בע"ה מנחם־אב התשע"ו
אוגוסט 2016 למנינם

אלי מיטב

מבחני בגרות במתמטיקה לשאלונים 481-581 (804-806)

עם פתרונות מלאים

כיתה י

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יָצאו לשאלונים 382-481-482-581-582

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יָצאו לשאלונים 481-482-581-582

בע"ה מנחם־אב התשע"ו   אוגוסט 2016 למנינם

מספר מילים לפנֵי

ספר זה מכיל שאלות ממבחני הבגרות בין השנים 2004–2016, **המתאימות לשאלונים** 481 ו־581 (804 ו־806) בהתאם לעדכון האחרון של תכנית הלימודים. משרד החינוך פרסם המלצה לחלוקה חומר הלימוד לכיתות י–יא. ספר זה מכיל את החומר המתאים לכיתה י על בסיס המלצה זו (ולא בדיוק לפיה) ועל־פי המלצות מורים. המבחנים המקוריים של שאלונים אלו מופיעים בספרים הרגילים של שאלונים אלו שיצאו בנפרד (30 מבחני 481 (804), 26 מבחני 581 (806)). השאלות מחולקות לפי נושאים ומובאות עם פתרון מלא. לכל שאלה תשובה סופית בעמוד השאלה ופתרון מלא בצמוד לפרק, עם הפניה למספר העמוד (המספר המעובה משמאל לכל שאלה).

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

$\forall$ - לכל , $\in$ - שייך , ↗ - עליה , ↘ - ירידה , $\cup$ - איחוד: היחס 'או' , $\emptyset$ - קבוצה ריקה
$\surd$ - אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח , ab. - מוחלט , ep. - נקודת קָצֶה (end point)

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוצי עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוצי עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו בכוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעִתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ־2012 (נכון להיום), כפי שהם מופיעים בספר, נמצאים באתר ההוצאה במִרְשֶׁתֶת (internet), בעלות שנתית מצחיקה של 20 (עשרים) שקלים בלבד. ראו בגב הכריכה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדואל.
כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.
שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורים מ**ארכימדס - פתרונות למידה** ולמורה **שריף אמארה** מכפר זֶלָפָה.

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התשע"ז - 2017), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את חלק מהחללים שבין השאלות והפתרונות לְחַלְחֵתִי בהבזקי אנקדוטות וסיפורים. ה'הבזקים' קשורים למתמטיקה, חלקם אינו כזה, וביניהם גם אנקדוטות בעלות אופי **לאומי או יהודי**.

ב ה צ ל ח ה

אלי

האיורים בספר צוירו על־ידי **אלכסנדר לויטס** מקיבוץ גשור שברמת הגולן.
אלכנסדר הוא אביו של סרן **דמיטרי (דימה) לויטס** ז"ל, שנהרג ב'צוק איתן'.

אלגברה

חקירת משוואה בנעלם אחד ממעלה ראשונה - שאלות

(כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 005.)

1. (קיץ תשס״ה - 2005 , מועד א) נתונה המשוואה $\frac{2x}{m^2-5m+6}+\frac{mx}{m-2}=7$.

א. לאילו ערכים של m יש פתרון למשוואה? **(3)**

2. (קיץ תשס״ו - 2006 , לוחמים) נתונה המשוואה $a(1+x)+2=a^2(1-x)$.

א. מצא עבור איזה ערך של a יש למשוואה אין־סוף פתרונות.

ב. מצא עבור איזה ערך של a אין פתרון למשוואה.

ג. מצא עבור אילו ערכים של a יש פתרון יחיד למשוואה. **(3)**

ד. מצא עבור אילו ערכים של a הפתרון היחיד של המשוואה מקיים $x^2-1>0$.

3. (קיץ תשס״ז - 2007 , מועד ב) נתונה המשוואה $x-2=a(a-3-x)$.

א. מצא עבור אילו ערכים של a יש פתרון יחיד למשוואה.

ב. מצא עבור אילו ערכים של a הפתרון היחיד של המשוואה הנתונה,

מקיים את אי־השוויון $x+2<0$. **(4)**

4. (סתיו תש״ע - 2009 , לוחמים) נתונה המשוואה: $mx+4x-1=\frac{3-3x}{m}$, $m\neq 0$.

א. מצא עבור אילו ערכי m : **(1)** יש למשוואה אין־סוף פתרונות.

(2) אין למשוואה פתרון.

(3) יש למשוואה פתרון יחיד.

ב. הבע באמצעות m את הפתרון היחיד של המשוואה. **(4)**

ג. מצא עבור אילו ערכים של m הפתרון היחיד של המשוואה קטן מ־ $m+1$.

תשובות

1. א. $m\neq 3$, $m\neq 2$, $m\neq 1$

2. א. $a=-1$ **ב.** $a=0$ **ג.** $a\neq -1$, $a\neq 0$ **ד.** $(a<-1)\cup(-1<a<0)\cup(0<a<1)$

3. א. $a\neq -1$ **ב.** $a<-1$

4. א. **(1)** $m=-3$ **(2)** $m=-1$, $m=0$ **(3)** $m\neq -3$, $m\neq -1$, $m\neq 0$ **ב.** $x=\frac{1}{m+1}$

ג. $(-2<m<-1)\cup(m>0)$

אלגברה - חקירת משוואה בנעלם אחד ממעלה ראשונה - פתרונות

1. א.

$m^2-5m+6=0$

$m_{1,2}=\frac{5\pm1}{2} \Rightarrow m_1=3\,,\ m_2=2 \Rightarrow m^2-5m+6=(m-2)(m-3)$

$\frac{2x}{m^2-5m+6}+\frac{mx}{m-2}=\frac{2x}{(m-2)(m-3)}+\frac{mx}{m-2}=7 \ \ /\cdot(m-2)(m-3) \quad ; \quad m\neq2\,,\ m\neq3$:תחום הגדרה

$2x+mx(m-3)=7(m-2)(m-3) \Rightarrow x(2+m^2-3m)=7(m-2)(m-3) \quad (*)$

$m^2-3m+2=0 \Rightarrow m_{1,2}=\frac{3\pm1}{2} \Rightarrow m_1=2\,,\ m_2=1 \Rightarrow m^2-3m+2=(m-1)(m-2)$

$(*)\ \ x(m-1)(m-2)=7(m-2)(m-3) \Rightarrow x=\frac{7(m-2)(m-3)}{(m-1)(m-2)}=\frac{7(m-3)}{m-1}$

עבור $m=1$ נקבל בכוכבית $(*)$: $0=14$ - סתירה

$\Leftarrow$ למשוואה יש פתרון כאשר: $\boldsymbol{m\neq1\,,\ m\neq2\,,\ m\neq3}$

---

2. א-ב-ג.

$a(1+x)+2=a^2(1-x) \Rightarrow a+ax+2=a^2-a^2x \Rightarrow a^2x+ax=a^2-a-2$

$\underline{ax(a+1)\overset{*}{=}(a-2)(a+1)}$

$(*)\ \ a^2-a-2\overset{?}{=}0 \rightarrow a_{1,2}=\frac{1\pm3}{2} \Rightarrow a_1=2\,,\ a_2=-1 \Rightarrow a^2-a-2=(a-2)(a+1)$

$\underline{a=0:}\quad 0=-2 \Rightarrow \boldsymbol{a=0}$ **אין פתרון**

$\underline{a=-1:}\quad 0=0 \Rightarrow \boldsymbol{a=-1}$ **כל מספר**
(אין־סוף פתרונות)

$\Rightarrow \boldsymbol{a\neq0\,,\ a\neq-1}$ **פתרון יחיד**

ד.

$x=\frac{(a-2)(a+1)}{a(a+1)}=\frac{a-2}{a} \rightarrow \left(\frac{a-2}{a}\right)^2-1>0 \Rightarrow \frac{a^2-4a+4}{a^2}-1>0 \ \ /\cdot a^2$

$a^2-4a+4-a^2>0 \Rightarrow -4a+4>0 \ \ /-4$

$-4a>-4 \ \ /:(-4) \Rightarrow a<1$

$(a<1)\cap(a\neq-1)\cap(a\neq0) \Rightarrow \boldsymbol{(a<-1)\cup(-1<a<0)\cup(0<a<1)}$

התנאים לפתרון יחיד

שלום מתוזמן

המילה 'שלום' מופיעה בפעם הראשונה בבראשית בברית בין הבתרים (בראשית ט"ו ט"ו).

פסוק זה הוא הפסוק ה־376 בתורה. מספר זה הוא בדיוק הערך הגימטרי של המילה 'שלום'.

אלגברה - חקירת מערכת משוואות ממעלה ראשונה - שאלות

(כל השאלות בפרק זה נלקחו ממבחני הבגרות לשאלון 005.)

1. (קיץ תשס"ו - 2006 , מועד א) נתונה מערכת המשוואות: $2x - y = 1$

$(m^2 + 1)x + my = 1$ m הוא פרמטר.

א. לאילו ערכים של m יש למערכת המשוואות פתרון יחיד? **(13)**

ב. לאילו ערכים של m הפתרון היחיד של המערכת מקיים את אי השוויון $y > -6x + 3$?

2. (קיץ תשס"ו - 2006 , מיוחד) נתונה מערכת המשוואות: $x + 3my = m$, $mx + 3y = 4m - 3$.

א. הבע באמצעות m את פתרון מערכת המשוואות.

ב. מצא עבור אילו ערכי m למערכת פתרון יחיד הנמצא ברביע השלישי. **(13)**

3. עבור אילו ערכי הפרמטר m נמצאת נקודת החיתוך

של שני הישרים: $x + y = 5$ ו־ $2(m - x) = y - 4$ **(14)**

בתוך הריבוע שקודקודיו הם: $(-3,-3)$, $(3,-3)$, $(-3,3)$, $(3,3)$ (ולא על אחת מצלעותיו)?

4. (קיץ תשס"ח - 2008 , מועד א)

נתונים שני ישרים שמשוואותיהם הן: $3y + ax = 1$ ו־ $ay + 3x = -1$ (a הוא פרמטר).

א. מצא עבור אילו ערכי a הישרים נחתכים בנקודה אחת.

ב. מצא עבור אילו ערכי a נקודת החיתוך של שני הישרים

נמצאת מעל הישר $y = -3$ ומימין לציר y. **(14)**

5. (קיץ תשס"ח - 2008 , לוחמים)

נתונה מערכת המשוואות: $(2)\ \ x + 4y = 2m$, $(1)\ \ x + m^2 y = m^2$.

א. מצא עבור אילו ערכים של m יש למערכת פתרון יחיד.

ב. מצא את הפתרון היחיד של מערכת המשוואות, **(15)**

והראה שהוא נמצא על הישר $y = \frac{1}{2m}x$ $(m \neq 0)$.

ג. מצא עבור אילו ערכים של m $(m \neq 0)$, הפתרון היחיד של המערכת מקיים $\frac{y}{x} > 3$.

תשובות

1. א. $m \neq -1$ **ב.** $-1 < m < 1$

2. א. $\left(\frac{4m}{m+1} , \frac{m-3}{3(m+1)} \right)$ **ב.** $-1 < m < 0$

3. $1.5 < m < 2$

4. א. $a \neq \pm 3$ **ב.** $a > 3\frac{1}{3}$

5. א. $m \neq \pm 2$ **ב.** $\left(\frac{2m^2}{m+2} , \frac{m}{m+2}\right)$ **ג.** $0 < m < \frac{1}{6}$

6. א.

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & mx+(m^2+9)y=3\\ (II) & x+6y=1\end{array}\right\}$$

$$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{m}{1}\neq\frac{m^2+9}{6} \Rightarrow 6m\neq m^2+9 \Rightarrow m^2-6m+9\neq 0$$

$$\Rightarrow (m-3)^2\neq 0 \Rightarrow \mathbf{m\neq 3}$$

ב.

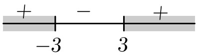
$$(II)\ x=1-6y \Rightarrow (I)\ m(1-6y)+(m^2+9)y=3 \Rightarrow (m^2-6m+9)y=3-m$$

$$(m-3)^2y=3-m \Rightarrow y=\frac{3-m}{(m-3)^2}=\frac{-1}{m-3}=\frac{1}{3-m}$$

$$x=1-\frac{6}{3-m}=\frac{3-m-6}{3-m}=\frac{-3-m}{3-m}=\frac{3+m}{m-3} \Rightarrow \mathbf{\left(\frac{3+m}{m-3}\ ,\ \frac{1}{3-m}\right)\ ,\ m\neq 3}$$

ג.

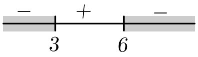
$\underline{0<\frac{3+m}{m-3}:}$ $\quad m_{1,2}=\pm 3\ ,\ m<-3:\ \frac{-}{-}=+ \Rightarrow$



$\Rightarrow \underline{(m<-3)\cup(m>3)}$

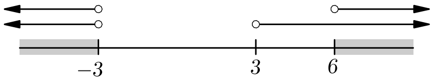
$\underline{\frac{3+m}{m-3}<3:}$ $\quad \frac{3+m}{m-3}-3<0 \Rightarrow \frac{3+m-3m+9}{m-3}<0 \Rightarrow \frac{12-2m}{m-3}<0\ \ /:2 \Rightarrow \frac{6-m}{m-3}<0$

$m_1=3\ ,\ m_2=6\ ,\ m<3:\ \frac{+}{-}=- \Rightarrow$



$\Rightarrow \underline{(m<3)\cup(m>6)}$

$\underline{\Big((m<-3)\cup(m>3)\Big)\cap\Big((m<3)\cup(m>6)\Big):}$



$\Rightarrow \mathbf{(m<-3)\cup(m>6)}$

7. א.

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & x+a^2y=2\\ (II) & \underline{x+5ay=0}\end{array}\right\}-$$

$$ay(a-5)=2 \Rightarrow \mathbf{a\neq 0\ ,\ a\neq 5}$$

ב.

$$ay(a-5)=2 \Rightarrow y=\frac{2}{a(a-5)} \Rightarrow (II)\ x=-5ay=\frac{-10a}{a(a-5)}=\frac{-10}{a-5}$$

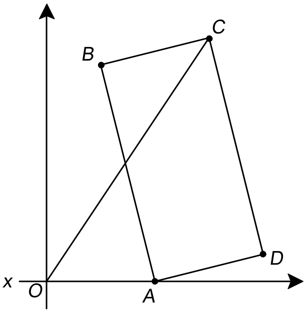
$$x\cdot y=\frac{-10}{a-5}\cdot\frac{2}{a(a-5)}=-\frac{20}{a(a-5)^2}\overset{?}{<}0 \Rightarrow^{(*)} (a>0)\cap(a\neq 0)\cap(a\neq 5)$$

$$\Rightarrow \mathbf{(0<a<5)\cup(a>5)}$$

$(*)$ לפני השבר יש ״−״. $(a-5)^2$ חיובי לכל $a\neq 5$. המונה חיובי. כל זה ביחד - שלילי.

לכן סימן הביטוי תלוי רק ב־ a: a חיובי - הביטוי שלילי. a שלילי - הביטוי חיובי.

.41 (804 , חורף תשע״ג - 2014)



קדקוד A במלבן $ABCD$ נמצא על ציר x .

שיעור y של קדקוד B הוא 8 .

משוואת הצלע BC היא $y = \frac{1}{4}x + 7\frac{1}{2}$.

O - ראשית הצירים. משוואת הישר OC היא $y = 1.5x$.

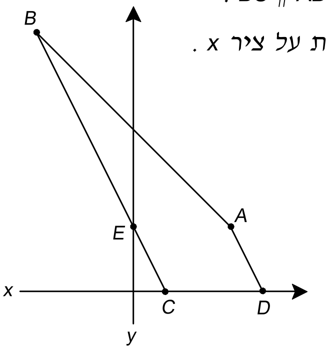
א. מצא את שיעורי הקדקודים B ו־ C .

ב. מצא את השיעורים של: **(1)** קדקוד A

(2) נקודת המפגש של אלכסוני המלבן.

ג. מצא את שטח המשולש OAD . **(61)**

.42 (804 , קיץ תשע״ד - 2014 , מועד א) $ABCD$ הוא מרובע שבו $BC \parallel AD$.



הצלע AB מונחת על הישר $x + y = 10$, והצלע CD מונחת על ציר x .

נתון: $D(8,0)$, $C(2,0)$.

שיעור x של הנקודה A הוא 6 . **(62)**

א. מצא את שיעור y של הנקודה A .

ב. מצא את משוואת הישר AD .

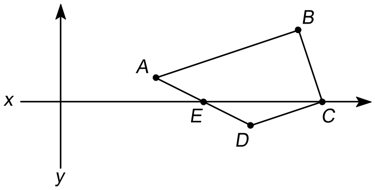
ג. מצא את שיעורי הנקודה B .

ד. הישר BC חותך את ציר y בנקודה E .

(1) הראה כי הישר AE מקביל לציר x .

(2) מצא את שטח המשולש AEB .

.43 (804 , חורף תשע״ה - 2015)



במרובע $ABCD$ הקדקוד C נמצא על ציר x .

$\angle BCD = 90^{\circ}$, $AB \parallel DC$, $B(10,3)$, $A(4,1)$.

א. מצא את השיעורים של הקדקוד C .

הישר AD עובר דרך הנקודה $E(6,0)$.

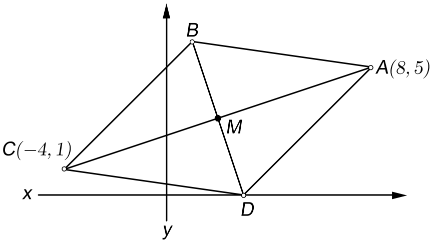
ב. האם הנקודה E היא אמצע הצלע AD ? נמק. **(62)**

תשובות

.41 א. $C(6,9)$, $B(2,8)$ **ב. (1)** $A(4,0)$ **(2)** $(5,4.5)$ **ג.** $S_{\triangle} = 2$ (יחידות ריבועיות)

.42 א. $y_A = 4$ **ב.** $y = -2x + 16$ **ג.** $B(-6,16)$ **ד. (2)** $S_{\triangle AEB} = 36$ (יחידות ריבועיות)

.43 א. $C(11,0)$ **ב.** כן



17. בפתרון נשתמש בתכונות אלכסוני מעוין:

אלכסוני מעוין מאונכים זה לזה

וחוצים זה את זה.

א.

<u>M :</u> $\left(\frac{-4+8}{2}\ ,\ \frac{1+5}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M(2,3)}$

ב.

$m_{AC} = \frac{5-1}{8-(-4)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad m_{BD} = -3$

$M(2,3) \quad \Rightarrow \quad y-3 = -3(x-2) \quad \Rightarrow \quad y-3 = -3x+6 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = -3x+9}$

ג.

<u>D :</u> $y = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x+9 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x = -9 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D(3,0)}$

<u>B :</u> $\frac{x_B+x_D}{2} = x_M \quad \Rightarrow \quad \frac{x_B+3}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_B+3 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_B = 1$

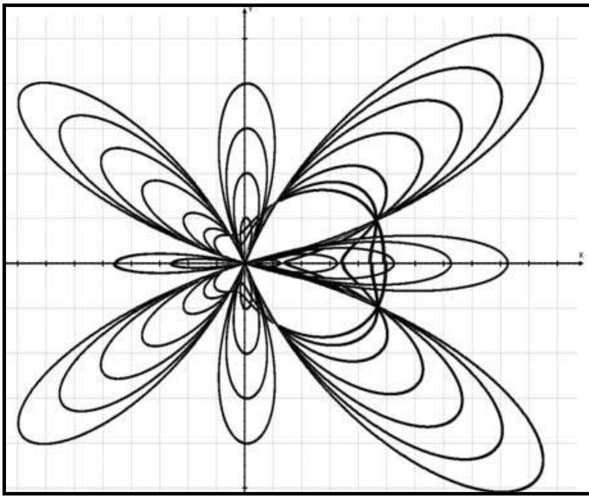
$\frac{y_B+y_D}{2} = y_M \quad \Rightarrow \quad \frac{y_B+0}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad y_B = 6 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B(1,6)}$

ד. שטח מעוין שווה למחצית מכפלת אורכי אלכסוניו.

$AC = \sqrt{(5-1)^2+(8+4)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160}$

$BD = \sqrt{(1-3)^2+(6-0)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{160}\cdot\sqrt{40} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_{ABCD} = 40}$ **(יחידות ריבועיות)**



פרפר מתמטי

מה שנראה כאן כפרפר,

אינו אלא גרפים של הפונקציה:

$$y = e^{\cos x} - a\cos 4x + \sin^5 \frac{x}{12}$$

עבור ערכים שונים של הפרמטר a:

$$a = \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5$$

גאומטריה אוקלידית - א - ללא פרופורציה וללא מעגל

לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים.

שאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות.

המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה.

יתכן שיש שאלות בספר שאינן ממוינות, כי לא נמצאה להן קטגוריה מתאימה.

את החלוקה הכין **שרון חיים**.

משולשים - חפיפה

2, 3, 5, 9, 11, 12, 13, 15

משפט חפיפה רביעי

5

משולש שווה־צלעות

1, 2, 14

משולש 30° - 60° - 90°

1, 8, 14

משפט פיתגורס

1

מרובעים

- מקבילית

7, 14

- מלבן

5, 10

- מעוין

1, 10, 15

- ריבוע

1, 3, 9, 12

- טרפז

4, 8

קטעים מיוחדים ונקודות מפגש

- קטע אמצעים במשולש

4, 5, 6, 7, 10, 11, 13

- קטע אמצעים בטרפז

4, 8

- תיכון ליתר

6, 7, 8, 14

- מפגש תיכונים במשולש

7

שטחים

3, 5, 9, 12, 15

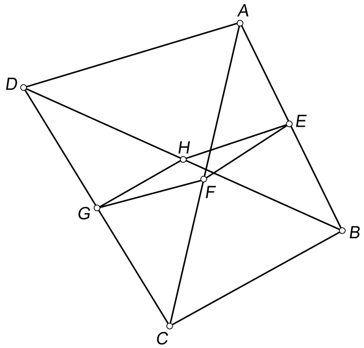
מגדל של פלינדרומים ראשוניים

כל הפלינדרומים המספריים הבאים הם מספרים ראשוניים

2
30203
133020331
1713302033171
12171330203317121
151217133020331712151
1815121713302033171215181
16181512171330203317121518161
316181512171330203317121518161 33
9333161815121713302033171215181613339
11933316181512171330203317121518161333911

לא ידוע אם יש אינסוף פלינדרומים ראשוניים.

(**Garland Lee Honaker**, מרצה למתמטיקה בוירג'יניה, ארה"ב)



11. (804 , קיץ תשע״ב - 2012 , מועד א)

במרובע $ABCD$ נקודה E היא אמצע הצלע AB ,

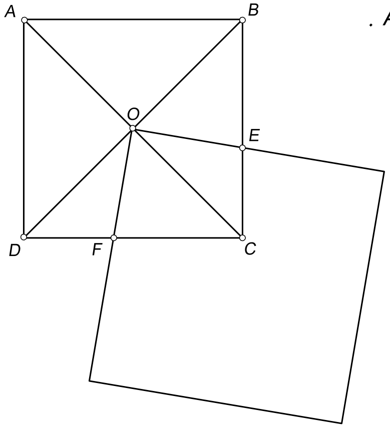
ונקודה G היא אמצע הצלע DC .

נקודה F היא אמצע האלכסון AC ,

ונקודה H היא אמצע האלכסון DB .

הוכח: **א.** $EF \parallel HG$.

ב. $\triangle EHG \cong \triangle EFG$. **(76)**



12. (005 , קיץ תשע״ב - 2012 , מועד א) נתון ריבוע $ABCD$.

אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה O .

בנקודה O נמצא קדקוד של ריבוע אחר.

שתי צלעות סמוכות של הריבוע האחר חותכות את

הצלעות BC ו־ DC בנקודות E ו־ F בהתאמה.

א. הוכח כי $\triangle OEC \cong \triangle OFD$.

ב. נתון כי שטח הריבוע $ABCD$ הוא 100 סמ״ר.

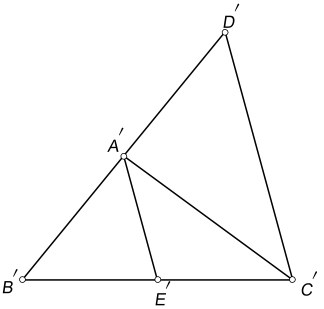
חשב את שטח המרובע $OFCE$. **(76)**

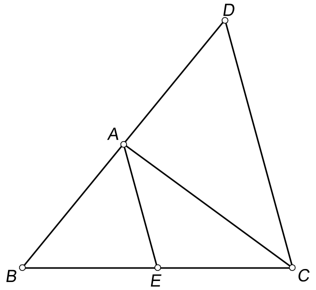
13. (804 , קיץ ע״א - 2011 , מועד ב)

AE הוא תיכון לצלע BC במשולש ABC . $A'E'$ הוא תיכון לצלע $B'C'$ במשולש $A'B'C'$.

$AE = A'E'$, $AC = A'C'$, $BA = B'A'$. המשיכו את הצלע BA עד D כך ש־ $BA = AD$,

והמשיכו את הצלע $B'A'$ עד D' כך ש־ $B'A' = A'D'$.





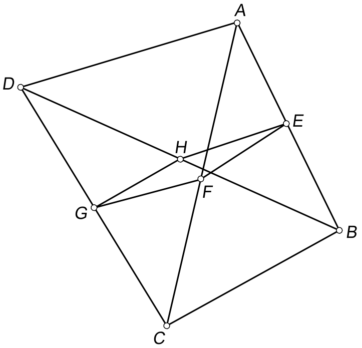
א. נמק מדוע $AE \parallel DC$. **ב.** הוכח: $\triangle ADC \cong \triangle A'D'C'$. **ג.** הוכח: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

(77)

תשובות

12. **ב.** $S_{OFCE} = 25$ (סמ״ר)

11. א.



$\underline{\triangle ABC:}$ (1) $EF \parallel BC$

$\underline{\triangle DBC:}$ (1) $HG \parallel BC \quad \Rightarrow^{(2)} \quad \mathbf{EF \parallel HG} \ (\checkmark)$

ב.

(3) $EF = \frac{1}{2}BC \ , \ HG = \frac{1}{2}BC \quad \Rightarrow^{(2)} \quad EF = HG$

$\Rightarrow^{(4)} \quad HE = FG \ , \ \angle EHG = \angle EFG$

(5) $\mathbf{\triangle EHG \cong \triangle GFE} \ (\checkmark)$

(בשאלה: $\triangle EHG \cong \triangle EFG$. סדר קדקודים זה אינו מתאים לחפיפה.

סדר הקדקודים המתאים לחפיפה הוא כפי שמוצג בפתרון.)

(1) קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית   (2) כלל המעבר

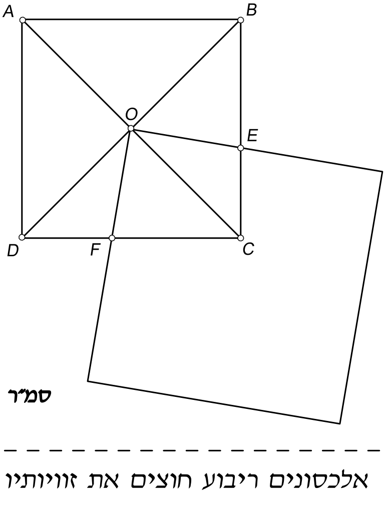
(3) קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע השלישית

(4) מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות - הוא מקבילית.

במקבילית צלעות נגדיות שוות וזוויות נגדיות שוות   (5) משפט חפיפה צלע־זווית־צלע

---

12. א.



(1) $\angle OCE = \angle ODF = 45^{\circ}$, (2) $\angle EOC = \angle DOF$

(3) $OD = OC \quad \Rightarrow^{(4)} \quad \mathbf{\triangle OEC \cong \triangle OFD} \ (\checkmark)$

ב.

$S_{\triangle DOC} = S_{\triangle OFD} + S_{\triangle OFC}$

$=^{(5)} S_{\triangle OEC} + S_{\triangle OFC} = S_{OFCE}$

$\Rightarrow^{(6)} \quad S_{OFCE} = S_{\triangle DOC} =^{(7)} \frac{100}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{OFCE} = 25}$ **סמ״ר**

(1) אלכסונים ריבוע חוצים את זוויותיו

(2) כל אחת משתי הזוויות משלימות את $\angle FOC$ ל־ 90°

(3) אלכסוני ריבוע שווים זה לזה וחוצים זה את זה   (4) משפט חפיפה זווית־צלע־זווית

(5) מהחפיפה שבסעיף א   (6) כלל המעבר

(7) אלכסוני ריבוע מחלקים אותו לארבעה משולשים חופפים

גאומטריה אוקלידית - ב - פרופורציה ודמיון ללא מעגל

לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות.
המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה.
יתכן שיש שאלות בספר שאינן ממוינות, כי לא נמצאה להן קטגוריה מתאימה.
את החלוקה הכין **שרון חיים**.

משולשים

- חפיפה

7, 8, 17, 22, 33, 37

- משולש שווה־צלעות

21, 36

- משולש $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$

21

- משפט פיתגורס

2, 4, 7, 17, 23, 29, 37

מרובעים

- דלתון

22

- מקבילית

6, 12, 18, 27, 30, 31

- מלבן

23, 32, 38

- ריבוע

2, 7, 8

- טרפז

1, 3, 9, 15, 16, 21, 26, 27, 34

- טרפז שווה־שוקיים

4, 19, 22, 30, 33

קטעים מיוחדים ונקודות מפגש

- אנך אמצעי

13

- קטע אמצעים במשולש

6, 13, 16, 25, 36

- קטע אמצעים בטרפז

21, 30

- תיכון ליתר

27, 30, 36

- מפגש תיכונים במשולש

4, 5, 23

שטחים

1, 12, 14, 18, 26, 30

פרופורציה

- משפט תאלס

1, 3, 6, 8, 10, 14, 15, 16, 22, 25, 26, 28, 33
34, 35, 36, 38, 39

- משפט חוצה־זווית במשולש

4, 9, 10, 19, 24, 25, 29, 39

- דמיון

1, 2, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 23
24, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 37

- יחס בין שטחי משולשים דומים

5, 6, 9, 20, 27, 39

- יחס היקפים במשולשים דומים

11

- משפט דמיון צלע־זווית־צלע

2, 3, 5, 17, 38

תוכיח!

כריסטיאן גולדבך *(Goldbach C., 1690 – 1764) היה פרופסור למתמטיקה והיסטוריה באוניברסיטת פטרסבורג (רוסיה), מורם של ילדי הצאר.*

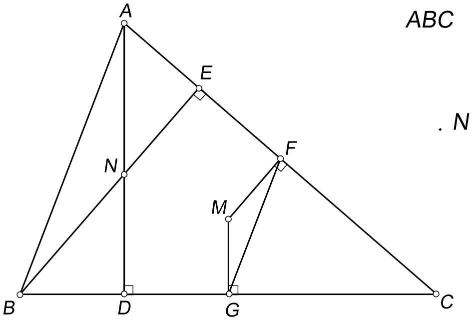
גולדבך שיער כי כל מספר זוגי (פרט ל־2) ניתן לתיאור כסכום של שני מספרים ראשוניים.

דוגמאות: $250 = 11 + 239$, $112 = 53 + 59$, $8 = 5 + 3$.

מאז נבדקו כ־300,000 מספרים זוגיים, ולא נמצא מקרה שיסתור את הטענה.

מצד שני, גם לא נמצאה הוכחה לטענה זו למרות הנסיונות הרבים.

*לכן, תכונה זו ידועה היום כ'**השערת גולדבך**' (בניגוד ל'משפט' - טענה המוכחת מתמטית).*



13. (806, קיץ תש"ע - 2010, מועד א) נתון משולש ABC חד־זוויות. BE הוא גובה לצלע AC, ו־ AD הוא גובה לצלע BC. הגבהים נפגשים בנקודה N.

FM הוא אנך אמצעי לצלע AC,

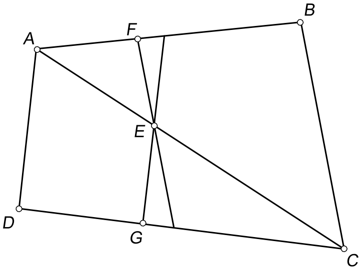
ו־ GM הוא אנך אמצעי לצלע BC.

א. הוכח: **(1)** $\angle BAC = \angle GFC$

(2) $\angle ABN = \angle MFG$

(3) $\triangle ANB \sim \triangle GMF$

ב. מצא את היחס $\frac{BN}{FM}$. נמק. **(103)**



14. (005, קיץ תש"ע - 2010, מועד א)

במרובע ABCD נקודה E נמצאת על האלכסון AC.

דרך נקודה E מעבירים שני ישרים:

ישר המקביל לצלע BC וחותך את AB בנקודה F,

וישר המקביל לצלע AD וחותך את DC בנקודה G.

א. הוכח: **(1)** $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AC}$ **(2)** $\frac{EF}{BC} + \frac{EG}{AD} = 1$.

ב. נתון: $\frac{EF}{BC} = \frac{2}{5}$. **(1)** מצא את היחס $\frac{GC}{DG}$. **(103)**

(2) מהו היחס בין שטח המשולש AGC לשטח המשולש ADG? נמק.

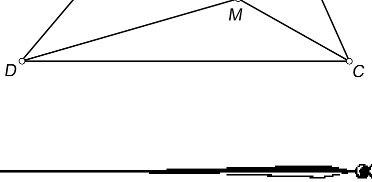
15. (005, קיץ תש"ע - 2010, לוחמים)

בטרפז ABCD $(AB \parallel DC)$ מתקיים $DC = 2AB$.

הנקודה E נמצאת על השוק BC כך ש־ $BC = 3BE$.

הנקודה F נמצאת על האלכסון AC כך ש־ $FE \parallel DC$.

האלכסון AC והקטע DE נחתכים בנקודה M.



א. חשב את היחס: **(1)** $\frac{FE}{AB}$ **(2)** $\frac{FE}{DC}$

ב. הוכח: $MC = 3FM$

ג. חשב את היחס $\frac{AM}{MC}$. **(104)**

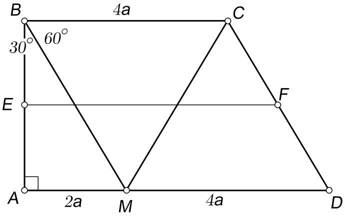
תשובות

13. ב. $\frac{BN}{FM} = 2$

14. ב. (1) 1.5 **(2)** 1.5

15. א. (1) $\frac{FE}{AB} = \frac{2}{3}$ **(2)** $\frac{FE}{DC} = \frac{1}{3}$ **ג.** $\frac{AM}{MC} = 1$

21. א.



(1) $\angle MBC = 60^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \angle ABM = 30^{\circ}$

(2) $AM = \frac{1}{2}BM \quad \Rightarrow \quad 2a = \frac{1}{2}BM \quad \Rightarrow \quad \mathbf{BM = 4a}$ **(ר״א)**

ב.

$BM = BC = 4a \ , \quad \frac{EF}{AD} = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad EF = \frac{5}{6}AD$

(3) $EF = \frac{BC+AD}{2} = \frac{5}{6}AD \quad \Rightarrow \quad 3\ BC + 3\ AD = 5\ AD$

$3\ BC = 2\ AD \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{3}{2}\ BC = \frac{3}{2} \cdot 4a = 6a \quad \Rightarrow \quad MD = AD - AM = 6a - 2a = 4a$

$BC = MD \ , \quad BC \parallel MD \quad \Rightarrow^{(4)}$ מקבילית $BCDM \quad \Rightarrow^{(5)} \quad \angle MDC = \angle MBC \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\angle CDM = 60^{\circ}}$

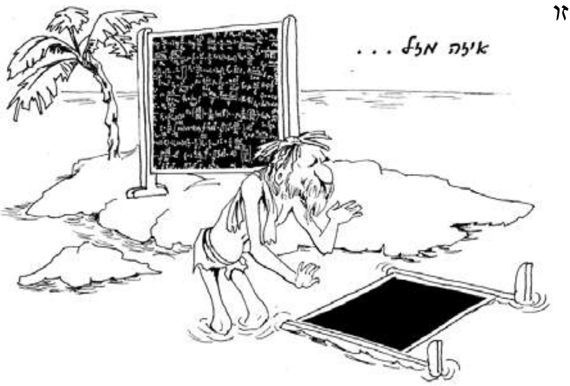
---

(1) גודל זווית במשולש שווה־צלעות (2) ניצב במי״ז מול זווית 30° שווה למחצית היתר

(3) קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום אורכי הבסיסים

(4) זוג צלעות שוות ומקבילות זו לזו במרובע - מגדיר מקבילית

(5) זוויות נגדיות במקבילית שוות זו לזו



מייקל פאראדיי (Michael Faraday , 1791-1867) היה פיסיקאי וכימאי אנגלי. הוא היה חבר במכון המלכותי של לונדון ואחד מתפקידיו היה לתכנן ניסוי שבועי כדי לשעשע את חברי המכון חובבי המדע.

צורך מתמיד זה ברעיונות חדשים עשה את פאראדיי לאחד הפיזיקאים הניסויים הגדולים ביותר בכל הזמנים. החשמל והמגנטיות ריתקו אותו במיוחד, משום שידע שזרם חשמלי יכול ליצור כח מגנטי. הוא בילה עשר שנים בנסיון להוכיח את הכיוון ההפוך, כלומר: שמגנט יכול ליצור זרם חשמלי, ובשנת 1831 עלה הדבר בידו. הוא הראה שחשמל ומגנטיות הם שני היבטים של אותה תופעה: אלקטרומגנטיות.

מסופר שהמלך ויליאם הרביעי שאל את פאראדיי מה התועלת בתכסיסי הסלון המדעיים שלו, ונענה: 'אינני יודע, הוד מעלתך, אבל אני סמוך ובטוח שיום יבוא ואתה תטיל עליהם מיסים . . . '

(המִספרים של הטבע, איאן סטיוארט, הוצאת הד־ארצי)

גאומטריה אוקלידית - ג - מעגל ללא פרופורציה ודמיון

לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות.

המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה.

יתכן שיש שאלות בספר שאינן ממוינות, כי לא נמצאה להן קטגוריה מתאימה.

את החלוקה הכין **שרון חיים**.

משולשים

- חפיפה

2, 6, 10, 15, 20, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 32, 33, 37

- משפט חפיפה רביעי

3

- משולש שווה־צלעות

6, 7, 12, 13, 19, 26, 36

- משולש $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$

7, 18, 31, 34

- משפט פיתגורס

4, 21, 30, 32

מרובעים

- דלתון

8, 20, 22, 27, 28

- מקבילית

3, 13, 19, 34, 36, 39

מעוין

16, 17, 18, 21, 38

ריבוע

11

- טרפז שווה־שוקיים

15, 28

קטעים מיוחדים ונקודות מפגש

- אנך אמצעי

18

- קטע אמצעים במשולש

1, 5, 26

- מפגש תיכונים במשולש

33

- תיכון ליתר

5, 14, 35

שטחים

11, 21, 27, 35, 39

משולש חסום במעגל

12, 13, 21, 24, 36, 37

מרובע חסום במעגל

4, 6, 12, 19, 20, 23, 25, 26, 27, 31, 33, 38, 39

מרובע חוסם מעגל

20, 28

שני מעגלים

2, 3, 4, 9, 14, 25, 39

קטע מרכזים

14

מפגש אנכים אמצעיים במשולש

21

קיים מספר בן 67 ספרות, המורכב מהספרות '6' ו־ '7' בלבד, ש־ 2^{67} מחלק אותו.

כלומר: קיימים המספרים x ו־ y כך ש: $2^{67}x = y$ (x ו־ y טבעיים, כמובן)

כאשר y הינו מספר בן 67 ספרות המורכב מהספרות '6' ו־ '7' בלבד.

וכך זה נראה:

$$6,677,767,667,676,666,776,766,667,777,767,666,677,766,776,777,777,777,777,666,766,667,776$$
$$= 2^{67} \times 45,250,313,829,053,138,281,370,553,831,260,951,302,463,537,892$$

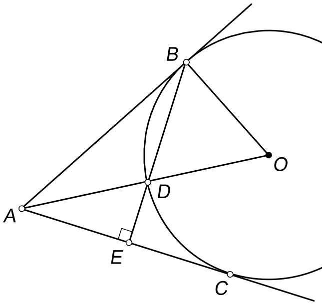
יש לכך הוכחה שניתן להסבירה גם ברמה תיכונית.

כשמבינים את ההוכחה, אז התופעה הרבה יותר רחבה:

לכל n טבעי (גדול ככל שיהיה) קיים מספר המורכב מהספרות '1' ו־'2' בלבד, או '2' ו־'3' בלבד, וכו' עד '8' ו־'9' בלבד (שתי ספרות טבעיות עוקבות בין '1' ל־'9') כך ש־ 2^n מחלק אותו.

לשם המחשה: קיים מספר המכיל 100,000,000,000 (מאה מיליארד) ספרות שכול מורכבות מ־'8' ו־'9' בלבד (או מ־'7' ו־'8' בלבד וכו') כך ש־ $2^{100,000,000,000}$ מחלק אותו!

29. (804 , חורף תשע"ג - 2013)



מנקודה A יוצא ישר המשיק בנקודה B

למעגל שמרכזו O .

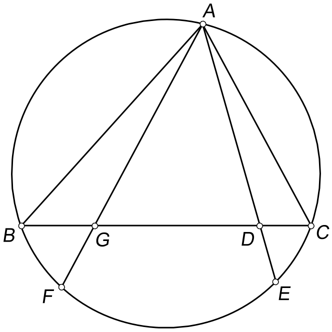
הקטע AO חותך את המעגל בנקודה D .

א. הוכח: $\angle BOD = 2\cdot\angle ABD$.

מנקודה A יוצא עוד ישר המשיק למעגל בנקודה C .

המשך המיתר BD חותך את AC בנקודה E . $BE \perp AC$.

ב. הוכח: **(1)** $\angle BOD = 2\cdot\angle DAE$ **(2)** $BD = AD$. **(156)**



30. (806 , חורף תשע"ג - 2013) משולש ABC חסום במעגל.

המיתר AF חותך את BC בנקודה G .

המיתר AE חותך את BC בנקודה D .

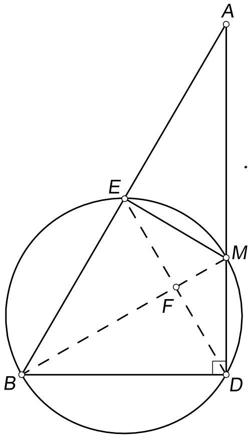
$\angle BAF = \angle CAE$, $BF = BG$.

א. הוכח: $\triangle AGB \cong \triangle ACE$. **(156)**

ב. נתון גם: $GC = 6_{cm}$, $CE = 2_{cm}$, $AC = 5_{cm}$.

חשב את האורך של המיתר AE .

31. (005 , חורף תשע"ג - 2012)



נתון משולש ישר־זווית ABD ($\angle ADB = 90^{\circ}$).

נקודה E נמצאת על היתר AB ונקודה M נמצאת על הניצב AD .

המרובע $EMDB$ חסום במעגל.

אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה F .

$FM = 3_{cm}$, $BF = 9_{cm}$, $EM = 6_{cm}$.

א. **(1)** הוכח: קוטר המעגל החוסם את המרובע $EMDB$ הוא $2\cdot EM$.

(2) מהו גודל הזווית ההיקפית החדה הנשענת על המיתר EM ? נמק.

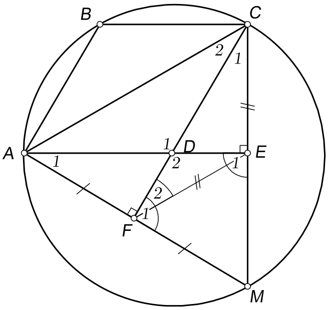
ב. נתון גם כי אלכסוני המרובע $EMDB$ מאונכים זה לזה.

הוכח: **(1)** $\angle EBM = \angle MBD$ **(2)** $AM = 2\cdot MD$. **(157)**

תשובות

30. **ב.** $AE = \sqrt{41}_{cm}$ **31.** **א.** **(2)** $\angle EDM = 30^{\circ}$

19. א.



$(1)\ \angle B + \angle M = 180^\circ \quad , \quad (2)\ \angle B = \angle D_1$

$(3)\ \angle D_1 = \angle D_2 \quad \Rightarrow^{(4)} \quad \angle D_2 + \angle M = 180^\circ$

$(5)\ \angle E_1 + \angle F_1 = 180^\circ$

$(6)\ \angle A_1 = \angle C_1 \quad \Rightarrow^{(7)} \quad \angle A_1 + \angle M = \angle C_1 + \angle M$

$(8)\ \angle E_1 = \angle F_1 \quad \Rightarrow \quad \angle E_1 = \angle F_1 = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AE \perp CM \ , \ CF \perp AM}$ (√)

ב. (1)

$(6)\ AF = FM \ , \ (9)\ CF \perp AM \quad \Rightarrow^{(10)} \quad CA = CM \quad \Rightarrow^{(11)} \quad \angle C_1 = \angle C_2$

$(6)\ CE = EF \quad \Rightarrow^{(12)} \quad \angle C_1 = \angle F_2 \quad \Rightarrow^{(4)} \quad \angle C_2 = \angle F_2 \quad \Rightarrow^{(13)} \quad \mathbf{EF \parallel AC}$

(2)

$AF = FM \ , \ EF \parallel AC \quad \Rightarrow^{(14)} \quad CE = EM \quad \Rightarrow^{(10)} \quad AC = AM \quad \Rightarrow^{(4)} \quad \mathbf{AC = CM = MA}$ (√)

---

(1) סכום זוויות נגדיות של מרובע חסום במעגל

(2) זוויות נגדיות במקבילית שוות זו לזו

(3) זוויות קדקודיות (4) כלל המעבר

(5) השלמה ל־ 360° במרובע (DEMF)

(6) נתון (7) סכום גדלים שווים (8) השלמה ל־ 180° במשולש

(9) מסעיף קודם (10) משולש שגובה בו מתלכד עם התיכון הוא שווה־שוקיים

(11) גובה לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם חוצה־זווית הראש

(12) זוויות בסיס במשולש שווה־שוקיים שוות זו לזו

(13) אם זוויות מתחלפות בישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי שוות זו לזו - הישרים מקבילים זה לזה

(14) FE הוא קטע אמצעים כי הוא חוצה צלע אחת ומקביל לשלישית

> *מוח האדם מורכב מביליון (אלף מיליונים 1,000,000,000) תאים, בתוכם 100 מיליארד נוירונים בקליפת המוח. כל אחד מנוירונים אלה מחובר לאלף עד 10,000 נוירונים אחרים. יחד הם יוצרים רשת עצבית מדהימה בגודלה, בהיקפה ובמורכבותה. אם היו מותחים את כל תאי העצב במוח וסיביהם, ומחברים אותם ברצף, אורכם היה כמרחק כדור הארץ מהירח וחזרה!*
>
> **(צבי ינאי / שיחות עם מדענים)**

גאומטריה אוקלידית - ד-1 - פרופורציה במעגל (תאלס, חוצה־זווית ודמיון)

לנוחותכם מובאת חלוקת השאלות לפי נושאים. שימו לב ששאלה יכולה להשתייך למספר קטגוריות.

המספרים המצוינים הם מספרי השאלות שבפרק זה.

יתכן שיש שאלות בספר שאינן ממוינות, כי לא נמצאה להן קטגוריה מתאימה.

את החלוקה הכין **שרון חיים**.

משולשים

- חפיפה

5, 26

- משולש שווה־צלעות

5

- משולש $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$

9, 25

- משפט פיתגורס

3, 6, 9, 10, 12, 13, 16, 20^*, 21

מרובעים

- מקבילית

22

- מלבן

12

- ריבוע

3

- טרפז

9

קטעים מיוחדים במשולש

- קטע אמצעים במשולש

4

פרופורציה

- משפט תאלס

20^*, 21

- **חוצה־זווית במשולש**

1, 10

- דמיון

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 23, 24, 25, 26

- יחס שטחי משולשים דומים

8, 13, 25

מעגל

- משולש חסום במעגל

1, 2, 4, 7, 8, 10, 11

- מרובע חסום במעגל

9, 19, 20^*, 22_b, 23, 25

- שני מעגלים

13, 19, 26

⟺ : **שתיית תה ירוק מונעת שבץ. גם המשפט ההפוך נכון: שבץ מונע שתיית תה ירוק . . .**

גאומטריה אוקלידית - ד-2 - פרופורציה במעגל (משפטי הפרופורציה)

השאלות מופיעות במע' 194-195

חפיפת משולשים

2

משפט פיתגורס

1, 4

טרפז

2

מרובע חסום במעגל

2

חוצה־זווית במשולש

1

שני מעגלים

4

שני מיתרים נחתכים

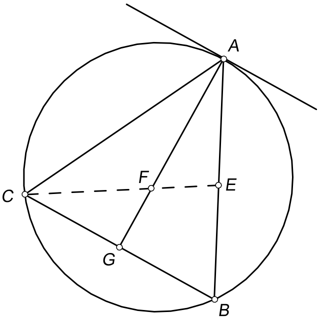
1

מכפלת חותך בחלקו החיצוני

4

חותך וריבוע המשיק

2, 3



.10 (005 , סתיו ס״ט - 2009 , מועד לוחמים)

משולש ABC חסום במעגל.

המשיק למעגל בנקודה A מקביל לצלע BC.

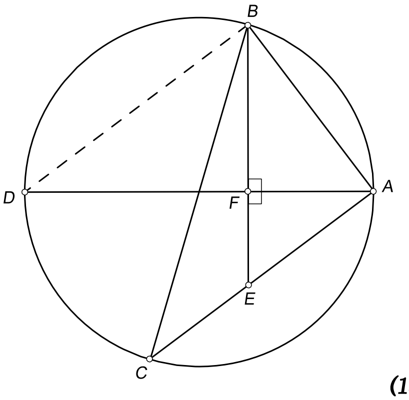
א. הוכח: $\triangle ABC$ הוא משולש שווה־שוקים.

ב. במשולש ABC, הישר AG הוא גובה לצלע BC.

הישר CE הוא חוצה־זווית ACB.

הישרים AG ו־ CE נחתכים בנקודה F.

נתון: $BC = 10_{cm}$, $AC = 13_{cm}$. חשב את האורך של FG. **(180)**



.11 (005 , חורף ס״ט - 2009)

משולש ABC חסום במעגל. AD הוא קוטר במעגל זה.

דרך הקדקוד B העבירו אנך ל־ AD .

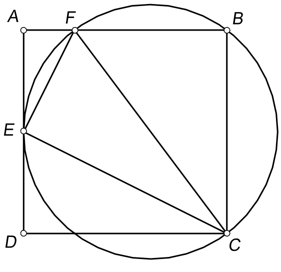
האנך חותך את הקוטר בנקודה F ,

ואת הצלע AC בנקודה E .

א. הוכח: $\triangle AEB \sim \triangle ABC$.

ב. נתון: $AC = 8_{cm}$, $AB = 6_{cm}$, $AF = 3.6_{cm}$.

מצא את האורך של: **(1)** AE **(2)** BE . **(181)**



.12 (005 , חורף ס״ט - 2009 , מועד מיוחד)

מרובע $ABCD$ הוא מלבן.

הקדקודים של המלבן, B ו־ C , נמצאים על המעגל.

הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E ,

והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה F .

א. הוכח כי $\triangle DCE \sim \triangle ECF$.

נתון: $ED = 1.5_{cm}$, $EC = 3.8_{cm}$.

חשב את האורך של: **ב.** FC **ג.** AE **(181)**

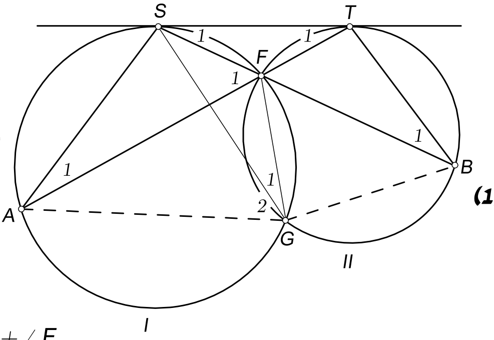
תשובות

.10 **ב.** $FG = 3\frac{1}{3}$ cm

.11 **ב.** **(1)** $AE = 4.5_{cm}$ **(2)** $BE = 7.5_{cm}$

.12 **ב.** $FC = 4.14_{cm}$ **ג.** $AE = 1.5_{cm}$

19. א.



(1) $\angle S_1 = \angle A_1$, $\angle T_1 = \angle B_1$

(2) $\triangle SAT \sim \triangle TSB \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{ST}{AS} = \frac{TB}{ST}$ (√)

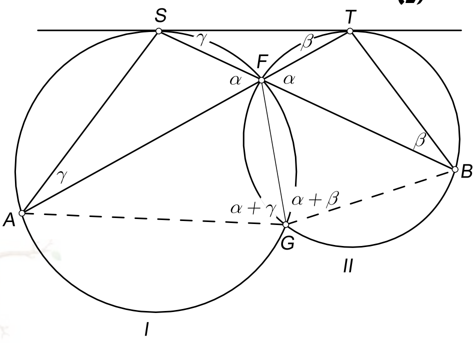
ב. (1)

(4) $\angle G_1 = \angle A_1$, $\angle G_2 = \angle F_1$

$\overset{(5)}{\Rightarrow} \angle G_1 + \angle G_2 = \angle A_1 + \angle F_1$

$\Rightarrow \angle AGF = \angle SFA + \angle SAF$ (√)

(2)



(6) $\angle AGF = \alpha + \gamma \overset{(7)}{\Rightarrow} \angle BGF = \alpha + \beta$

<u>$\triangle SFT$:</u> (8) $\alpha = \beta + \gamma$

$\angle AGB = 2\alpha + \beta + \gamma = 2\alpha + \alpha \overset{(9)}{=} 180^\circ$

$\Rightarrow \alpha = 60^\circ$ (√)

---

(1) זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני

(2) משפט דמיון זווית־זווית (3) יחס הדמיון

(4) זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת, שוות זו לזו (5) חיבור גדלים שווים

(6) מסעיף ב(1) (7) הוכחה סימטרית ל־ב(1)

(8) זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי זוויות המשולש שאינן צמודות לה

(9) נתון

סימטריה מפתיעה

המספרים a , b ו־ c הנתונים במשוואה: $a = b + c$ אינם מקיימים ביניהם קשר סימטרי:

a הינו הסכום של b ו־c. b הינו ההפרש בין a ל־c, ו־c הינו ההפרש בין a ל־b.

בכל זאת קיים ביניהם הקשר הסימטרי הבאה:

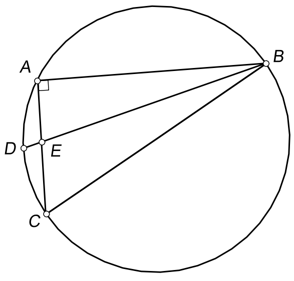
$$a^4 + b^4 + c^4 = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2$$

דוגמה: נבחר: $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$ אזי:

$$3 = 5 - 2 \Rightarrow 3^4 + 5^4 + 2^4 = 81 + 625 + 16 = 722$$

$$2\cdot 5^2 \cdot 2^2 + 2\cdot 2^2 \cdot 3^2 + 2\cdot 3^2 \cdot 5^2 = 2\cdot 25\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 9 + 2\cdot 9\cdot 25 = 200 + 72 + 450 = 722 \ (\checkmark)$$

גאומטריה אוקלידית - ד-2 - פרופורציה עם מעגל (5 יח') - משפטי הפרופרוציה במעגל - שאלות



1. (005 , קיץ ס"ו - 2006 , מועד לוחמים)

AB ו־ AC הם שני מיתרים במעגל,

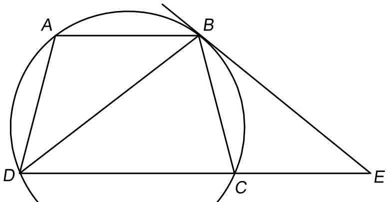
הנצבים זה לזה. הנקודה D היא אמצע הקשת AC.

המיתר BD חותך את המיתר AC בנקודה E.

נתון: $R = 15_{cm}$, $AC = 18_{cm}$.

א. חשב את האורך של CE.

ב. חשב את האורך של EB ואת האורך של ED. **(196)**



2. (005 , קיץ ס"ו - 2006 , מועד א)

טרפז $ABCD$ $(AB \| DC)$ חסום במעגל.

נקודה E נמצאת על המשך הבסיס DC,

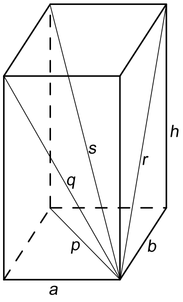
כך ש־BE משיק למעגל.

האלכסון DB חוצה את הזווית ADC.

א. הוכח כי $\triangle ABD \cong \triangle CBE$.

ב. נתון גם: $DC = 15_{cm}$, $AB = 10_{cm}$.

חשב את אורך המשיק BE . **(197)**



בעיה פיתגורית פתוחה

בהינתן שלָשָׁה פיתגורית $x^2 + y^2 = z^2$ (x, y, z טבעיים),

ניתן למצוא מימדי תיבה $a \times b \times h$, כך שכל מימדיה מספרים טבעיים,

וגם כל אלכסוני פיאותיה טבעיים.

הנוסחאות הן אלו: $h = 4xyz$, $b = y(4x^2 - z^2)$, $a = x(4y^2 - z^2)$.

דוגמה: $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ ($3^2 + 4^2 = 5^2$, שלָשָׁה פיתגורית).

אזי: $h = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 240$, $b = 4(4 \cdot 3^2 - 5^2) = 44$, $a = 3(4 \cdot 4^2 - 5^2) = 117$.

מתקיים:

$(\surd)$ $r = \sqrt{44^2 + 240^2} = 244$, $q = \sqrt{117^2 + 240^2} = 267$, $p = \sqrt{117^2 + 44^2} = 125$.

השאלה הפתוחה (כלומר: שטרם יודעים את פתרונה) היא, האם ניתן למצוא a, b, c טבעיים, כך שגם אלכסון התיבה (s) יהיה טבעי, בנוסף לאלכסוני הפאות.

תשובות

1. **א.** $CE = 10_{cm}$ **ב.** $DE = \sqrt{10} = 3.16_{cm}$, $BE = 8\sqrt{10}_{cm} = 25.3_{cm}$

2. **ב.** $BE = 15.81_{cm}$

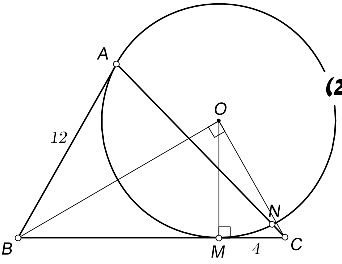
3. א. (1)

(1) $BM = BA \overset{(2)}{=} 12$, (2) $MC = 4 \quad \Rightarrow \quad BC = 12 + 4 = 16$

(2) $AC = BC \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AC = 16_{cm}}$

(2)

(3) $CN \cdot AC = MC^2 \quad \Rightarrow \quad CN \cdot 16 = 4^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{CN = 1_{cm}}$



ב.

(4) $OM \perp BC \quad \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad R = OM = \sqrt{BM \cdot MC} = \sqrt{12 \cdot 4}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{R = \sqrt{48}_{cm} = 6.93_{cm}}$

---

(1) שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה (2) נתון

(3) חותך ומשיק למעגל מנקודה אחת: מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק

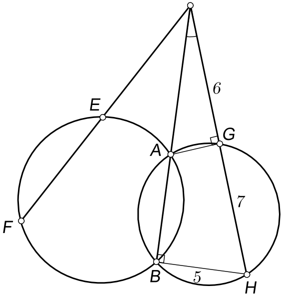
(4) המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה

(5) הגובה ליתר במשולש ישר־זווית הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר

---

4. א.

(1) $CF \cdot CE = \underline{CB \cdot CA}$, $CH \cdot CG = \underline{CB \cdot CA} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{CE \cdot CF = CG \cdot CH}$ (✓)



ב.

(2) $CH = x \quad \Rightarrow \quad CG = x - 7$

(1) $CE \cdot CF = CG \cdot CH \quad \Rightarrow \quad 78 = (x-7) \cdot x \quad / - 78$

$x^2 - 7x - 78 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 19}{2}$

$x > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{26}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{CH = 13_{cm}}$

ג.

$\underline{\triangle CBH:}$ (3) $\angle B = 90^\circ$, $BH = 5$, $CH = 13 \quad \overset{(4)}{\Rightarrow} \quad BC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

$CG = CH - GH = 13 - 7 = 6_{cm}$

(1) $BC \cdot AC = HC \cdot GC \quad \Rightarrow \quad 12 \cdot AC = 13 \cdot 6 \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{13 \cdot 6}{12} = \frac{13}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AC = 6.5_{cm}}$

ד.

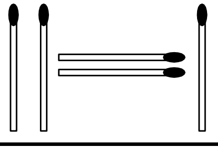
(8) $AG = \sqrt{6.5^2 - 6^2} = 2.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle HCB}} = \frac{\frac{2.5 \cdot 6}{\cancel{2}}}{\frac{5 \cdot 12}{\cancel{2}}} = \frac{15}{60} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle HCB}} = \frac{1}{4}}$

---

(1) מנקודה למעגל יוצאים שני חותכים: מכפלת חותך למעגל בחלקו החיצוני הוא גודל קבוע

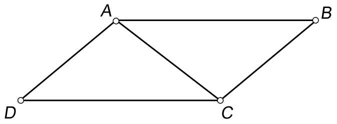
(2) סימון (3) נתון (4) פיתגורס

הזז גפרור אחד בלבד (לא להוציא. להשאיר!) כך שהשוויון יהיה נכון.



פתרון (בצופן א"ת ב"ש): תסת שסעצא תסת בפפצ תסת.

23. (804 , חורף תש״ע - 2010)



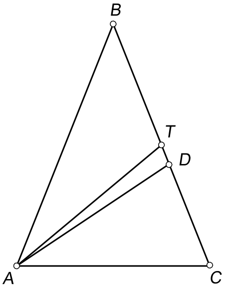
במקבילית ABCD נתון:

$\angle BAD = 140^{\circ}$, $AC = AD = 16_{cm}$.

א. חשב את האורך של: **(1)** הצלע DC **(2)** האלכסון DB

ב. AE הוא הגובה ל־ DB במשולש ABD . מצא את האורך של AE . **(226)**

24. (804 , קיץ תש״ע - 2010 , מועד א)



במשולש שווה־שוקיים ABC $(BA = BC)$ זווית הבסיס היא 72° .

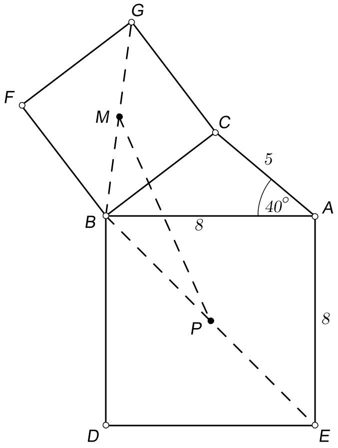
אורך הבסיס AC הוא 10_{cm} .

AD חוצה־זווית BAC , ו־ AT תיכון לשוק BC .

א. חשב את אורך: **(1)** השוק במשולש ABC **(2)** התיכון AT

ב. חשב את גודל הזווית TAD . **(227)**

25. (804 , קיץ תשע״א - 2011 , מועד א)



על הצלע BC של משולש ABC בנו ריבוע BCGF .

על הצלע AB של המשולש בנו ריבוע ABDE .

אלכסוני הריבוע BCGF נפגשים בנקודה M ,

ואלכסוני הריבוע ABDE נפגשים בנקודה P .

נתון: $\angle BAC = 40^{\circ}$, $AC = 5_{cm}$, $AB = 8_{cm}$.

א. מצא את גודל הזווית CBA .

ב. מצא את גודל הזווית MBP .

ג. מצא את אורכי הצלעות במשולש BMP . **(228)**

מספרים עֲצְרוֹנִיִּים*

$1 = 1!$, $2 = 2!$, $145 = 1! + 4! + 5!$, $40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$

אלו כל המספרים בעלי תכונה זו. (שם זה הוצע על ידי פרופסור **משה ירדן**. באנגלית: factorion)

תשובות

23. **א.** **(1)** $DC = 24.51_{cm}$ **(2)** $DB = 38.18_{cm}$ **ב.** $AE = 6.6_{cm}$

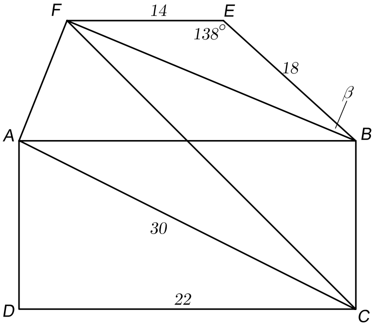
24. **א.** **(1)** $BC = BA = 16.18_{cm}$ **(2)** $AT = 10.74_{cm}$ **ב.** $\angle TAD = 9.69^{\circ}$

25. **א.** $\angle CBA = 37.62^{\circ}$ **ב.** $\angle MBP = 127.62^{\circ}$ **ג.** $MP = 8.47_{cm}$, $BP = 5.66_{cm}$, $BM = 3.73_{cm}$

4. א.

<u>$\triangle BEF$:</u> (1) $BF^2 = 14^2 + 18^2 - 2\cdot 14\cdot 18\cdot \cos 138^\circ$

$= 894.54 \ /\sqrt{\ } \quad \Rightarrow \quad \mathbf{BF = 29.91_{cm}}$



ב.

<u>$\triangle ADC$:</u> (2) $AD = \sqrt{30^2 - 22^2} = \sqrt{416} = 20.4_{cm}$

(3) $AD = BC = 20.4_{cm}$

<u>$\triangle EBF$:</u> (4) $\frac{14}{\sin\beta} = \frac{29.91}{\sin 138^\circ}$

$\Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{14\cdot\sin 138^\circ}{29.91} = 0.3132 \quad \Rightarrow \quad \beta = 18.25^\circ$

(הפתרון הנוסף: $\beta = 180^\circ - 18.25^\circ = 161.75^\circ$ נפסל מכיון שבמשולש זה יש כבר זווית אחת קהה.)

(5) $\angle EBA = 180^\circ - 138^\circ = 42^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle FBA = 42^\circ - 18.25^\circ = 23.75^\circ$

<u>$\triangle FBC$:</u> $\angle FBC = 23.75^\circ + 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\angle FBC = 113.75^\circ}$

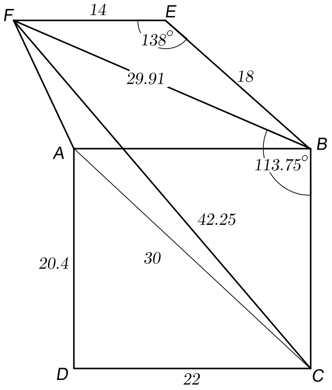
ג.

(1) $FC^2 = 20.4^2 + 29.91^2 - 2\cdot 20.4\cdot 29.91\cdot \cos 113.75^\circ = 1802.25 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{FC = 42.45_{cm}}$

<u>הערה:</u>

הציור כפי שהוא מופיע בשאלה אינו מתאים לנתונים שבה.

הציור הנכון שמתאים לנתוני השאלה מופיע להלן:



(1) משפט הקוסינוסים (2) משפט פיתגורס (3) צלעות נגדיות במלבן - שוות זו לזו

(4) משפט הסינוסים (5) השלמה ל־ 180° של זוויות חד־צדדיות

Yesterday is history, tomorrow is a mystery.
Today is a gift, that's why it's called the present.

חשבון דיפרנציאלי

פונקציות פולינומיאליות - שאלות (כל השאלות בפרק זה נלקחו משאלון 003.)

1. (קיץ ס"ו - 2006 , מועד א) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x(x+3)^2$.

א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ג. בכל אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה עובר ישר המשיק לפונקציה.

מצא את משוואות המשיקים. **(245)**

2. (קיץ ס"ט - 2009 , מועד א) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 3$.

א. מצא את שיעורי x של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

ג. **(1)** מצא את ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודות המינימום שלה.

(2) האם יש נקודה על גרף הפונקציה $f(x)$ ששיעור y שלה הוא -6 ? **(245)**

אם כן - מצא את שיעור x שלה. אם לא - נמק מדוע לא.

3. (קיץ ס"ט - 2004 , לוחמים)

ישר ששיפועו 1 משיק לגרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + ax - 3$ בנקודה A שבה $x = 1.5$.

א. חשב את ערך הפרמטר a .

הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א, וענה על הסעיפים ב ו־ ג .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A .

ג. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה A ומאונך למשיק שמצאת בסעיף ב . **(246)**

27 הספרות הראשונות של π, עם 26 הספרות הראשונות שלו מהסוף להתחלה,

יוצרות מספר פָּלינדרומי ראשוני:

$31, 415, 926, 535, 897, 932, 384, 626, 433\mathbf{8}33, 462, 648, 323, 979, 853, 562, 951, 413$

תשובות

1. **א.** max : $(-3,0)$ min : $(-1,-8)$ **ב.** $(-3,0)$ $(0,0)$ **ג.** $y = 0$, $y = -8$

2. **א.** $x_{max} = 0$, $x_{min} = \pm 2$ **ב.** $\searrow$: $(x < -2) \cup (0 < x < 2)$, $\nearrow$: $(-2 < x < 0) \cup (x > 2)$

ג. **(1)** $y_{min} = -5$ **(2)** לא

3. **א.** $a = 4$ **ב.** $y = x - \frac{3}{4}$ **ג.** $y = -x + 2.25$

חשבון דיפרנציאלי - פונקציות פולינומיאליות - פתרונות

1. א.

$y=(x-1)(x-3) \quad ; \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1\ ,\ x_2=3 \quad \Rightarrow \quad (1,0)\ ,\ (3,0)$

$y'=(x^2-4x+3)'=2x-4$

$y'(1)=2\cdot1-4=-2 \quad \Rightarrow \quad y-0=-2(x-1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y=-2x+2}$

$y'(3)=2\cdot3-4=2 \quad \Rightarrow \quad y-0=2(x-3) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y=2x-6}$

ב.

$-2x+2=2x-6 \quad \Rightarrow \quad -4x=-8 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x=2}$

ג.

$(1)\ \ y'(x) \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2x-4 \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x=2}$

$(2)\ \ y(2)=(2-1)(2-3)=-1\ \ ,\ y'(2)=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y=-1}$

---

2. א.

$f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^2+3$

$f'(x)=2x^3-8x \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x(x^2-4)}=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0\ ,\ x_{2,3}=\pm2$

x		-2		0		2	
f'	$-+=-$	0	$--=+$	0	$+-=-$	0	$++=+$
f	↘	min	↗	max	↘	min	↗

$\mathbf{x_{min}=\pm2\ \ ,\ \ x_{max}=0}$

ב. ישירות מהטבלה:

$\underline{\nearrow:}\ \mathbf{(-2<x<0)\cup(x>2)} \quad , \quad \underline{\searrow:}\ \mathbf{(x<-2)\cup(0<x<2)}$

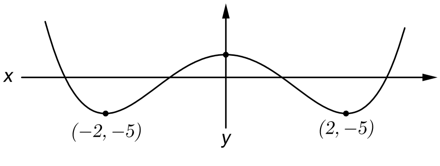
ג. (1)

$f(\pm2)=\frac{1}{2}\cdot16-4\cdot4+3=8-16+3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y_{min}=-5}$

(2) <u>לא.</u>

הערך המינימלי של הפונקציה מתקבל בנקודות שבהן $x=\pm2$ וערכו הוא -5 גבוה מ־ -6 . ערך זה הוא גם המינימום המוחלט, כי: ביניהן יש את נקודת המקסימום. מימין לנקודה שבה $x=2$ הפונקציה עולה לכיוון $+\infty$, ומשמאל לנקודה שבה $x=-2$. הפונקציה 'שואפת' ל־ $+\infty$ ככל ש־ x קטן.

המחשה (לא נדרש):



7. (קיץ ס"ה - 2005 , מועד א) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{-8x+4}{x^2+2x+1}$.

א. מצא את: **(1)** תחום ההגדרה של הפונקציה **(2)** נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

(4) שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה. **(269)**

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k הישר $y=k$ אינו חותך את גרף הפונקציה. נמק.

8. (קיץ ס"ה - 2005 , מועד ב) $y=4$ אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $y=1+\frac{Ax^2}{x^2-4}$ (A פרמטר).

א. מצא את הערך של הפרמטר A.

ב. הצב בפונקציה את הערך של A שמצאת בסעיף א', ומצא את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה **(2)** נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים

(3) האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה **(4)** נקודות הקיצון של הפונקציה, וסוג הקיצון.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה. **(270)**

9. (חורף ס"ו - 2006) נתונה הפונקציה $y=\frac{x^2}{a-x}$ (a - פרמטר).

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=6$ מקביל לציר x.

א. מצא את הערך של a.

ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א', ומצא את:

1. תחום ההגדרה של הפונקציה

2. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

3. נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

4. האסימפטוטה המקבילה לאחד הצירים.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתון הישר $y=k$. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k ,

הישר חותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת. **(271)**

תשובות

7. **א.** **(1)** $x\neq -1$ **(2)** $(0,4)$ $(\frac{1}{2},0)$ **(3)** $x=-1$, $y=0$ **(4)** min : $(2,-\frac{4}{3})$ **ג.** $k<-\frac{4}{3}$

8. **א.** $A=3$ **ב.** **(1)** $x\neq \pm 2$ **(2)** $(\pm 1,0)$, $(0,1)$ **(3)** $x=\pm 2$ **(4)** max : $(0,1)$

9. **א.** $a=3$ **ב.** **1.** $x\neq 3$ **2.** $(0,0)$ **3.** max $(6,-12)$ min $(0,0)$ **4.** $x=3$

ד. $k_1=0$, $k_2=-12$

.13 $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2-2}\ ,\ a\neq 2$

א.

(1) $f'(x)=\frac{-2x(x^2-2)-2x(a-x^2)}{(x^2-2)^2}$

$$=\frac{-2x((x^2-2)+(a-x^2))}{(x^2-2)^2}=\boxed{\frac{-2x(a-2)}{(x^2-2)^2}}\overset{?}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

$$f(0)=\frac{a}{-2}\quad\Rightarrow\quad \textbf{extremum}:\ (0,-\frac{a}{2})$$

(2) $y=-4.5\quad\Rightarrow\quad y_{ext.}=-4.5=-\frac{a}{2}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{a=9}$

ב. $f(x)=\frac{9-x^2}{x^2-2}$

(1) $x^2-2\neq 0\quad\Rightarrow\quad x^2\neq 2\quad\Rightarrow\quad \mathbf{x\neq\pm\sqrt{2}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{2}}\frac{9-x^2}{x^2-2}=\frac{\to 5}{\to 0}=\infty\quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=\pm\sqrt{2}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9-x^2}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(\frac{9}{x^2}-1)}{\cancel{x^2}(1-\frac{2}{x^2})}=\frac{0-1}{1-0}=\frac{-1}{1}=-1\quad\Rightarrow\quad \mathbf{y=-1}$$

(3) $x=0\quad\Rightarrow\quad y=\frac{9}{-2}=-4.5\quad\Rightarrow\quad \mathbf{(0,-4.5)}$

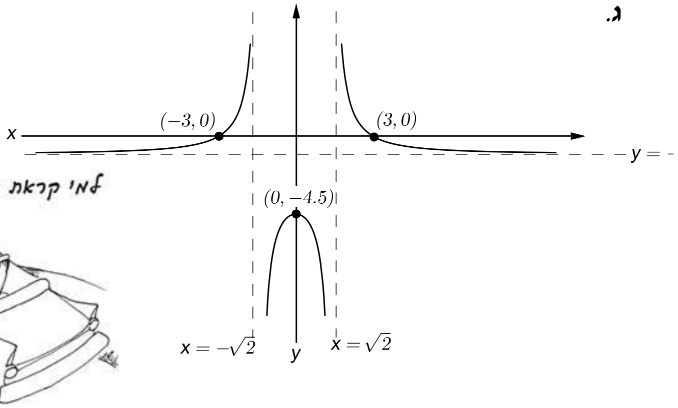
$y=0\quad\Rightarrow\quad 9-x^2=0\quad\Rightarrow\quad x^2=9\quad\Rightarrow\quad x=\pm 3\quad\Rightarrow\quad \mathbf{(\pm 3,0)}$

(4) $\boxed{f'(x)=\frac{-14x}{(x^2-2)^2}}$

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
y'	$\frac{--}{+}=+$	∅	$\frac{--}{+}=+$	0	$\frac{-+}{+}=-$	∅	$\frac{-+}{+}=-$
y	↗	asym.	↗	max	↘	asym.	↘

↗ : $(x<-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2}<x<0)$, ↘ : $(0<x<\sqrt{2})\cup(x>\sqrt{2})$

ג.



32. א. (1)

$$f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1 \quad , \quad x^2+3a\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\neq -3a \quad , \quad a>0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, \mathbf{x}$$

(2)

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+3a)-2x(x^2-a)}{(x^2+3a)^2}=\frac{2x((x^2+3a)-(x^2-a))}{(x^2+3a)^2}=\frac{2x\cdot 4a}{(x^2+3a)^2}=\boxed{\frac{8ax}{(x^2+3a)^2}}\overset{?}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

x		0	
f'	$\frac{-}{+}=-$	0	$\frac{+}{+}=+$
f	↘	min	↗

$\Rightarrow \quad \underline{\searrow}$**:** $\mathbf{x<0}$ **,** $\underline{\nearrow}$**:** $\mathbf{x>0}$

(3)

$$f''(x)=\frac{8a(x^2+3a)^2-2(x^2+3a)\cdot 2x\cdot 8ax}{(x^2+3a)^4}=\frac{8a(x^2+3a)((x^2+3a)-4x^2)}{(x^2+3a)^4}=\boxed{\frac{8a(3a-3x^2)}{(x^2+3a)^3}}\overset{?}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{a}$$

x		$-\sqrt{a}$		$\sqrt{a}$	
y''	$\frac{+\,-}{+}=-$	0	$\frac{+\,+}{+}=+$	0	$\frac{+\,-}{+}=-$
y	⌒	inf.	⌣	inf.	⌒

$\Rightarrow \quad \mathbf{x=\pm\sqrt{a}}$

(4)

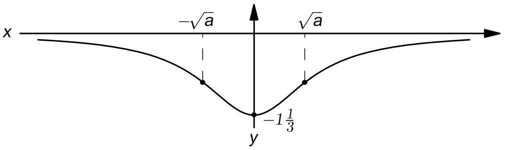
$$x=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-a}{3a}-1=-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(0\ ,\ -1\tfrac{1}{3})}$$

$$y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-a}{x^2+3a}-1=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-a=x^2+3a \quad \Rightarrow \quad 4a=0 \ , \ a>0 \quad \Rightarrow \quad \emptyset$$

(5)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}(1-\frac{a}{x^2})}{\cancel{x^2}(1+\frac{3a}{x^2})}-1\right)=\frac{1-0}{1+0}-1=1-1=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y=0}$$

ב.



ג. (1)

$$f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1 \quad , \quad x^2+3a\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\neq -3a \quad , \quad a<0 \quad \Rightarrow \quad -3a>0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x\neq\pm\sqrt{-3a}}$$

(2)

$$\boxed{f'(x)=\frac{8ax}{(x^2+3a)^2}}$$

x		$-\sqrt{-3a}$		0		$\sqrt{-3a}$	
f'	$\frac{-\,-}{+}=+$	$\emptyset$	$\frac{-\,-}{+}=+$	0	$\frac{-\,+}{+}=-$	$\emptyset$	$\frac{-\,+}{+}=-$
f	↗	asy.	↗	max	↘	asy.	↘

$\Rightarrow \quad \underline{\nearrow}$**:** $\mathbf{(x<-\sqrt{-3a})\cup(-\sqrt{-3a}<x<0)}$ **,** $\underline{\searrow}$**:** $\mathbf{(0<x<\sqrt{-3a})\cup(x>\sqrt{-3a})}$

(3)

$$f''(x)=\frac{24a(a-x^2)}{(x^2+3a)^3}\overset{?}{=}0 \ , \ a<0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\emptyset}$$ **(אין נקודות פיתול)**

חשבון דיפרנציאלי - פונקציות עם שורש ריבועי - שאלות

(כל השאלות נלקחו משאלון 004, אלא אם צוין אחרת.)

1. (קיץ ס"ו - 2006 , מועד א) נתונה הפונקציה $y=\sqrt{ax^2-16a}$, $a \neq 0$ פרמטר.

א. חשב את הערך של a , אם שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=8$ הוא $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

הצב בפונקציה $a=\frac{1}{2}$, וענה על הסעיפים הבאים:

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ד. הראה כי הנגזרת של הפונקציה אינה מתאפסת בתחום ההגדרה של הפונקציה.

ה. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה. נמק.

ו. מה הם השיעורים של נקודות המינימום המוחלט של הפונקציה? נמק.

ז. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה. **(308)**

2. (סתיו ס"ז - 2007 , מועד לוחמים) נתונה הפונקציה $y=\sqrt{-x^2+4x+a}$ (a פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא $\frac{1}{\sqrt{8}}$.

א. מצא את הערך של a.

הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א', וענה על הסעיפים ב'-ד'.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה. **(309)**

3. (סתיו ס"ז - 2006 , מועד לוחמים) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x+\sqrt{x-4}}{x}$

א. חקור את הפונקציה ומצא את:

(1) תחום ההגדרה **(2)** נקודות קיצון וסוגן **(3)** תחומי עליה וירידה

ב. נתון גם כי לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y=1$.

שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. עבור אילו ערכי k הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת? **(309)**

תשובות

1. **א.** $a=\frac{1}{2}$ **ב.** $(x \leq -4) \cup (x \geq 4)$ **ג.** $(\pm 4,0)$ **ה.** $\underline{\searrow:}\ x<-4$, $\underline{\nearrow:}\ x>4$ **ו.** $(\pm 4,0)$

2. **א.** $a=5$ **ב.** $-1 \leq x \leq 5$ **ג.** $max_{ab.}:\ (2,3)$; $min_{ab.}:\ (-1,0)$, $(5,0)$

3. **א.** **(1)** $x \geq 4$ **(2)** $min_{ep}(4,1)$, $max(8,1\frac{1}{4})$ **(3)** $\underline{\searrow:}\ x>8$, $\underline{\nearrow:}\ 4<x<8$ **ב.** עמ' 251

ג. $k_1=1$, $k_2=1\frac{1}{4}$

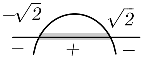
10. א.

$$f(x)=ax-\sqrt{2-x^2}\ \ ,\ \ y=-x-\sqrt{2}\ \ ,\ \ f(0)=y(0)=-\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad\underset{\text{נקודת ההשקה}}{(0,-\sqrt{2})}$$

$$f'(x)=a-\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}\cdot(-2x)=a+\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\quad,\quad f'(0)=-1\quad\Rightarrow\quad\mathbf{a=-1}$$

ב. (1)

$$f(x)=-x-\sqrt{2-x^2}\quad,\quad 2-x^2\ge 0\quad\Rightarrow$$



$$\Rightarrow\quad\mathbf{-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}}$$

(2)

$$f'(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\overset{?}{=}0\quad\Rightarrow\quad\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}=1\quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{2-x^2}\ \ /(\ )^2\quad\Rightarrow\quad x^2=2-x^2$$

$$2x^2=2\quad\Rightarrow\quad x^2=1\quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\pm1$$

$$\underline{x=1:}\qquad 1\overset{?}{=}\sqrt{2-1^2}\quad\Rightarrow\quad 1\overset{\checkmark}{=}1\quad\Rightarrow\quad\mathbf{x=1}$$

$$\underline{x=-1:}\quad -1\overset{?}{=}\sqrt{2-1^2}\quad\Rightarrow\quad -1\overset{\times}{=}1$$

(3)

$$\left.\begin{array}{l} f(-\sqrt{2})=\sqrt{2}-\sqrt{2-2}=\sqrt{2} \\[2ex] f(1)=-1-\sqrt{2-1}=-1-1=-2 \\[2ex] f(\sqrt{2})=-\sqrt{2}-\sqrt{2-2}=-\sqrt{2} \end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{min_{ab.}:\ (1,-2)}\quad,\quad\mathbf{max_{ab.}:\ (-\sqrt{2},\sqrt{2})}$$

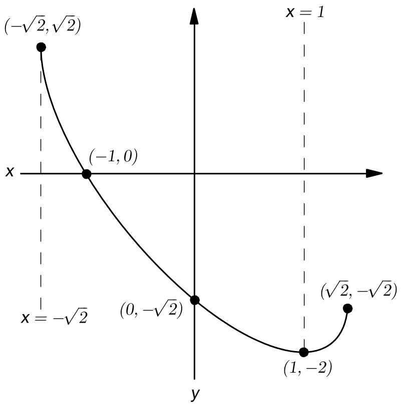
ג.

חיתוך עם ציר x :

$$f(x)=0\quad\Rightarrow\quad -x-\sqrt{2-x^2}=0\quad\Rightarrow\quad x=-\sqrt{2-x^2}\quad\Rightarrow\quad x^2=2-x^2\quad\Rightarrow\quad 2x^2=2$$

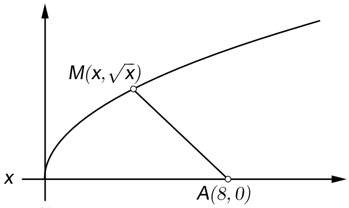
$$x_{1,2}=\pm1\quad\rightarrow\quad\underline{x=1:}\quad -1-\sqrt{2-1}\overset{?}{=}0\quad\Rightarrow\quad -2\overset{\times}{=}0$$

$$\underline{x=-1:}\quad -(-1)-\sqrt{2-1}\overset{?}{=}0\quad\Rightarrow\quad 1-1\overset{\checkmark}{=}0\quad\Rightarrow\quad\underline{(-1,0)}$$



ד.

$$d((x=1)\leftrightarrow(x=-\sqrt{2}))=1-(-\sqrt{2})\quad\Rightarrow\quad\mathbf{d=1+\sqrt{2}}$$ **(יחידות אורך)**



11. (003 , קיץ תשס״ז - 2007 , מועד א)

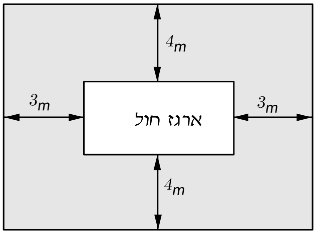
נתונה הפונקציה $y=\sqrt{x}$.

על ציר x נתונה הנקודה $A(8,0)$.

M היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה.

א. מה צריך להיות שיעור x של הנקודה M , כדי שהמרחק MA יהיה מינימלי?

ב. חשב את המרחק המינימלי MA. **(347)**



12. (003 , קיץ ס״ז - 2007 , מועד ב מיוחד)

היקפו של מגרש משחקים שצורתו מלבן הוא 140_m.

במרכזו בנו ארגז חול בצורת מלבן

ומסביב לארגז החול שתלו דשא בכל שטח המגרש שנותר,

כמתואר בציור.

א. מה צריכים להיות האורך והרוחב של מגרש המשחקים כדי ששטח ארגז החול יהיה מקסימלי?

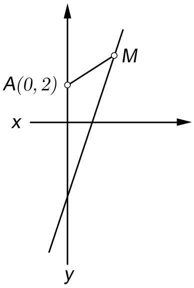
ב. מהו השטח המקסימלי של ארגז החול? **(347)**

13. (003 , קיץ ס״ח - 2008 , מועד ב) מבין כל שני מספרים x ו־ y המקיימים $2x+y=50$,

מצא את שני המספרים שסכום ריבועיהם מינימלי. **(348)**

14. (003 , סתיו ס״ט - 2008 , לוחמים) מבין כל המספרים x ו־ y המקיימים $2x+y=20$,

מצא את שני המספרים שסכום ריבועיהם הוא מינימלי. **(348)**



15. (003 , חורף תשס״ט - 2009)

נתון הישר $y=3x-4$.

M היא נקודה כלשהי על הישר.

מצא על הישר הנתון את השיעורים של נקודה M **(348)**

הקרובה ביותר לנקודה $A(0,2)$.

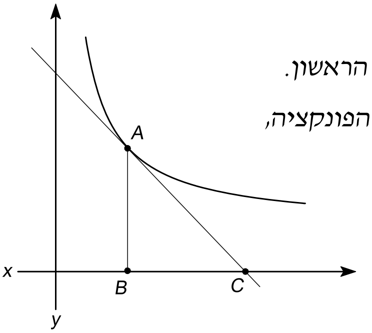
תשובות

11. **א.** $x_M=7.5$ **ב.** $AM_{min}=\sqrt{7.75}=2.78$ (יחידות אורך)

12. **א.** $36_m \times 34_m$ **ב.** $S=784_{m^2}$

13. $x=20\ ,\ y=10$ **14.** $x=8\ ,\ y=4$ **15.** $M(1\frac{4}{5}\ ,\ 1\frac{2}{5})$

44. (804 , חורף תשע"ה - 2015)



בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{4}{x}$ ברביע הראשון.

דרך הנקודה A שעל גרף הפונקציה העבירו משיק לגרף הפונקציה,

והעבירו אנך לציר x .

המשיק חותך את ציר x בנקודה C ,

והאנך חותך את ציר x בנקודה B .

נסמן את שיעור x של הנקודה A ב־ t .

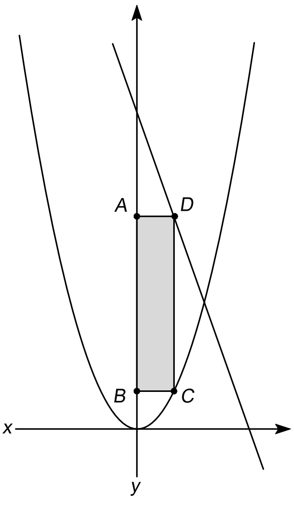
א. **(1)** הבע באמצעות t את שיפוע המשיק.

(2) הבע באמצעות t את משוואת המשיק. **(262)**

(3) הבע באמצעות t את האורך של הקטע BC .

ב. מצא את הערך של t שעבורו סכום הקטעים $AB+BC$ הוא מינימלי.

45. (804 , חורף תשע"ה - 2015 , לוחמים)



נתונה הפרבולה $f(x)=x^2$ ונתון הישר $g(x)=-3x+9$.

בין הפרבולה, הישר והצירים חסום מלבן $ABCD$,

כך שהצלע AB מונחת על ציר y ,

קדקוד D על הישר הנתון ברביע הראשון

וקדקוד C על הפרבולה.

א. סמן ב־ x את שיעור x של הנקודה D ,

ובטא בעזרתו את אורכי הצלעות AD ו־ DC .

ב. **(1)** מצא עבור איזה ערך של x

שטח המלבן $ABCD$ הוא מקסימלי.

(2) מצא את השטח המקסימלי של המלבן. **(263)**

מספרי יחידה ראשוניים

המספר המורכב מפעמיים הספרה '1' או מ־19 או מ־317 או מ־1031 פעמים '1' - הוא מספר ראשוני

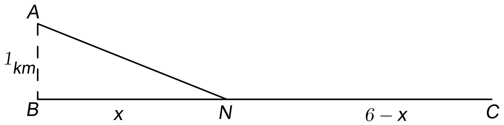
תשובות

44. **א.** **(1)** $m=-\frac{4}{t^2}$ **(2)** $y=-\frac{4}{t^2}x+\frac{8}{t}$ **(3)** $BC=t$ (יחידות אורך) **ב.** $t=2$

45. **א.** $AD=x$ (יחידות אורך) , $DC=-x^2-3x+9$ (יחידות אורך)

ב. **(1)** $x_{max}=1$ **(2)** $S_{max}=5$ (יחידות ריבועיות)

39.



$$AN=\sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad time_{AN}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{v}$$

$$time_{NC}=\frac{6-x}{\frac{13v}{12}}=\frac{12(6-x)}{13v}$$

$$T_{ime}(x)=\frac{1}{v}\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{12(6-x)}{13}\right)$$

$$T'(x)=\boxed{\frac{1}{v}\left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}-\frac{12}{13}\right)}\overset{?}{=}0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{12}{13} \quad \Rightarrow \quad 169x^2=144(x^2+1) \quad \Rightarrow \quad 25x^2=144 \;,\; x>0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{12}{5}$$

בדיקה: $\frac{\frac{12}{5}}{\sqrt{\frac{144}{25}+1}}=\frac{\frac{12}{5}}{\sqrt{\frac{169}{25}}}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{13}{5}}=\frac{12}{13}$ (√)

x	0		$\frac{12}{5}$		6
T ′		−	0	+	
T		↘	min	↗	

$$\Rightarrow \quad x=\frac{12}{5} \quad \Rightarrow \quad AN+NC=\sqrt{1+\left(\frac{12}{5}\right)^2}+6-\frac{12}{5}$$

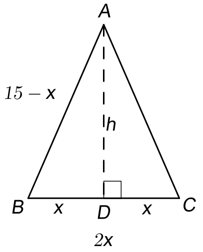
$$AN+NC=\sqrt{1+\frac{144}{25}}+\frac{18}{5}=\sqrt{\frac{169}{25}}+\frac{18}{5}=\frac{13}{5}+\frac{18}{5} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{ANC=\frac{31}{5}=6\frac{1}{5}_{km}}$$

---

40. א.

$$AB=AC \quad \Rightarrow \quad AB=\frac{30-2x}{2}=15-x$$

$$AD\perp BC \quad \Rightarrow^{(1)} \quad BD=DC=x$$



$\underline{\triangle ADB:}$ (2) $AD=\sqrt{(15-x)^2-x^2}=\sqrt{225-30x+x^2-x^2}$

$$\mathbf{AD\ =\ h=\sqrt{225-30x}\ _{cm}}$$

ב.

$$S_{ABC}=\frac{BC\cdot h}{2} \quad \Rightarrow \quad S(x)=\frac{2x\cdot\sqrt{225-30x}}{2}=x\cdot\sqrt{225-30x}$$

$$S'(x)=1\cdot\sqrt{225-30x}+x\cdot\frac{-30}{2\sqrt{225-30x}}=\sqrt{225-30x}-\frac{15x}{\sqrt{225-30x}}$$

$$=\frac{225-30x-15x}{\sqrt{225-30x}}=\boxed{\frac{225-45x}{\sqrt{225-30x}}}\overset{?}{=}0 \quad \Rightarrow \quad 225-45x=0 \quad \Rightarrow \quad 45x=225 \quad \Rightarrow \quad x=5$$

x	0		5		7.5
S′		+	0	−	
S		↗	max	↘	

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x_{max}=5_{cm}}$$

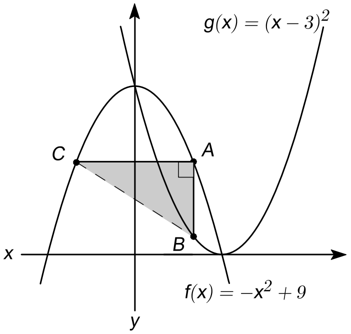
ג.

$BC=2x=2\cdot 5=10$, $AB=AC=15-x=15-5=10$ ⇒ $\mathbf{AB=AC=BC}$ (√)

---

(1) גובה לבסיס במשולש שווה־שוקיים הוא גם תיכון (2) משפט פיתגורס

41. א.



<u>A :</u> $x_A = t \quad \Rightarrow \quad y_A = -t^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A\,(t\,,\ -t^2 + 9)}$

<u>B :</u> $x_B = x_A = t \quad \Rightarrow \quad y_B = (t-3)^2$

$\Rightarrow \quad \mathbf{B(t\,,\ (t-3)^2)}$

<u>C :</u> $y_C = y_A = -t^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 9 = -t^2 + 9$

$x^2 = t^2 \quad , \quad x_C < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C(-t\,,\ -t^2 + 9)}$

ב.

$AB = y_A - y_B = -t^2 + 9 - (t-3)^2 = -t^2 + 9 - t^2 + 6t - 9 = -2t^2 + 6t$

$AC = x_A - x_C = t - (-t) = 2t$

$S(t) = S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{(-2t^2+6t)\cdot 2t}{2} = -2t^3 + 6t^2$

$S'(t) = -6t^2 + 12t = -6t(t-2) \overset{?}{=} 0 \quad , \quad t > 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2$

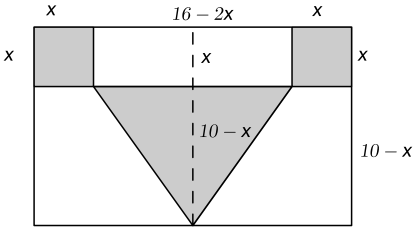
$S''(t) = -12t + 12 \quad \Rightarrow \quad S''(2) = -12 \cdot 2 + 12 < 0 \quad \Rightarrow \quad max \ (\surd) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t = 2}$ **(יחידות אורך)**

---

42. א. ישירות מהציור:

$\mathbf{h = (10 - x)\ _m}$

ב.



$S = f(x) = x^2 + x^2 + \frac{(16-2x)\cdot(10-x)}{2}$

$f(x) = 2x^2 + 80 - 8x - 10x + x^2$

$f(x) = 3x^2 - 18x + 80$

$f'(x) = 6x - 18 \overset{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3_m$

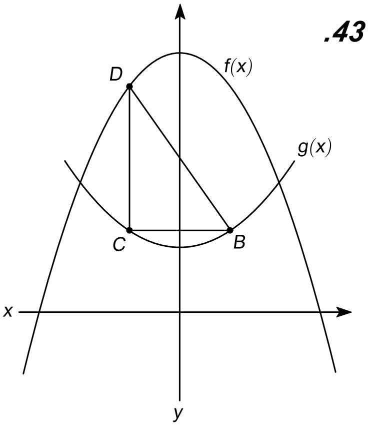
$f''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad f''(3) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad min \ (\surd)$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_{min} = 3_m}$

ג.

$f(3) = 3 \cdot 9 - 18 \cdot 3 + 80 = 53 \quad \Rightarrow \quad \frac{53}{16 \cdot 10} \cdot 100 \ = \mathbf{33.125\%}$

43. **א.**



$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 8 \ , \ g(x) = \frac{1}{6}x^2 + 2$

$\underline{B:} \ x = t \ , \ B \in g(x) \ \Rightarrow \ \mathbf{B(t \, , \, \frac{1}{6}t^2 + 2)}$

$\underline{C:} \ y_C = y_B = \frac{1}{6}t^2 + 2 \ , \ C \in g(x) \ \Rightarrow \ x_C = -t$

$\Rightarrow \ \mathbf{C(-t \, , \, \frac{1}{6}t^2 + 2)}$

$\underline{D:} \ x_D = x_C = -t \ , \ D \in f(x) \ \Rightarrow \ \mathbf{D(-t \, , \, -\frac{1}{3}t^2 + 8)}$

ב.

$CB = x_B - x_C = t - (-t) = 2t$

$CD = y_D - y_C = -\frac{1}{3}t^2 + 8 - (\frac{1}{6}t^2 + 2) = 6 - \frac{1}{2}t^2$

$S_{\triangle BCD} = \frac{BC \cdot CD}{2} = \frac{2t \cdot (6 - \frac{1}{2}t^2)}{2} \ \Rightarrow \ \mathbf{S_{\triangle BCD} = 6t - \frac{1}{2}t^3}$ **(יחידות ריבועיות)**

ג.

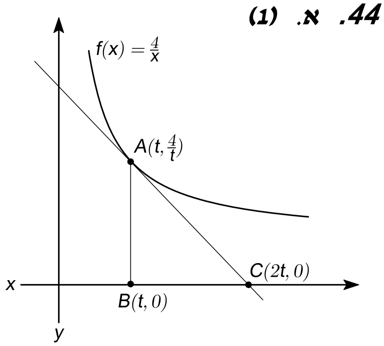
$h(t) = 6t - \frac{1}{2}t^3$

$h'(t) = 6 - \frac{3}{2}t^2 \overset{?}{=} 0 \ \Rightarrow \ \frac{3}{2}t^2 = 6 \ \Rightarrow \ t^2 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4 \ , \ t > 0 \ \Rightarrow \ t = 2$

$h''(t) = -3t \ \Rightarrow \ h''(2) = -3 \cdot 2 < 0 \ \Rightarrow \ \max \ (\surd) \ \Rightarrow \ \mathbf{t_{min} = 2}$

---

44. **א.** **(1)**



$f(x) = \frac{4}{x} \ , \ f'(x) = -\frac{4}{x^2} \ \Rightarrow \ m = f'(x_A) \ = \mathbf{f'(t) = -\frac{4}{t^2}}$

(2)

$A(t \, , \, \frac{4}{t}) \ \Rightarrow \ y - \frac{4}{t} = -\frac{4}{t^2}(x - t)$

$y - \frac{4}{t} = -\frac{4}{t^2}x + \frac{4}{t} \ \Rightarrow \ \mathbf{y = -\frac{4}{t^2}x + \frac{8}{t}}$

(3)

$\underline{x_C:} \ y_C = 0 \ \Rightarrow \ -\frac{4}{t^2}x + \frac{8}{t} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{4}{t^2}x = \frac{8}{t} \ \ / \cdot \frac{t^2}{4}$

$\Rightarrow \ x_C = 2t \ \Rightarrow \ BC = x_C - x_B = 2t - t \ \Rightarrow \ \mathbf{BC = t}$ **(יחידות אורך)**

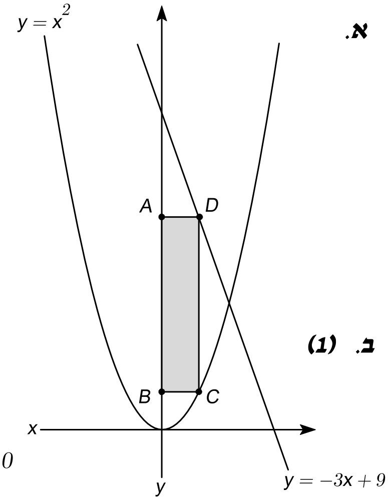
ב.

$AB = y_A = \frac{4}{t}$ (יחידות אורך)

$g(t) = AB + BC = \frac{4}{t} + t \ \Rightarrow \ g'(t) = -\frac{4}{t^2} + 1 \overset{?}{=} 0 \ \Rightarrow \ t^2 = 4 \ , \ t > 0 \ \Rightarrow \ t = 2$

$g''(t) = -4 \cdot (-\frac{2t}{t^4}) = \frac{8}{t^3} \ \Rightarrow \ g''(2) = \frac{8}{2^3} > 0 \ \Rightarrow \ \min \ (\surd) \ \Rightarrow \ \mathbf{t = 2}$

45. א.



$D(x,-3x+9) \quad \Rightarrow \quad A(0,-3x+9)$

$\Rightarrow \quad \mathbf{AD = x}$ **(יחידות אורך)**

$x_C = x_D = x \quad \Rightarrow \quad C(x,x^2) \quad \Rightarrow \quad B(0,x^2)$

$DC = y_D - y_C = -3x + 9 - x^2$

$\Rightarrow \quad \mathbf{DC = -x^2 - 3x + 9}$ **(יחידות אורך)**

ב. (1)

$s(x) = AD\cdot DC = x(-x^2 - 3x + 9) = -x^3 - 3x^2 + 9x$

$s'(x) = -3x^2 - 6x + 9 \overset{?}{=} 0 \;\; / : (-3) \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2\pm4}{2} = -1 \pm 2 \;\; , \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

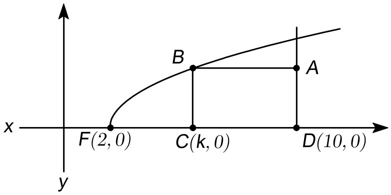
$s''(x) = -6x - 6 \quad \Rightarrow \quad s''(1) = -6 - 6 < 0 \quad \Rightarrow \quad max \;\; (\surd) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_{max} = 1}$

(2)

$S_{max} = s(1) = -1^3 - 3\cdot1^2 + 9\cdot1 = -1 - 3 + 9 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{max} = 5}$ **(יחידות ריבועיות)**

---

46. א.



$f(x) = \sqrt{2x-4} \;\; , \quad B(k,\sqrt{2k-4})$:סימון

$BC = y_B = \sqrt{2k-4}$

$BA = x_A - x_B = 10 - k$

$S_{ABCD} = S(k) = (10-k)\cdot\sqrt{2k-4}$

$S'(k) = (-1)\sqrt{2k-4} + (10-k)\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2k-4}}\cdot\cancel{2} = \frac{-(2k-4)+(10-k)}{\sqrt{2k-4}} = \boxed{\frac{14-3k}{\sqrt{2k-4}}} \overset{?}{=} 0$

$14 - 3k = 0 \quad \Rightarrow \quad 3k = 14 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{14}{3}$

x	2		$\frac{14}{3}$		10
S′		+	0	−	
S		↗	max	↘	

$f(\frac{14}{3}) = \sqrt{2\cdot\frac{14}{3} - 4} = \sqrt{5\frac{1}{3}} = 2.31 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B(4\frac{2}{3}, 2.31)}$

ב.

$y_F = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x-4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad F(2,0)$

$x_C = x_B = 4\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad FC = x_C - x_F = 4\frac{2}{3} - 2 = 2\frac{2}{3}$

$BC = y_B = 2.31 \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle BFC} = \frac{FC\cdot BC}{2} = \frac{2\frac{2}{3}\cdot 2.31}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{\triangle BFC} = 3.08}$ **(יחידות ריבועיות)**