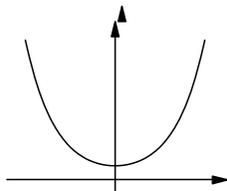
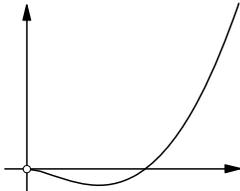
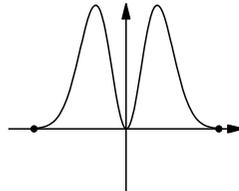
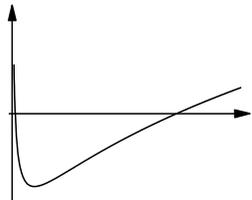
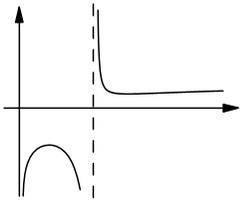
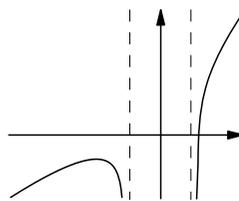
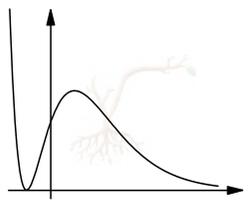
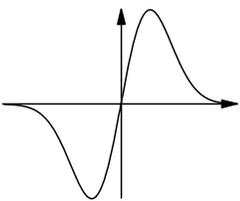
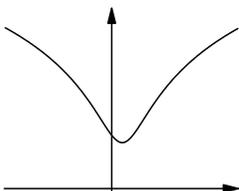
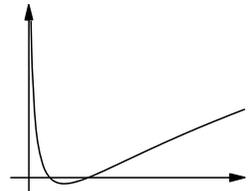
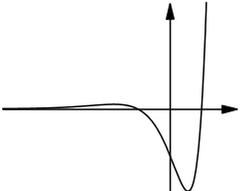
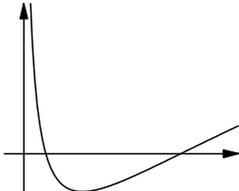
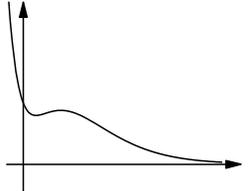
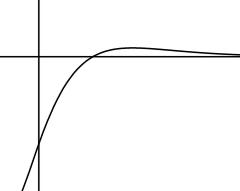
ד. (1) $AB = \frac{4}{e^2} = 0.54$ (יחידת אורך) ; (2) $S_{ABC} = \frac{2}{e^2} = 0.27$ (יחידה ריבועית)

69. א. $\forall x$ ב. $(\frac{8}{3}, 0)$; ג. $(0, 0)$; ד. $\min(\frac{2}{3}, -2.05)$; עמ' 72 ה. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{8}{3}$

תשובות

<p>1.</p> 	<p>2.</p> 	<p>3.</p> 
<p>4.</p> 	<p>5.</p> 	<p>6.</p> 
<p>7.</p> 	<p>8.</p> 	<p>9.</p> 
<p>10.</p> 	<p>19.</p> 	<p>22.</p> 
<p>24.</p> 	<p>25.</p> 	<p>27.</p> 

תשובות

<p>29.</p> 	<p>30.</p> 	<p>31.</p> 
<p>32.</p> 	<p>33.</p> 	<p>34.</p> 
<p>35.</p> 	<p>36.</p> 	<p>37.</p> 
<p>38.</p> 	<p>39.</p> 	<p>40.</p> 
<p>41.</p> 	<p>42.</p> 	<p>43.</p> 

תשובות

<p>44.</p>	<p>45.</p>	<p>48.</p>
<p>50.</p>	<p>51.</p>	<p>60.</p>
<p>62.</p>	<p>63.</p>	<p>64.</p>
<p>65.</p>	<p>69.</p>	

מצולם של עקומים - הישרים נראים מוזרים

שלום מתוזמן

המילה 'שלום' מופיעה בפעם הראשונה בתנ"ך בספר בראשית כברית בין הבתרים (בראשית ט"ו ט"ו). פסוק זה הוא הפסוק 376 בתורה. מספר זה הוא בדיוק הערך הגימטרי של המילה 'שלום'.

חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות - פונקציות טריגונומטריות

1. (4 יח', קיץ תשכ"ז - 67) נתונה הפונקציה: $y = 2 \sin x + \sin 2x$.

- א. מה הוא תחום קיום הפונקציה?
 ב. מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
 ג. באיזה תחום חלקי של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ עולה הפונקציה ובאיזה תחום חלקי היא יורדת?
 ד. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את ציר x, ובאיזה נקודה - את ציר y?
 ה. שרטט ע"ס התשובות בסעיפים ב'-ד' סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

2. (4 יח', קיץ תשכ"ט - 69) נתונה הפונקציה: $y = 3 \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

- א. באיזה תחום מוגדרת הפונקציה?
 ב. מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה הנתונה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
 ג. באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ הפונקציה עולה, ובאילו היא יורדת?
 ד. מה הן נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x ועם ציר y בתחום הנ"ל?
 ה. שרטט ע"ס התשובות א'-ד' סקיצה של גרף הפונקציה.

3. (4 יח', חורף תש"ל - 70) נתונה הפונקציה: $y = \cos x + \cos 2x$.

- א. מאיזה תחום מוגדרת הפונקציה?
 ב. מה הן נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$?
 ג. באילו תחומים חלקיים של התחום $0 \leq x \leq 2\pi$ עולה הפונקציה ובאילו היא יורדת?
 ד. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה (בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$) את ציר x ובאילו - את ציר y?
 ה. שרטט ע"פ הסעיפים א'-ד' סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

251 הוא המספר הקטן ביותר הניתן להצגה בשני אופנים שונים כסכום של שלושה מספרים קוביים:

$$251 = 1^3 + 5^3 + 5^3 = 2^3 + 3^3 + 6^3$$

תולדות

1. א. $\forall x$ ב. $\max(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$, $\min(\frac{5}{3}\pi, -\frac{3}{2}\sqrt{3})$ ג. $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$ ד. $(2\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, 0)$ ה. עמ' 84

ג. $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi \cup (0 < x < \frac{\pi}{3})$

2. א. $\forall x$ ב. $\max(\frac{\pi}{3}, 2\sqrt{3})$, $\min(\frac{4}{3}\pi, -2\sqrt{3})$ ג. $\frac{\pi}{3} < x < \frac{4}{3}\pi$ ד. $(0, \sqrt{3})$, $(\frac{11}{6}\pi, 0)$, $(\frac{5}{6}\pi, 0)$ ה. עמ' 84

ג. $\frac{\pi}{3} < x < \frac{4}{3}\pi \cup (0 < x < \frac{\pi}{3})$

3. א. $\forall x$ ב. $\max(\pi, 0)$, $\min(4.46, -\frac{9}{8})$, $\min(1.82, -\frac{9}{8})$ ג. $(0, 2)$, $(\frac{5}{3}\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\frac{\pi}{3}, 0)$ ה. עמ' 84

ג. $(\pi < x < 4.46) \cup (0 < x < 1.82)$

40. (804, קיץ תש"ע - 2010, מועד ב)

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x} \text{ בתחום } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi.$$

- א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון, וקבע את סוגן.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
 ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

41. (004, קיץ תש"ע - 2010, מועד א - המבחן הגנוז)

$$f(x) = \frac{a}{1 - \sin x} \text{ בתחום } 0 \leq x \leq 2\pi, a \neq 0 \text{ פרמטר.}$$

בתחום הנתון מצא את:

- (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.
 (2) האסמפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר y .
 (3) סימן הפרמטר a , אם ידוע כי בנקודה שבה $x = \pi$ הפונקציה יורדת.
 ב. (1) גרף הפונקציה חותך בתחום הנתון את הישר $y = 1$ בשלוש נקודות שבהן: $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$. מצא את ערך הפרמטר a .
 (2) הצב את הערך של a שמצאת, ומצא בתחום הנתון את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 ג. עבור a שמצאת, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

42. (004, חורף תשע"ב - 2012, לוחמים)

$$y = \frac{1}{\cos x} + 2 \text{ בתחום } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

- א. בתחום הנתון מצא את:
 (1) האסימפטוטות של גרף הפונקציה המקבילות לציר y .
 (2) נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x ועם ציר y (אם יש כאלה).
 ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
 ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
 ד. הישר $y = a$ הוא משיק לגרף הפונקציה. מצא את הערך של a .

השאלות

40. א. $\min_{\text{ep.}}(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2})$, $\max(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $\min(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $\max_{\text{ep.}}(2\pi, 0)$

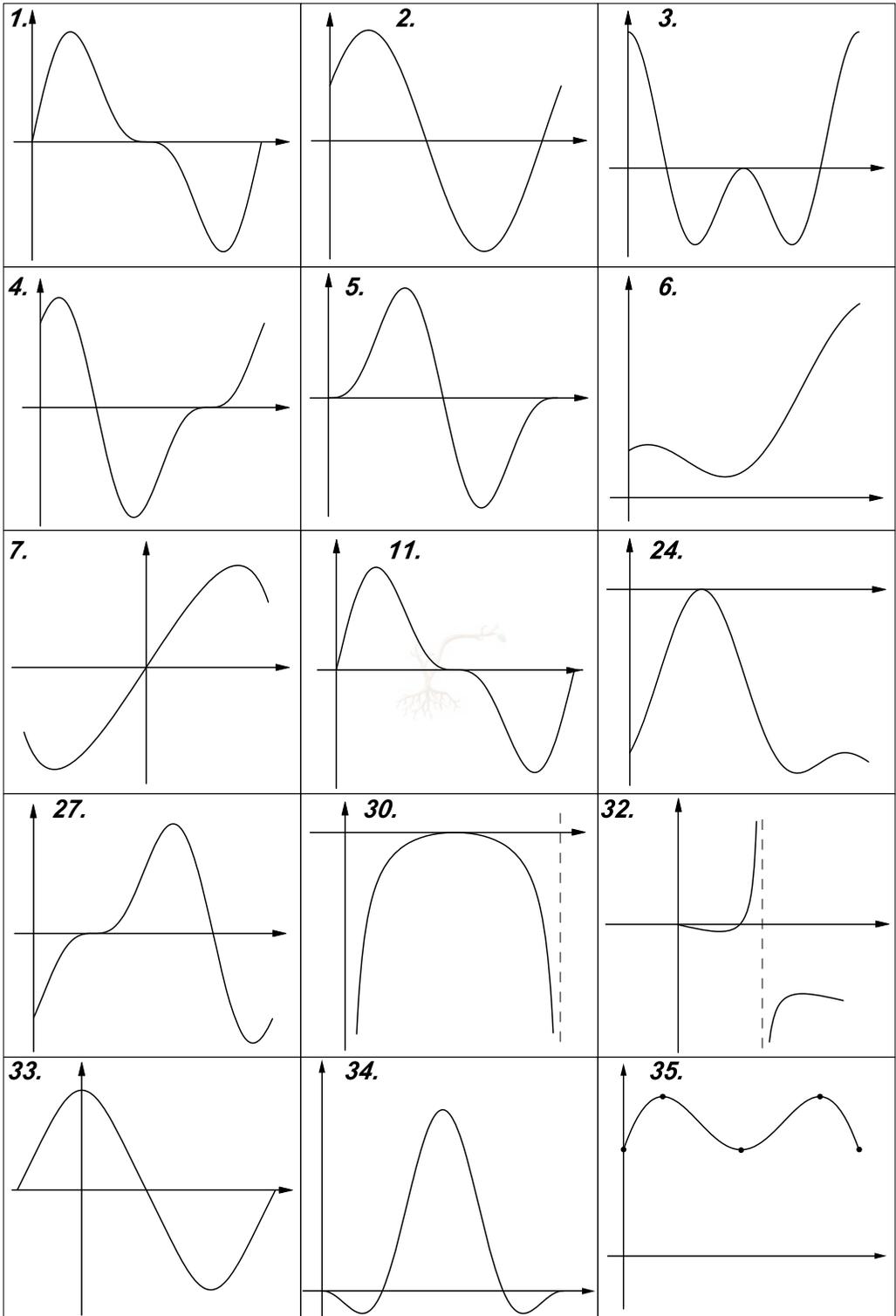
ב. $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$ ג. עמ' 85

41. א. (1) $x \neq \frac{\pi}{2}$ (2) $x = \frac{\pi}{2}$ (3) $\text{sign}(a) = +$

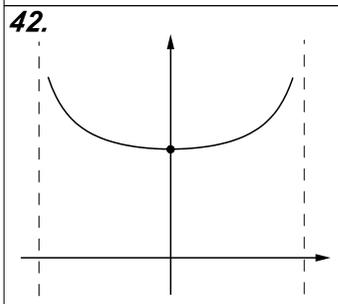
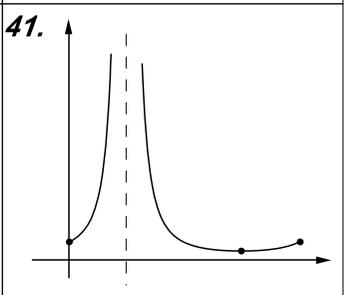
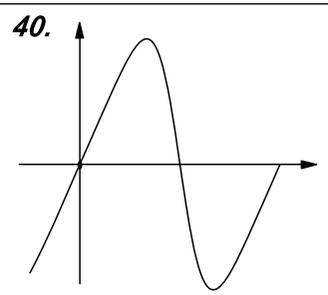
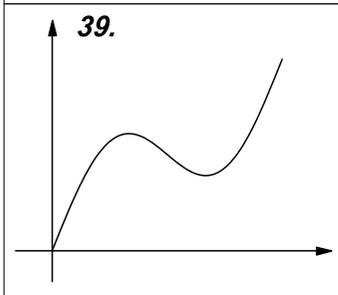
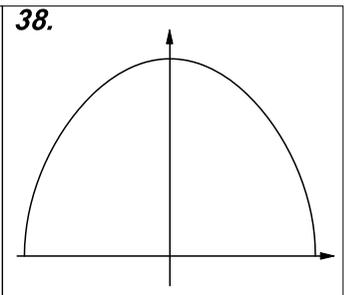
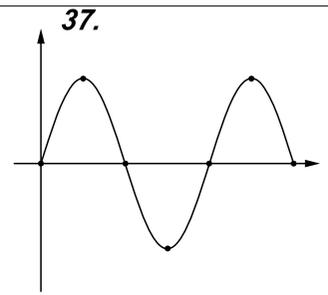
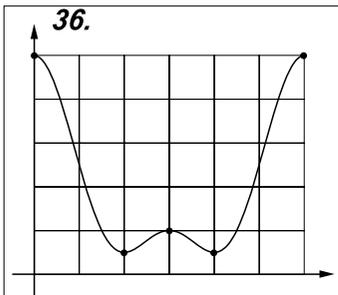
ב. (1) $a = 1$ (2) $\max_{\text{ep.}}(2\pi, 1)$, $\min(\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{2})$ ג. עמ' 85

42. א. (1) $x = \pm \frac{\pi}{2}$ (2) $(0, 3)$ ב. $\min(0, 3)$ ג. עמ' 85 ד. $a = 3$

תשובות



תולדות



בן כמה אמרת שקוראים לך?



כולנו מכירים של השלשה הפיתגורית של מספרים עוקבים: $3^2 + 4^2 = 5^2$.
 זו השלשה הפתגורית היחידה של מספרים עוקבים. ובכל זאת, היא אינה מקרית.
 שלשה זו, היא חלק ממשפחת אינסופית של סכומים ריבועים של מספרים עוקבים:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 34^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$

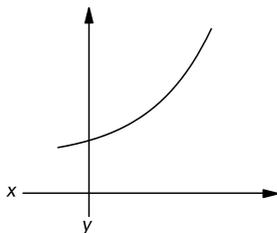
$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$$

⋮
⋮

$$(2n^2 + n)^2 + \dots + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2 + \dots + (2n^2 + 3n)^2$$

חשבון אינטגרלי

פונקציות מעריכיות

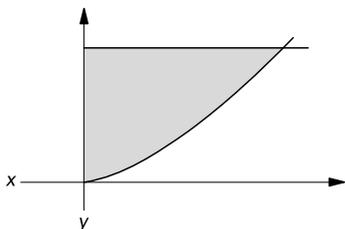


1. (4 יח', קיץ תש"ן - 90) נתונה הפונקציה $y = 2 + e^x$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x = 1$.

ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה,

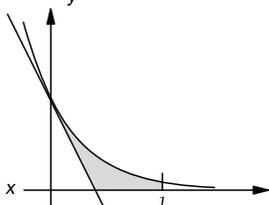
על-ידי המשיק ועל-ידי ציר y .



2. (4 יח', קיץ תשנ"ג - 93)

חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף

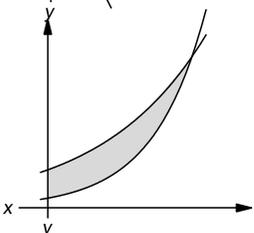
הפונקציה $y = 2^x$, על-ידי הקו $y = 8$ ועל-ידי ציר y .



3. (4 יח', חורף תשנ"ד - 94) מצא את השטח המוגבל על-ידי

הפונקציה $f(x) = e^{-3x}$, על-ידי הישר המשיק לגרף בנקודה

שבה $x = 0$, על-ידי ציר x ועל-ידי הישר שמשוואתו $x = 1$.



4. (4 יח', קיץ תשנ"ה - 95) נתונות הפונקציות:

$$f(x) = 4^x \quad \text{ו} \quad g(x) = 4 \cdot 2^x$$

מצא את השטח המוגבל על-ידי הגרפים של שתי הפונקציות

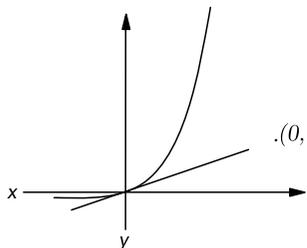
ועל-ידי ציר y .

5. (4 יח', חורף תשנ"ז - 96) נתונה הפונקציה $y = e^{2x} - e^x$.

א. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.

ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה,

על-ידי המשיק ועל-ידי הישר $x = 1$.



תולדות



1. א. $y = ex + 2$ ב. $S = \frac{e}{2} - 1 = 0.36$ (יחידות ריבועיות)

2. $S = 24 - \frac{7}{\ln 2} = 13.9$ (יחידות ריבועיות)

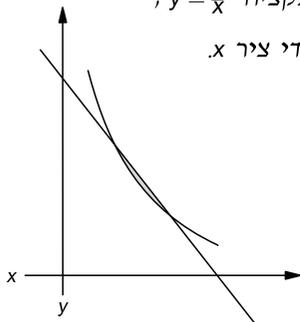
3. $S = \frac{1}{6} - \frac{1}{3e^3} = 0.15$ (יחידות ריבועיות)

4. $S = \frac{9}{\ln 4} = 6.49$ (יחידות ריבועיות)

5. א. $y = x$ ב. $S = \frac{e^2}{2} - e = 0.9762$ (יחידות ריבועיות)

חשבון אינטגרלי - פונקציות שפתרון לוגריתמי

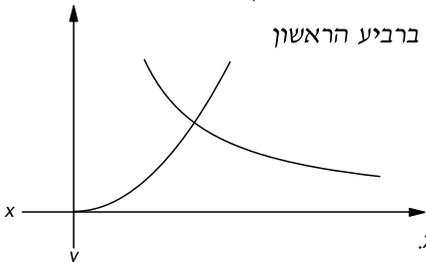
1. (4 יח', חורף תש"ן - 89) מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $y = \frac{5}{x}$, על-ידי המשיק לגרף זה בנקודה $(1,5)$, על-ידי הישר $x = 5$ ועל-ידי ציר x .



2. (4 יח', קיץ תשנ"ד - 94)

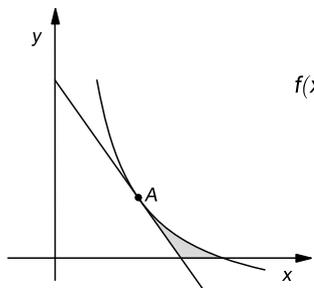
- לפניך הגרפים של הפונקציות $y = -2x + 5$ ו- $y = \frac{3}{x}$.
חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

3. (4 יח', חורף תשס"א - 2001) בצויר שלפניך מתוארות ברביע הראשון



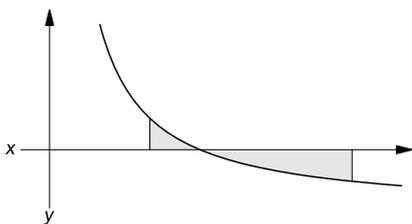
- הגרפים של הפונקציות: $y = \frac{9}{x}$ ו- $y = \frac{1}{3}x^2$.
א. חשב את שיעורי נקודת החיתוך בין הפונקציות.
ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי הישר $x = 3e$, על-ידי הגרפים של שתי הפונקציות, ועל-ידי ציר x .

4. (4 יח', קיץ תשס"ב - 2002 - מועד ב)



- א. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{4}{x} - 1$ בנקודה $A(2,1)$.
ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציות, על-ידי המשיק, ועל-ידי ציר x בתחום $x > 0$.

5. (004, קיץ ס"ד - 2004, מועד א) נתונה הפונקציה:



- $g(x) = \frac{3}{x} - 1$ בתחום $x > 0$.
חשב את השטח המוגבל ע"י: גרף הפונקציה, ציר x , והישרים $x = 2$ ו- $x = 6$.

השאלות



1. $S = 5 \ln 5 - 2\frac{1}{2} = 5.55$ (יחידות ריבועיות)

2. $S = 0.0336$ (יחידות ריבועיות)

3. א. $A(3,3)$ ב. $S = 12$ (יחידות ריבועיות)

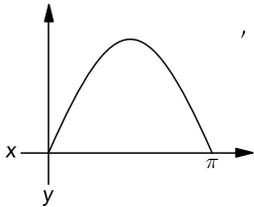
4. א. $y = -x + 3$ ב. $S = \ln 16 - 2.5 = 0.2726$ (י"ר)

5. $S = 2 + \ln \frac{27}{64} = 1.137$ (יחידות ריבועיות)

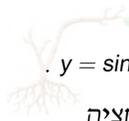
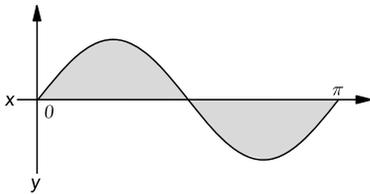
חשבון אינטגרלי - פונקציות טריגונומטריות

1. (4 יח', קיץ תש"ל - 70) שרטט את הגרפים של הפונקציות: $y = \sin x$ ו- $y = \sin 2x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$, ומצא את השטח המוגבל בקשתות הגרפים הנ"ל שבין שתי נקודות החיתוך שבתחום $0 < x \leq \pi$ (שים לב שאין לוקחים בחשבון את הנקודה שבה $x = 0$).

2. (4 יח', קיץ תשל"א - 71) הגרפים של הפונקציות $y = \sin x$ ו- $y = \cos 2x$ נפגשים בשתי נקודות בתחום $0 \leq x \leq \pi$. הקשתות של הגרפים הנ"ל בין שתי נקודות אלה מגבילות שטח. חשב את גודלו של שטח זה.



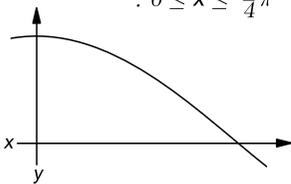
3. (4 יח', חורף תשנ"ג - 92) בציור מתואר גרף הפונקציה $y = \sqrt{2} \sin x$, בתחום $0 \leq x \leq \pi$. בנקודה שעל גרף הפונקציה שבה $x = \frac{3\pi}{4}$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה.
 א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי המשיק ועל-ידי ציר x .



4. (4 יח', קיץ תשנ"ד - 94)

א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $y = \sin^2 x$.
 ב. בציור שלפניך מתואר גרף של הפונקציה $g(x) = \sin x \cdot \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

הראה כי $g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, וחשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה ועל-ידי ציר x .



5. (4 יח', חורף תשנ"ה - 95) נתונה הפונקציה $y = \cos x$, בתחום $0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$.

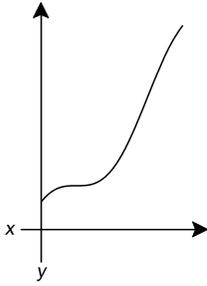
מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי המשיק שמשוואתו $y = -x + \frac{\pi}{2}$ ועל-ידי ציר y .

קשה - זאת אומרת: אפשר (זאב ז'בוטינסקי)

תלנות

1. $S = 2\frac{1}{4}$ (י"ר), עמ' 116 א. $y' = \sin 2x$ ב. $S = 1$
2. $S = 1.5\sqrt{3} = 2.6$ (יחידות ריבועיות) 5. $S = \frac{\pi^2}{8} - 1 = 0.234$ (יחידות ריבועיות)
3. א. $y = -x + \frac{3}{4}\pi + 1$ ב. $S = 1.5 - \sqrt{2} = 0.086$

38. (004, חורף תשע"ג - 2013)

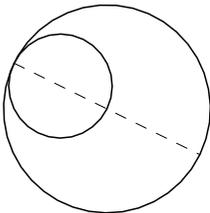


- נתונה הפונקציה $f(x) = x + \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
- בתחום הנתון מצא את:
- נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן. נמק.
 - משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לציר x .
 - השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $f(x)$, ע"י המשיק שאת משוואתו מצאת, וע"י ציר y .

תולדות

<p>1</p>	<p>12</p>	<p>25</p>	
<p>27</p>	<div style="display: flex; flex-wrap: wrap; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>$f(x) = \sin x$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$f(x) = \cos x$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$f(x) = x^3$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$f(x) = x^2$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$f(x) = \frac{1}{x}$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$f(x) = \sqrt{x}$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$x^2 + y^2 = R^2$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$f(x) = x$</p> </div> </div>		

מעגל שמשרטט קו ישר



בציור מעגל קטן משיק למעגל גדול מבפנים.
 אורך רדיוס המעגל הגדול גדול פי שניים מאורך רדיוס המעגל הקטן.
 אם ננעץ כלי כתיבה על המעגל הקטן בנקודת ההשקה,
 ונסובב אותו לאורך היקף המעגל הגדול מבפנים תוך כדי המשך השקתו לו,
 המסלול שישרטט כלי הכתיבה יהיה קו ישר!

תולדות

38. א. $\min_{ab} (0, 1)$, $\max_{ab} (2\pi, 2\pi + 1)$ ב. $y = \frac{\pi}{2}$ ג. $S = \frac{\pi^2}{8} - 1 = 0.2337$ (יחידה ריבועית)

מבנה מבחן הבגרות לשאלון 805

שאלון ד' (35804) מהווה 65% מהציון הסופי.

שאלון ה' (35805) מהווה 35% מהציון הסופי.

משך זמן המבחן: שעה ושלושה רבעים.

פרק א - בחירה: שאלה אחת מתוך שתי שאלות.

סדרות, טריגונומטריה במרחב.

פרק ב - בחירה: שתי שאלות מתוך 3 שאלות.

בעיות גדילה ודעיכה, חדר"א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות חזקה (עם מעריך רציונלי),

פונקציות מעריכיות, פונקציות לוגריתמיות.

הערה חשובה:

מבנה זה מיושם החל ממועד חורף תשע"ג, ולכן מבנה כל המבחנים בספר זה שונים מהמבנה לעיל.

13 - מול של שם

לנח היו שלושה בנים: שם, חם ויפת.

היהודים (וגם הערבים) הם בני שם. מכאן המילה אנטישמיות (אנטי שם).

הצאצא ה־13 של שם הוא יקטן: עילם, אשור, ארפכשד, לוד, ארם, עוץ, חול, גתר, מש, שלח, עבר, פלג, יקטן.

ליקטן היו 13 ילדים: אלמודד, שלף, חצרמות, ירח, הדרום, אוזל, דקלה, עובל, אבימאל, שבא, אופר, חוילה, יובב.

הפרשיה המספרת לנו זאת היא בבראשית, פרק י', פסוקים כ"א-ל"ב.

$$13^2 = 169 \text{ שווה בגימטריה שווה}$$

סכום הגימטריות של כל 13 צאצאי שם מתחלק ב־13:

$$\text{עילם (150) + אשור (507) + ארפכשד (605) + לוד (40) + ארם (241) + עוץ (166) + חול (44)}$$

$$+ \text{גתר (603) + מש (340) + שלח (338) + עבר (272) + פלג (113) + יקטן (169) = 3588} \quad 3588 : 13 = 276$$

סכום הגימטריות של כל 13 צאצאי יקטן מתחלק ב־13:

$$\text{אלמודד (85) + שלף (410) + חצרמות (744) + ירח (218) + הדרום (255) + אוזל (44) + דקלה (139)}$$

$$+ \text{עובל (108) + אבימאל (84) + שבא (303) + אופר (287) + חוילה (59) + יובב (20) = 2756}$$

$$2756 : 13 = 212$$

בחומש מתוקמות פרשיות באותיות 'פ' (פתוחה) או 'ס' (סגורה).

הפרשיה שמספרת לנו את תולדות שם נמצאת בבראשית פרק י' פסוקים כ"א-כ"ט.

מספר המילים באותה פרשיה מתחלק ב־13, ומספר האותיות באותה פרשיה מתחלק ב־13.

$$\text{הפרשיה מכילה 104 מילים (8 = 104 : 13), ו־390 אותיות (10 = 390 : 13)}$$

והצימוק שבעוגה: המילה ה־169 (13²) בספר דברי הימים היא: יקטן !!!

מבחן 27 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד ב

בחירה: שלוש שאלות: שאלה אחת מהשאלות 1-2, שתי שאלות מהשאלות 3-5.

פרק ראשון - סדרות, טריגונומטריה במרחב

סדרות

1. נתונה סדרה המקיימת את הכלל $a_{n+1} = a_n - 4$ לכל n טבעי.

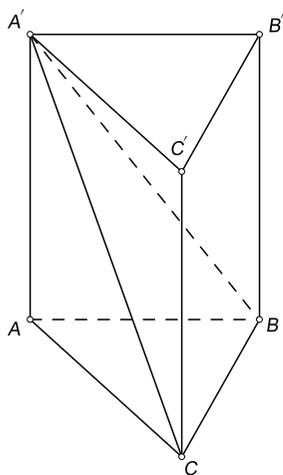
האיבר השלישי בסדרה הוא 12.

א. מצא את האיבר הראשון.

בסדרה זו 71 איברים.

ב. חשב את הסכום של 10 האיברים האחרונים בסדרה.

ג. מצא את האיבר האמצעי בסדרה.



טריגונומטריה במרחב

2. נתונה מנסרה ישרה $ABC'A'B'C'$.

בסיס המנסרה ABC הוא משולש

שווה-שוקיים ($AB = AC$).

זווית הראש של המשולש ABC היא 54° .

האורך של בסיס המשולש הוא 7cm .

הזווית בין האלכסון $A'C$

ובין בסיס המנסרה ABC היא 65° .

א. חשב את שטח הפאה $ACC'A'$.

ב. חשב את הזווית בין הגובה לצלע BC במשולש $CA'B$ ובין בסיס המנסרה ABC.

תשובה של חיים ויצמן

חיים ויצמן (1874-1952), איש התנועה הציונית ונשיאה הראשון של מדינת ישראל.

מספר שנים לפני הצהרת בלפור שאל אותו חבר בית הלורדים האנגלי:

מדוע אתם היהודים מתעקשים על פלשתינה, כאשר ישנן כל-כך הרבה מדינות לא-מפותחות בהן אתם יכולים

להתיישב בנוחות רבה יותר?

ענה לו ויצמן: "זה כמו שאני אשאל אותך מדוע נסעת בסוף השבוע שלוש קילומטר כדי לבקר את אמא שלך,

כשיש כל כך הרבה זקנות וגרות ממש ברחוב שלך"...

1. א. $a_1 = 20$ ב. $S = -2420$ ג. $a_{36} = -120$

2. א. $S = 127.45$ (סמ"ר) ב. 67.43°

פרק שני - גדילה ודעיכה, חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה

3. נתונה הפונקציה $f(x) = 3 - \sin^2 x - \cos x$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. (1) על-פי הגרף שסרטטת, סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
- (2) מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף הנגזרת $f'(x)$ ועל-ידי ציר x בתחום $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$.
4. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = e^x$ ו- $g(x) = e^{3-x}$.
- א. מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מן הפונקציות עם הצירים (אם יש כאלה).
- ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מן הפונקציות (אם יש כאלה).
- ג. (1) מצא את השיעורים של נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.
- (2) סרטט באותה מערכת צירים סקיצות של כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
- (3) חשב את השטח המוגבל על-ידי הגרפים של שתי הפונקציות ועל-ידי הישר $y = e^3$.
5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^m - \ln x^4$. m הוא מספר טבעי.
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון ששיעור x שלה שווה ל-1. מצא את הערך של m .
- הצב $m = 4$ וענה על הסעיפים הבאים.
- ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x) - 3$.
- כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר x ? נמק.

בהצלחה

נות היוצרים שנוורה לנודינת ישראל · אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט



3. א. $\max_{ep.}(\pm\pi, 4)$, $\min(\pm\frac{\pi}{3}, 1\frac{3}{4})$, $\max(0, 2)$ ב. עמ' 181 ג. (2) $S = 2\frac{1}{4}$ (יחידות ריבועיות)
4. א. $f: \nearrow \forall x$, $g: \searrow \forall x$ ב. $f: (0, 1)$, $g: (0, e^3)$
- ג. (1) $(1.5, e^{1.5})$ (2) עמ' 181 (3) $S = 2e^{1.5} + e^3 = 29.05$ (יחידות ריבועיות)
5. א. $x \neq 0$ ב. $m = 4$ ג. $\min(\pm 1, 1)$ ד. עמ' 181 ה. 4 נקודות

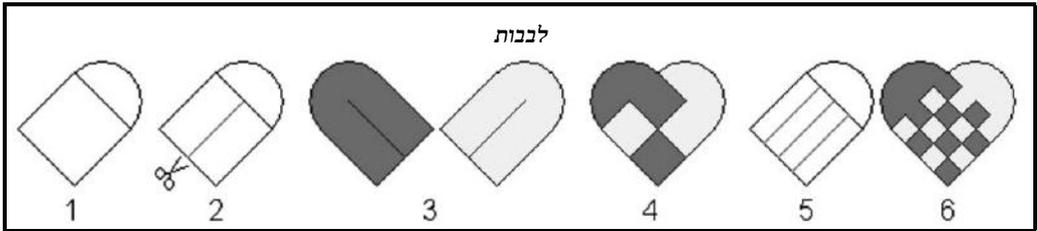
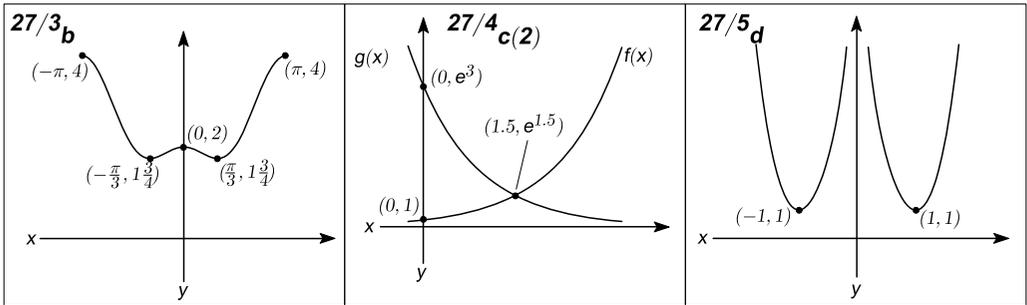
תשובות

<p>2/2 A(3)</p> <p>$f(x) = y$</p> <p>$f'(x) = y$</p>	<p>4/2 C</p>	<p>4/2 E</p>
<p>5/3 C</p>	<p>6/2 E</p> <p>$f(x)$</p> <p>$Jg(x)$</p>	<p>7/3 A</p> <p>$-\ln 3$</p> <p>0</p>
<p>11/3 C</p>	<p>12/4 C(3)</p>	<p>12/4 D</p> <p>f</p> <p>f'</p>
<p>13/3 C</p>	<p>13/5 E</p>	<p>14/4 C</p>
<p>15/4 C</p> <p>$(\frac{\pi}{2}, 3)$</p> <p>$(\frac{\pi}{6}, 0)$</p> <p>$(0, -1)$</p> <p>x</p> <p>y</p>	<p>15/5 C(3)</p> <p>$(1, e^3)$</p> <p>$(0, 4)$</p> <p>$(\frac{1}{3}, 0)$</p> <p>x</p> <p>y</p>	<p>16/3 B</p> <p>$(\frac{\pi}{2}, -2)$</p> <p>$(\frac{3\pi}{2}, -2)$</p> <p>$(\pi, -8)$</p> <p>x</p> <p>y</p>

תשובות

<p>17/3 B(3)</p>	<p>18/3 D</p>	<p>19/4 C(3)</p>
<p>19/5 B(3)</p>	<p>20/5 c</p>	<p>22/3 c</p>
<p>23/4 b(3)</p>	<p>23/5 c</p>	<p>23/5 d(1)</p>
<p>24/4 c(3)</p>	<p>25/4 b</p>	<p>25/5 a5</p>
<p>26/3 a(3)</p>	<p>26/4 a(3)</p>	<p>26/5 d(2)</p>

תשובות



עשרים חידות ועוד שתיים

הכנס בין ארבע מספרי 4 להלן פעולות מתמטיות, כך שתתקבל התוצאה הרשומה מימין לסימן השוויון:

4	4	4	4	= 0
4	4	4	4	= 1
4	4	4	4	= 2
4	4	4	4	= 3
4	4	4	4	= 4
4	4	4	4	= 0
4	4	4	4	= 6
4	4	4	4	= 7
4	4	4	4	= 8
4	4	4	4	= 9
4	4	4	4	= 10
4	4	4	4	= 11
4	4	4	4	= 12
4	4	4	4	= 13
4	4	4	4	= 14
4	4	4	4	= 15
4	4	4	4	= 16
4	4	4	4	= 17
4	4	4	4	= 18
4	4	4	4	= 19
4	4	4	4	= 20
4	4	4	4	= 21