

אלי מיטב

מבחני בגרות במתמטיקה לשאלון **382** (803)

עם פתרונות מלאים

210	11 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד ב	_____	בעיות מילוליות
216	12 - קיץ תשע"א - 2011 - חצב־ברק	_____	1 - קניה ומכירה
222	13 - חורף תשע"ב - 2012	_____	9 - תנועה
229	14 - קיץ תשע"ב - 2012 - מועד א	_____	18 - גאומטריה
235	15 - קיץ תשע"ב - 2012 - מועד ב	_____	26 - גאומטריה אנליטית
241	16 - קיץ תשע"ב - 2012 - חצב־ברק	_____	חשבון דיפרנציאלי
247	17 - חורף תשע"ג - 2013	_____	59 - פונקצית הפולינום
253	18 - חורף תשע"ג - 2013 - לוחמים	_____	70 - פונקציה רציונאלית
259	19 - קיץ תשע"ג - 2013 - מועד א	_____	92 - פונקציה עם שורש ריבועי
265	20 - קיץ תשע"ג - 2013 - מועד ב	_____	101 - בעיות ערך קיצון - מספרים
272	21 - קיץ תשע"ג - 2013 - חצב־ברק	_____	103 - גאומטריה
277	22 - סתיו תשע"ד - 2013 - לוחמים	_____	114 - גרפים
283	23 - חורף תשע"ד - 2014	_____	חשבון אינטגרלי
289	24 - חורף תשע"ד - 2014 - לוחמים	_____	121 - מציאת פונקציה קדומה
294	25 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד א	_____	131 - שטחים
300	26 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד ב	_____	מבחני בגרות
306	27 - קיץ תשע"ד - 2014 - מועד ג	_____	160 - מבנה מבחן הבגרות
313	28 - קיץ תשע"ד - 2014 - חצב־ברק	_____	1 - חורף ס"ט - 2009
319	29 - סתיו תשע"ה - 2014 - מועד ד	_____	2 - קיץ ס"ט - 2009 - מועד א
324	30 - חורף תשע"ה - 2015	_____	3 - קיץ ס"ט - 2009 - מועד ב
331	31 - חורף תשע"ה - 2015 - לוחמים	_____	4 - חורף תש"ע - 2010
336	32 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד א	_____	5 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד א
342	33 - קיץ תשע"ה - 2015 - מועד ב	_____	6 - קיץ תש"ע - 2010 - מועד ב
349	34 - קיץ תשע"ה - 2015 - חצב־ברק	_____	7 - קיץ תש"ע - 2010 - חצב־ברק
355	35 - חורף תשע"ו - 2016	_____	8 - קיץ תש"ע - 2010, המבחן הגנוז
362	36 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד א	_____	9 - חורף תשע"א - 2011
369	37 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד ב	_____	10 - קיץ תשע"א - 2011 - מועד א
376	הנוסחאות הרשמי לשלוש יחידות	_____	

ספרי בגרויות עם פתרונות מלאים יצאו גם לשאלונים 481-482-581-582

ספרי בגרויות עם תשובות סופיות יצאו לשאלונים 481-482-581-582

מספר מילים לפני

ספר זה מכיל כמעט את כל השאלות ממבחני בגרות שנערכו לפי תכנית הצבירה לשאלון 003 בין השנים 2004-2016, ששייכות לחומר של שאלון 382 (803) בהתאם לערכון האחרון של תכנית הלימודים. השאלות מחולקות לפי נושאים ומונחים עם פתרון מלא. לכל שאלה תשובה סופית בעמוד השאלה ופתרון מלא בצמוד לפרק, עם הפניה למספר העמוד (המספר המעובה הרשום ליד כל שאלה). כל השאלות לקוחות מהמבחנים של שאלון 003, אלא אם ציון אחרת. בחלקו השני של הספר מובאים 37 מבחני הבגרות הראשונים של שאלון זה עם פתרון מלא. שאלות, או סעיפי שאלות שחסרים - הינם מחוץ לתכנית הלימודים הנוכחית.

סימונים מתמטיים שמופיעים בספר:

✓ - עליה, \ - ירידה, √ - אישור למה שבקשנו לבדוק או להוכיח
 ∅ - לא מוגדר או אין פתרון, asym. - אסימפטוטה, U - היחס: 'או', cm² - סמ"ר, m² - מ"ר

בחלק מהשאלות שונה נוסח השאלה, מאילוץ עריכה, או מטעם אישי של 'אסתטיקה לשונית'. ככלל - סדר הצגת השאלות הוא כרונולוגי בלבד, למעט אילוץ עריכה. דיוקים נדרשים הושמטו ככוונה.

ההסברים המוצגים הינם תמציתיים, ולעתים אינם מספיקים עבור הנדרש במבחן. הנחיות לגבי הנדרש הינן באחריות המורים ועל התלמיד להיוועץ עימם כשהוא מסתפק לגבי היקף ההסבר הנדרש.

למרות שייתכנו במבחן הבגרות שאלות עם פרמטרים - עד היום לא היו כאלה. בספר זה יש לא מעט שאלות עם פרמטרים. מומלץ להציב את הפרמטר בפונקציה ולפתור את שאר הסעיפים, לאחר ההצבה.

סרטוני הסבר לכל פתרונות המבחנים, שהתקיימו מ-2012 (נכון להיום), כפי שהם מופיעים בספר, נמצאים באתר ההוצאה במקושרת (internet), בעלות שנתית מצחיקה של 20 (עשרים) שקלים בלבד. ראו בגב הכריכה.

'שגיאות מי יבין' (תהלים י"ט). אם נתקלתם בשגיאה כלשהי - בבקשה יידעו אותי על כך, רצוי בדוא"ל. כל תיקון יעודכן כמעט מיידית באתר ההוצאה, בעמוד המידע של ספר זה. התיקונים יוצגו באדום.

שלמי תודה: תודה לכל המורים והתלמידים שהעירו את הערותיהם במשך השנה, ובכך תרמו לתיקון שגיאות ולשיפור פתרונות. תודה מיוחדת למורים מארכימדס - פתרונות למידה ולמורה שריף אמארה מכפר ז'לפה.

לאחר כל מבחן בגרות שייערך בשנה הקרובה (התשע"ז - 2017), אכין בע"ה פתרון מלא בתוך עשרה ימים. המבחן ופתרונו יועלה לאתר ההוצאה, לשימוש חופשי לא מסחרי.

את חלק מהחללים שבין השאלות והפתרונות לקלחתי בהבוקי אנקדוטות וסיפורים. רוב ה'הבוקים' קשורים למתמטיקה, חלקם אינו כזה, וכיניהם גם אנקדוטות בעלות אופי לאומי או יהודי.

ב ה צ ל ח ה



© כל הזכויות על השאלות שמורות למדינת ישראל - משרד החינוך, התרבות והספורט

כל הזכויות על הקשר ועל הפתרונות שמורות למחבר

האיורים בספר צוירו עליי אלכסנדר לויטש מקיבוץ גשור שברמת הגולן.
 אלכסנדר הוא אביו של סרן דמיטרי (דימה) לויטש ז"ל, שנהרג בצוק איתן.

בעיות מילוליות

קנייה ומכירה - שאלות (במבחן יש שאלה אחת בנושא פרק זה. ראה מבנה המבחן בעמ' 160)

1. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד א) סוחר קנה שני מוצרים, ושילם תמורתם סך הכל 2000 ש'. את המוצר הראשון מכר הסוחר בהפסד של 10%, ואת המוצר השני מכר ברווח של 20%. הסוחר מכר את שני המוצרים ב-2160 ש' סך הכל. בכמה שקלים קנה הסוחר כל אחד משני המוצרים? (5)

2. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד ב) מורה לספרות הזמין 4 עותקים של "שירי ביאליק" ו-5 עותקים של "סיפור פשוט" מאת עגנון. לפי המחירון, הוא היה צריך לשלם עבור כל ההזמנה 320 ש'. בגלל ההזמנה המרוכזת קיבל המורה הנחה של 15% על "שירי ביאליק", (5) והנחה של 10% על "סיפור פשוט". בסך הכל שילם המורה 282 ש'. מה היה המחיר לפי המחירון של עותק "שירי ביאליק" ושל עותק "סיפור פשוט" לפני ההנחה.

3. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד מיוחד) חנוני קנה שקיות גדולות של אורז, ושילם עבורן בסה"כ 96 ש'. החנוני ארז את האורז בשקיות קטנות, כך שמספר השקיות הקטנות היה גדול ב-30 ממספר השקיות הגדולות שקנה. הוא מכר כל אחת מהשקיות הקטנות במחיר הגדול ב-2 ש' מהמחיר ששילם עבור כל שקית גדולה שקנה. בסך הכל הוא מכר את השקיות הקטנות ב-368 ש'. כמה שקיות גדולות קנה בעל המכולת? (מצא את שתי התשובות). (5)

4. (חורף תשס"ה - 2005) בחנות בגדים מכרו חולצה במחיר הקטן ב-40 ש' ממחיר חצאית. מאחר שנשארו בחנות הרבה חולצות ומעט חצאיות, שינתה החנות את המחירים. מחיר חולצה הוזל ב-25%, ומחיר חצאית התייקר ב-20%. לאחר שינוי המחירים, שילמה רותי עבור חולצה וחצאית בסך הכל 282 ש'. מצא מה היו לפני השינוי מחיר חולצה ומחיר חצאית. (6)

המתמטיקה היא אמנות של קריאה בשמות שונים לאותו הדבר, ובאותו השם לדברים שונים.



3. (1) 16 (2) 90

1. הראשון: 800 ש', השני: 1,200 ש'

4. חולצה: 120 ש', חצאית: 160 ש'

2. שירי ביאליק: 30 ש', סיפור פשוט: 40 ש'

4. נגדיר: x - מחיר חולצה לפני השינוי $\Leftarrow x + 40$ - מחיר חצאית לפני השינוי

$$x - \frac{25}{100}x = 0.75x \quad \text{מחיר חולצה מוזלת:}$$

$$(x + 40) + \frac{20}{100}(x + 40) = 1.2(x + 40) \quad \text{מחיר חצאית לאחר ההתייקרות:}$$

$$0.75x + 1.2(x + 40) = 282 \Rightarrow 1.95x = 234$$

$$\Rightarrow x = 120 \Rightarrow x + 40 = 160$$

מחיר חולצה: 120 ש', מחיר חצאית: 160 ש'

5. נסמן: x - מחיר מוצר ב' $\Leftarrow x + 30$ - מחירו של מוצר א'

$$\text{לאחר ההתייקרות היה מחיר מוצר א': } \frac{110}{100}(x + 30) = 1.1(x + 30)$$

$$\text{ומחיר מוצר ב': } \frac{120}{100}x = 1.2x$$

$$1.1(x + 30) - (x + 30) = 1.2x - x \Rightarrow 1.1x + 33 - x - 30 = 1.2x - x$$

$$0.1x + 3 = 0.2x \quad / - 0.1x \Rightarrow 0.1x = 3 \quad / : 0.1 \Rightarrow x = 30$$

לכן: מחיר מוצר ב' היה 30 ש' ומחיר מוצר א' - 60 ש'
 $\begin{matrix} 60 \\ \uparrow \\ 30+30 \end{matrix}$

6. נסמן: x - מספר המחברות שקנה בקיץ. הוא שילם עבורן 75 ש' \Leftarrow מחיר מחברת היה $\frac{75}{x}$ ש'

$$\text{המחיר בחורף, לאחר ההנחה, היה: } \frac{80}{100} \cdot \frac{75}{x} = \frac{60}{x}$$

הוא רכש $x + 6$ מחברות ולכן הוא שילם עבורן $\frac{60}{x}(x + 6)$ ש'

$$\frac{60}{x}(x + 6) = 72 \Rightarrow 60 + \frac{360}{x} = 72 \quad / - 60 \Rightarrow \frac{360}{x} = 12 \quad / \cdot x$$

$$360 = 12x \quad / : 12 \Rightarrow x = \frac{360}{12} \Rightarrow \mathbf{x = 30} \quad \text{(מחברות)}$$

7. א. נגדיר: x - מספר העפרונות שקנה הסוחר.

$\frac{80}{x}$ מחיר הקניה של עפרון אחד:

$$\frac{80}{x} \cdot \frac{175}{100} = \frac{140}{x} \quad \text{מחיר המכירה של עפרון אחד:}$$

$x - 4$ מספר העפרונות שנמכרו:

$\frac{140}{x} \cdot (x - 4)$ מחיר המכירה של כל העפרונות:

$$\frac{140}{x} \cdot (x - 4) - 80 = 46 \Rightarrow 140 - \frac{560}{x} - 80 = 46$$

$$\Rightarrow -\frac{560}{x} = -14 \Rightarrow x = \frac{560}{14} \Rightarrow \mathbf{x = 40}$$

ב. $\frac{80}{40} = 2_{sh}$

8. נסמן: x - מספר הבקבוקים שקנה רוני בקיוסק, y - המחיר לבקבוק בקיוסק

מכאן המשוואה הראשונה: $xy = 42$. מחיר בקבוק בסופר: $y - 1.5$.

המחיר ששילם בסופר (עם 4 הבקבוקים הנוספים): $(x + 4) \cdot (y - 1.5)$.

מחיר זה קטן ב-10% מהמחיר ששילם בקיוסק, ולכן: $(x + 4)(y - 1.5) = 42 \cdot \frac{90}{100} = 37.8$

(I) $xy = 42$

(II) $(x + 4)(y - 1.5) = 37.8 \Rightarrow xy - 1.5x + 4y - 6 = 37.8 \Rightarrow^{(I)} 42 - 1.5x + 4y - 6 = 37.8$

$$36 - 1.5x + 4y = 37.8 \quad / -36 + 1.5x \Rightarrow 4y = 1.8 + 1.5x \quad / :4 \Rightarrow y = 0.45 + 0.375x$$

(I) $x \cdot (0.45 + 0.375x) = 42 \Rightarrow 0.45x + 0.375x^2 = 42 \quad / -42 \Rightarrow 0.375x^2 + 0.45x - 42 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-0.45 \pm \sqrt{0.2025 + 63}}{0.75} = \frac{-0.45 \pm 7.95}{0.75}, \quad x > 0 \Rightarrow x = \frac{-0.45 + 7.95}{0.75} = \frac{7.5}{0.75} = 10$$

$y = 0.45 + 0.375 \cdot 10 = 0.45 + 3.75 = 4.2 \Rightarrow$ **א. 10 בקבוקים ב. 4.2 ש**

9. א. נסמן: x - מחיר כסא \leftarrow מחיר שולחן $4x =$

$$10 \cdot 90\% \cdot 4x + 40 \cdot 95\% \cdot x = 14800 \Rightarrow 10 \cdot 0.9 \cdot 4x + 40 \cdot 0.95 \cdot x = 14800$$

$$36x + 38x = 14800 \Rightarrow 74x = 14800 \Rightarrow x = 200 \Rightarrow 4x = 800$$

מכאן: מחיר כסא = 200 ש, מחיר שולחן = 800 ש

ב.

$$10\% \cdot 4x \cdot 10 + 5\% \cdot x \cdot 40 = 0.1 \cdot 800 \cdot 10 + 0.05 \cdot 200 \cdot 40 = 800 + 400 = 1200 \text{ ש}$$

כולנו מכירים את השלשה הפיתגורית של מספרים עוקבים: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

זו השלשה הפיתגורית היחידה של מספרים עוקבים. ובכל זאת, היא אינה מקרית.

שלשה זו, היא חלק ממשפחת אינסופית של סכומים ריבועיים של מספרים עוקבים:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 34^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

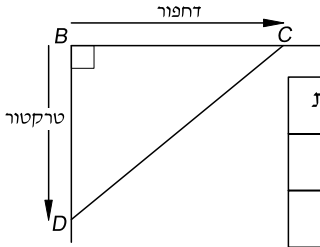
$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$$

⋮

⋮

$$(2n^2 + n)^2 + \dots + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2 + \dots + (2n^2 + 3n)^2$$



4. א. נגדיר x - זמן הנסיעה של הדחפור עד עצירתו

מהירות	זמן	דרך	
4.5	x	\Rightarrow	$BC = 4.5x$ דחפור
3	$x + 2$	\Rightarrow	$BD = 3(x + 2)$ טרקטור

$$BC = BD \Rightarrow 4.5x = 3(x + 2) \Rightarrow 4.5x = 3x + 6 \quad / -3x \Rightarrow 1.5x = 6 \quad / :1.5 \Rightarrow x = 4$$

הדחפור יצא בשעה 8^{00} ונסע במשך 4 שעות. לכן הוא עצר ב- C בשעה 12^{00} .

ב. נשתמש במשפט פיתגורס על משולש ישר-זווית $(a^2 + b^2 = c^2)$:

$$BC = BD = 4.5 \cdot 4 = 18 \Rightarrow CD = \sqrt{18^2 + 18^2} = \sqrt{648} \Rightarrow CD = 25.46 \text{ km}$$

5. א. נגדיר: x - הזמן שעבר מציאת המונית מ- A עד למפגש של עם המשאית מ- B

מהירות	זמן	דרך	
80	x	\Rightarrow	$80x$ מונית $A \rightarrow B$
60	$x - 1$	\Rightarrow	$60(x - 1)$ משאית $A \leftarrow B$

$$\Rightarrow 80x + 60(x - 1) = 1,340 \Rightarrow 80x + 60x - 60 = 1340 \quad / +60$$

$$\Rightarrow 140x = 1,400 \quad / :140 \Rightarrow x = 10 \text{ hours}$$

$$S_{A \rightarrow B} = 80 \cdot 10 \Rightarrow S_{A \rightarrow B} = 800 \text{ km} \quad \text{מונית:}$$

$$S_{A \leftarrow B} = 60(10 - 1) = 60 \cdot 9 \Rightarrow S_{A \leftarrow B} = 540 \text{ km} \quad \text{משאית:}$$

6. א. נגדיר: x - מהירות הנסיעה בין A ל- B .

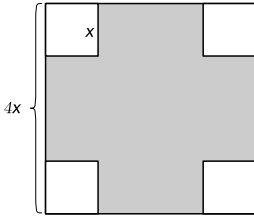
מהירות	זמן	דרך	
x	$\frac{3}{2}$	\Rightarrow	$\frac{3}{2}x$ $A \rightarrow B$
$x - 24$	2	\Rightarrow	$2(x - 24)$ $B \rightarrow C$

$$2(x - 24) + 6 = \frac{3}{2}x \Rightarrow 2x - 48 + 6 = \frac{3}{2}x \Rightarrow 2x - 42 = \frac{3}{2}x \quad / \cdot 2 \Rightarrow 4x - 84 = 3x \Rightarrow x = 84$$

$$V_{A \rightarrow B} = 84 \text{ km/h} \quad , \quad V_{B \rightarrow C} = x - 24 = 84 - 24 \Rightarrow V_{B \rightarrow C} = 60 \text{ km/h}$$

$$AC = AB + BC = \frac{3}{2}x + 2(x - 24) = \frac{3}{2} \cdot 84 + 2(84 - 24) = 126 + 120 \Rightarrow AC = 246 \text{ km}$$

5. קיץ תשס"ז - 2007, מועד א) לגינת נוי צורת ריבוע שאורך



צלעו $4x$. בכל אחת מארבע פינות הגינה יש חלקת פרחים.

כל חלקה היא בצורת ריבוע קטן, שאורך צלעו הוא רבע מצלע הגינה.

בשטח הנותר של הגינה (השטח האפור בציור) יש דשא.

א. הבע באמצעות x את השטח של הדשא.

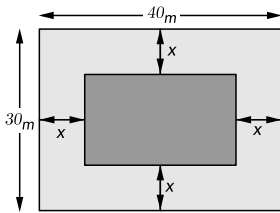
ב. על פי התכנון של גינת הנוי, האורך של צלע הגינה יוגדל ב- 25%,

ואורך הצלע של כל אחת מחלקות הפרחים לא ישונה.

הבע באמצעות x את השטח של הדשא על פי התכנון החדש.

ג. בתכנון החדש, השטח של הדשא גדול ב- 36 מ"ר משטח הדשא שהבעת בסעיף א.

חשב את x . (23)



6. (סתיו תשס"ז - 2007, מועד לוחמים) בתוך מגרש מלבני,

שאורכו $40m$ ורוחבו $30m$, שתלו גינה שצורתה מלבן.

המרחק של כל צלע של הגינה מצלע המגרש הסמוכה

לה שווה ל- x .

א. בטא באמצעות x את שטח הגינה (השטח הכהה בציור).

ב. מצא את x , אם נתון כי שטח הגינה שווה לשטח השוליים

שבין הגינה לקצות המגרש (השטח הבהיר בציור). (23)

7. (קיץ תשס"ח - 2008, מועד א) נתון מלבן שאורך הצלע הקצרה שלו הוא $25cm$.

הגדילו את אורך הצלע הקצרה שלו ב- 30% והקטינו את אורך הצלע הארוכה שלו ב- 30%.

התקבל מלבן חדש ששטחו הוא $682.5 cm^2$.

א. חשב את אורך הצלע הארוכה של המלבן הנתון.

ב. חשב בכמה אחוזים שטח המלבן החדש קטן משטח המלבן הנתון. (24)

אמריקה - ארץ האפשרויות הבלתי מוגבלות. ישראל - ארץ המגבלות הבלתי אפשריות (אפרים קישון)

5. א. $S = 12x^2 (m^2)$. ב. $S = 21x^2 (m^2)$. ג. $x = 2m$

6. א. $S = (4x^2 - 140x + 1200) m^2$. ב. $x = 5m$

7. א. $30cm$. ב. 9%

10. א. (1) הבסיסים הם ריבועים חופפים.

שטח כל ריבוע הוא $x \cdot x = x^2$. יש שני בסיסים, ולכן: $S = 2x^2$ (מטרים רבועים)

(2) שטח כל פאה הוא: $x \cdot 0.5 = 0.5x$. יש 4 פאות, ולכן:

$$S = 4 \cdot 0.5x \Rightarrow S = 2x \quad (\text{מטרים רבועים})$$

מחיר החומר לבניית בסיסי התיבה גדול פי 1.25 מ' 32 ש',

שזה: $40 \text{ ש' } = 32 \cdot 1.25$. מחיר בניית התיבה:

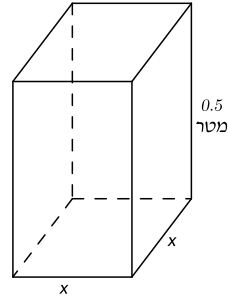
$$2x^2 \cdot 40 + 2x \cdot 32 = 16 \Rightarrow 80x^2 + 64x = 16 \quad / - 16$$

פאות בסיסים

$$80x^2 + 64x - 16 = 0 \quad / : 16 \Rightarrow 5x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{10} = \frac{-4 \pm 6}{10} = \frac{-2 \pm 3}{5} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_2 = -1$$

$$x > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \text{ m} = 20 \text{ cm}$$



ב.

11. א. x - אורך צלע הריבוע

$$\Rightarrow (x - 5)_{\text{cm}} = \text{רוחב המלבן}$$

$$\frac{x \cdot 160}{100} = 1.6x_{\text{cm}} = \text{אורך המלבן}$$

$$1.6x \cdot (x - 5) = 1.2x^2 \Rightarrow 1.6x^2 - 8x = 1.2x^2 \quad / - 1.2x^2 \Rightarrow 0.4x^2 - 8x = 0$$

$$\Rightarrow x(0.4x - 8) = 0, \quad x > 0 \Rightarrow 0.4x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 0.4x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{0.4} \Rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

ב.

12. א. נסמן: x - רוחב המלבן \Leftarrow אורך המלבן $x + 9$.

אורך המלבן לאחר הקטנה ב' 20% הוא 80% מערכו: $(x + 9) \cdot \frac{80}{100} = \frac{4}{5}(x + 9)$.

רוחב המלבן לאחר הגדלה ב' 25% הוא 125% מערכו: $x \cdot \frac{125}{100} = \frac{5}{4}x$

צלעות ריבוע שוות זו לזו, ולכן: $\frac{4}{5}(x + 9) = \frac{5}{4}x$

$$\frac{4}{5}(x + 9) = \frac{5}{4}x \quad / \cdot 20 \Rightarrow 16(x + 9) = 25x$$

$$\Rightarrow 16x + 144 = 25x \quad / - 16x \Rightarrow 9x = 144 \quad / : 9 \Rightarrow x = 16 \text{ cm}$$

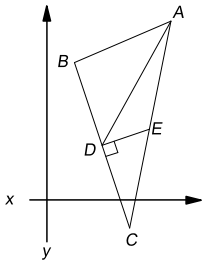
אורך צלע הריבוע: $\frac{5}{4}x = \frac{5}{4} \cdot 16 = 20$, ולכן:

$$S = 20 \cdot 20 \Rightarrow S = 400 \quad (\text{סמ"ר})$$

ב.

גאומטריה אנליטית

שאלות



1. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד א) D היא אמצע הצלע BC

במשולש ABC. DE הוא אנך לצלע BC.

משוואת התיכון AD היא $y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}$.

משוואת האנך DE היא $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

א. מצא את שיעורי הנקודה D.

ב. מצא את משוואת הצלע BC.

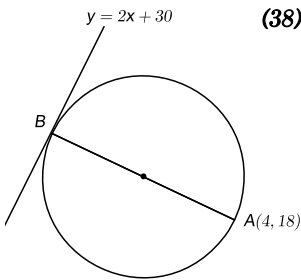
ג. נתון: משוואת הצלע AB היא $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$. מצא את שיעורי הקודקודים B ו-C. (38)

2. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד ב) במלבן ABCD נתון: $A(6, -1)$, $B(-2, 3)$

קודקוד C נמצא על ציר y.

א. מצא את השיפוע של הצלע BC.

ב. מצא את: (1) שיעורי קודקוד C (2) שיעורי קודקוד D. (38)



3. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד מיוחד)

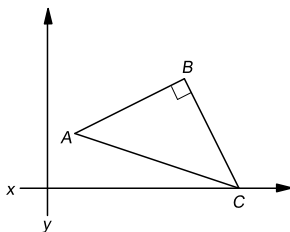
נתון מעגל העובר דרך הנקודה $A(4, 18)$.

AB הוא קוטר במעגל זה.

משוואת הישר המשיק למעגל בנקודה B היא: $y = 2x + 30$.

א. מצא את משוואת הקוטר AB.

ב. מצא את שיעורי מרכז המעגל. (39)



4. (חורף תשס"ה - 2005)

במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$)

קודקוד C נמצא על ציר x. נתון: $A(1, 2)$, $B(5, 4)$.

א. מצא את המשוואה של BC.

ב. מצא את משוואת המעגל שהקוטר שלו הוא הקטע AC. (39)

תשובות

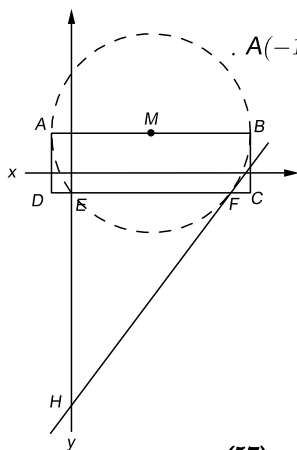
1. א. $D(2, 2)$ ב. $y_{BC} = -3x + 8$ ג. $B(1, 5)$, $C(3, -1)$

2. א. $m_{BC} = 2$ (יחידות אורך) ב. (1) $C(0, 7)$ (2) $D(8, 3)$

3. א. $y = -\frac{1}{2}x + 20$ ב. $(0, 20)$

4. א. $y_{BC} = -2x + 14$ ב. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$

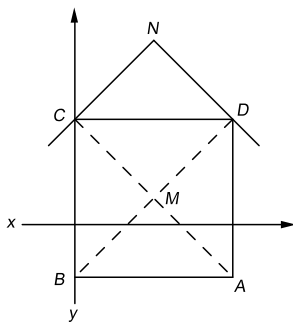
35. (סתיו תשע"ב - 2011, לוחמים)



(57)

- בציור מלבן ABCD שצלעותיו מקבילות לצירים. $A(-1, 2)$, $C(9, -1)$.
 צלע המלבן AB היא קוטר במעגל שמרכזו M.
 המעגל חותך את הצלע DC בנקודות E ו-F.
 דרך F העבירו משיק למעגל החותך את ציר y ב-H.
 א. (1) מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.
 (2) מצא את משוואת המעגל.
 ב. (1) מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
 (2) מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה F.
 ג. מצא את שטח המשולש EFH.

36. (חורף תשע"ב - 2012, לוחמים) בציור מתואר ריבוע ABCD



- שבו הצלעות AB ו-DC מקבילות לציר x, הצלע BC מונחת על ציר y, והצלע AD מקבילה לציר y. האורך של צלע הריבוע הוא 6, ושיעור y של הנקודה A הוא -2.
 א. (1) מצא את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.
 (2) הנקודה M היא נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע. מצא את שיעורי הנקודה M.
 ב. מצא את משוואת המעגל החוסם את הריבוע.
 ג. (1) הישר NC משיק למעגל בנקודה C. מצא את משוואת הישר NC.
 (2) הישר ND משיק למעגל בנקודה D. מצא את משוואת הישר ND.
 (3) מצא את שטח המשולש CND.

(58)

המספר הראשוני ה-230 מכיל 6400 ספרות, מהן 6399 ספרות '9', ורק ספרה '8' אחת!

תהליך

37. א. (1) $B(9, 2)$, $D(-1, -1)$ (2) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$

ב. (1) $E(0, -1)$, $F(8, -1)$ (2) $y = \frac{4}{3}x - 11\frac{2}{3}$ ג. $S_{\triangle EFH} = 42\frac{2}{3}$ (יחידות ריבועיות)

38. א. (1) $A(6, -2)$, $B(0, -2)$, $C(0, 4)$, $D(6, 4)$ (2) $M(3, 1)$ ב. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 18$

ג. (1) $y = x + 4$ (2) $y = -x + 10$ (3) $S_{\triangle CND} = 9$ (יחידות ריבועיות)

3. א. רדיוס מאונך למעגל בנקודת ההשקה שלו. שיפוע המשיק = 2 ולכן: $m_{AB} = -\frac{1}{2}$

$$A(4, 18) \Rightarrow y - 18 = -\frac{1}{2}(x - 4)$$

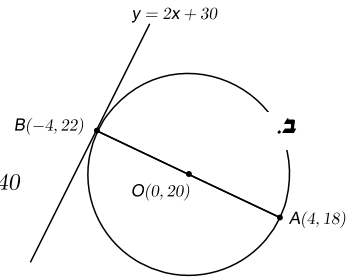
$$\Rightarrow y - 18 = -\frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 20$$

$$B: -\frac{1}{2}x + 20 = 2x + 30 \quad / \cdot 2 \Rightarrow -x + 40 = 4x + 60 \quad / -4x - 40$$

$$-5x = 20 \quad / : (-5) \Rightarrow x = -4$$

$$y = 2 \cdot (-4) + 30 = 22 \Rightarrow B(-4, 22)$$

$$O: O\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{22+18}{2}\right) \Rightarrow O\left(\frac{0}{2}, \frac{40}{2}\right) \Rightarrow O(0, 20)$$



$$m_{AB} = \frac{4-2}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$AB \perp BC \Rightarrow m_{BC} = -2 \Rightarrow y_{BC} = -2x + b$$

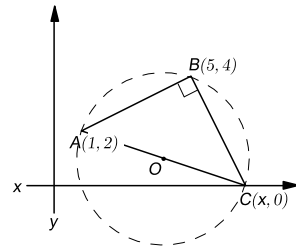
$$B(5, 4) \Rightarrow 4 = -2 \cdot 5 + b$$

$$\Rightarrow b = 14 \Rightarrow y_{BC} = -2x + 14$$

$$y_C = 0 \Rightarrow 0 = -2x_C + 14 \Rightarrow x_C = 7 \Rightarrow C(7, 0)$$

$$O\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+0}{2}\right) \Rightarrow O(4, 1)$$

$$R^2 = (4-1)^2 + (1-2)^2 = 10 \Rightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$$



4. א.

ב.

$$y = 7 \Rightarrow (x+1)^2 + (7-3)^2 = 25 \Rightarrow (x+1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x+1 = \pm 3 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -4$$

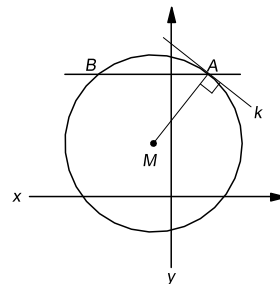
$$\Rightarrow A(2, 7), B(-4, 7)$$

$$M(-1, 3) \Rightarrow m_{MA} = \frac{7-3}{2+1} \Rightarrow m_{MA} = \frac{4}{3}$$

$$MA \perp k \Rightarrow m_k = -\frac{3}{4} \Rightarrow y_k = -\frac{3}{4}x + n$$

$$A(2, 7) \Rightarrow 7 = -\frac{3}{4} \cdot 2 + n = -\frac{3}{2} + n$$

$$\Rightarrow n = 8\frac{1}{2} \Rightarrow y_k = -\frac{3}{4}x + 8\frac{1}{2}$$



ב.

ג.

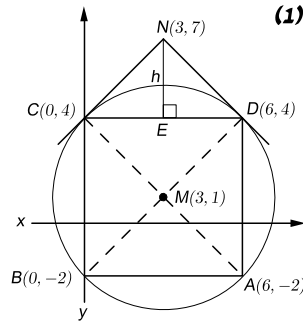
36. א. (1)

$$\underline{A}: y_A = y_B = -2 \Rightarrow AB = x_A - x_B = x_A - 0 = 6 \\ \Rightarrow A(6, -2)$$

$$\underline{B}: x_B = 0, y_B = y_A = -2 \Rightarrow B(0, -2)$$

$$\underline{C}: x_C = x_B = 0 \Rightarrow CB = y_C - y_B = y_C - (-2) = 6 \\ y_C + 2 = 6 \Rightarrow y_C = 4 \Rightarrow C(0, 4)$$

$$\underline{D}: x_D = x_A = 6, y_D = y_C = 4 \Rightarrow D(6, 4)$$



(2) אלכסוני ריבוע חוצים זה את זה.

$$BM = MD \Rightarrow M\left(\frac{0+6}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) \Rightarrow M(3, 1)$$

ג. אלכסוני ריבוע שווים זה לזה וחוצים זה את זה.

$$R^2 = BM^2 = (3-0)^2 + (1-(-2))^2 = 9 + 9 = 18 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 18$$

ג. (1) משיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה.

$$m_{MC} = \frac{4-1}{0-3} = \frac{3}{-3} = -1, CN \perp MC \Rightarrow m_{CN} = 1$$

$$C(0, 4) \Rightarrow y - 4 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 4 = x \Rightarrow y = x + 4$$

(2)

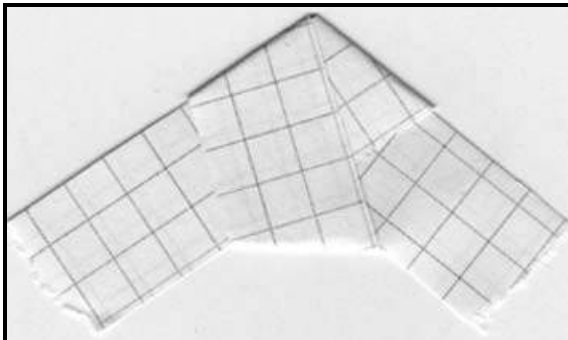
$$m_{MD} = \frac{4-1}{6-3} = \frac{3}{3} = 1, ND \perp MD \Rightarrow m_{ND} = -1$$

$$D(6, 4) \Rightarrow y - 4 = -1 \cdot (x - 6) \Rightarrow y - 4 = -x + 6 \Rightarrow y = -x + 10$$

(3)

$$\underline{y_N}: x + 4 = -x + 10 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x_N = 3 \Rightarrow y_N = 3 + 4 = 7$$

$$CD = 6, h = y_N - y_E = 7 - 4 = 3 \Rightarrow S_{\triangle CND} = \frac{6 \cdot 3}{2} \Rightarrow S_{\triangle CND} = 9 \text{ (יחידות ריבועיות)}$$



אוריגמי

ניתן לבנות מחומש משוכלל בעזרת נייר.

קח נייר צר וארוך.

קשור אותו כאילו היה חוט.

שטח את הקשר בעדינות (ראה תמונה).

קיבלת מחומש משוכלל.

חשבון דיפרנציאלי

פונקצית הפולינום - שאלות

1. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד ב) נתונה הפונקציה $y = (x - 1)(x - 3)$.
- א. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר x .
- ב. מצא את שיעור x של הנקודה שבה שני המשיקים, שמצאת בסעיף א', חותכים זה את זה.
- ג. מצא את: (1) שיעור x של נקודת הקיצון של הפונקציה.
- (2) משוואת הישר המשיק לפונקציה בנקודת הקיצון שלה. (63)

2. (קיץ תשס"ו - 2006, מועד א) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x(x + 3)^2$.
- א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ג. בכל אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה עובר ישר המשיק לפונקציה.
- מצא את משוואות המשיקים. (63)

3. (קיץ תשס"ט - 2009, מועד א) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 3$.
- א. מצא את שיעורי x של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. (1) מצא את ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודות המינימום שלה.
- (2) האם יש נקודה על גרף הפונקציה $f(x)$ ששיעור y שלה הוא -6 ?
- אם כן - מצא את שיעור x שלה. אם לא - נמק מדוע לא. (64)

הנוסחה של צ'ו צ'ונג-צ'יין (430-501) ל- π

אסטרונום סיני בשם זה מצא את הקירוב הרציונלי הבא ל- π : $\frac{355}{113} = 3.141592 \dots$

ערך זה מדויק עד כדי 6 ספרות לאחר הנקודה העשרונית.

קירוב זה לא הוכר באירופה עד המאה ה'16, יותר מאלף שנה לאחר גילוייו של צ'ו צ'ונג-צ'יין.

השאלות

1. א. $y = -2x + 2, y = 2x - 6$ ב. $x = 2$ ג. (1) $x = 2$ (2) $y = -1$
2. א. $\max: (-3, 0) \min: (-1, -8)$ ב. $(-3, 0) (0, 0)$ ג. $y = 0, y = -8$
3. א. $x_{\min} = \pm 2, x_{\max} = 0$ ב. $\downarrow: (x < -2) \cup (0 < x < 2)$, $\uparrow: (-2 < x < 0) \cup (x > 2)$
- ג. (1) $y_{\min} = -5$ (2) לא

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 3$.3 א.

$f'(x) = 2x^3 - 8x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2$

x		-2		0		2	
f'	-+ = -	0	--- = +	0	+ - = -	0	+++ = +
f	↘	min	↗	max	↘	min	↗

$x_{min} = \pm 2, x_{max} = 0$

ב. ישירות מהטבלה:

↗: $(-2 < x < 0) \cup (x > 2)$, ↘: $(x < -2) \cup (0 < x < 2)$

ג. (1)

$f(\pm 2) = \frac{1}{2} \cdot 16 - 4 \cdot 4 + 3 = 8 - 16 + 3 \Rightarrow y_{min} = -5$

(2) לא. הערך המינימלי של הפונקציה מתקבל בנקודות שבהן $x = \pm 2$

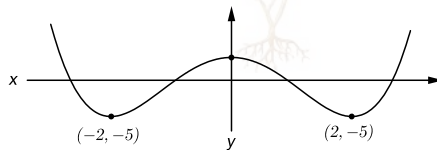
וערכו הוא -5 גבוה מ-6.

ערך זה הוא גם המינימום המוחלט, כי: ביניהן יש את נקודת המקסימום.

מימין לנקודה שבה $x = 2$ הפונקציה עולה לכיוון $+\infty$,

ומשמאל לנקודה שבה $x = -2$ הפונקציה 'שואפת' ל- $+\infty$ ככל ש- x קטן.

המחשה (לא נדרש):



.4 א.

$m = 1 \Rightarrow f'(1.5) = 1$

$f(x) = -x^2 + ax - 3 \Rightarrow f'(x) = -2x + a \Rightarrow f'(1.5) = -2 \cdot 1.5 + a = 1$

$-3 + a = 1 \ / +3 \Rightarrow a = 4$

ב.

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$

$f(1.5) = -1.5^2 + 4 \cdot 1.5 - 3 = -2.25 + 6 - 3 = 0.75 \Rightarrow A(1.5, 0.75)$

$m = 1, A(1.5, 0.75) \Rightarrow y - 0.75 = 1 \cdot (x - 1.5) \ / +0.75 \Rightarrow y = x - \frac{3}{4}$

ג.

$m = -1, A(1.5, 0.75) \Rightarrow y - 0.75 = (-1) \cdot (x - 1.5)$

$y - 0.75 = -x + 1.5 \ / +0.75 \Rightarrow y = -x + 2.25$

$$f(x) = (ax - 1)(4 - x^2), \quad f'(-1) = 0$$

$$f(x) = 4ax - ax^3 - 4 + x^2$$

$$f'(x) = 4a - 3ax^2 + 2x \Rightarrow f'(-1) = 4a - 3a - 2 = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = (2x - 1)(4 - x^2)$$

(1)

$$y = 0 \Rightarrow (2x - 1)(4 - x^2) = 0$$

$$(1) \quad 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$(2) \quad 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \quad x = \pm 2 \Rightarrow (\pm 2, 0)$$

(2)

$$x = 0 \Rightarrow y = (0 - 1) \cdot (4 - 0) = -4 \Rightarrow (0, -4)$$

(3)

$$f(x) = (2x - 1)(4 - x^2) = 8x - 2x^3 - 4 + x^2 = -2x^3 + x^2 + 8x - 4$$

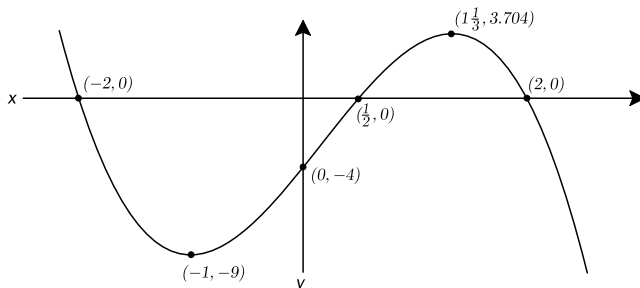
$$f'(x) = -6x^2 + 2x + 8 \stackrel{?}{=} 0 \quad /: (-2) \Rightarrow 3x^2 - x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{-6}{6} = -1$$

x		-1		$\frac{4}{3}$	
f'	-	0	+	0	-
f	\	min	/	max	\

$$f(-1) = (2 \cdot (-1) - 1) \cdot (4 - (-1)^2) = (-2 - 1) \cdot (4 - 1) = (-3) \cdot 3 = -9 \Rightarrow \text{min}(-1, -9)$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(2 \cdot \frac{4}{3} - 1\right) \cdot \left(4 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right) = \left(\frac{8}{3} - 1\right) \cdot \left(4 - \frac{16}{9}\right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{20}{9} = \frac{100}{27} = 3.704 \Rightarrow \text{max}\left(1\frac{1}{3}, 3.704\right)$$



..

25. (קיץ תשע"ב - 2012, מועד א) נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x .

ג. (1) הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון.

(2) הסבר מדוע הפונקציה עולה בתחום $x > 0$ וגם בתחום $x < 0$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. בנקודה שבה $x = 1$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה.

(1) מצא את משוואת המשיק.

(2) מצא את המשוואה של משיק נוסף לגרף הפונקציה.

(90) המקביל למשיק שאת משוואתו מצאת בתת-סעיף ה(1).

26. (חורף תשע"ג - 2013)

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \frac{9}{x}$ (a הוא פרמטר).

א. נתון כי $f'(1) = 12$. מצא את a .

הישר $y = 6$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הישר עם הפונקציה.

ג. מצא את המשוואות של המשיקים לנקודות שמצאת בסעיף ב.

ד. מהי נקודת החיתוך של שני המשיקים שמצאת בסעיף ג? (91)

סימטריה ראשונית

7 0
 0 0 0 0 0 0 2 2 2 2 2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 2 2 2 0 0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0
 7 0 3

המספר הרשום כאן (קוראים לרוחב משמאל לימין, שורה אחרי שורה) - הוא מספר ראשוני!

(Prime curios , Chris K. Caldwell and G. L. Honaker, Jr.)

תולדות

25. א. $x \neq 0$ ב. $(\pm 1, 0)$ ה. (1) $y = 2x - 2$ (2) $y = 2x + 2$

26. א. $a = 3$ ב. $(-1, 6)$, $(3, 6)$ ג. $(3, 6)$: $y = 4x - 6$, $(-1, 6)$: $y = 12x + 18$ ד. $(-3, -18)$

24. א.

$$y = \frac{a}{x} + x - 2, (2, 8) \Rightarrow 8 = \frac{a}{2} + 2 - 2 \Rightarrow 8 = \frac{a}{2} \cdot 2 \Rightarrow a = 16$$

ב.

$$y = \frac{16}{x} + x - 2, x \neq 0$$

ג.

$$x \neq 0, y = 0 \Rightarrow \frac{16}{x} + x - 2 = 0 \cdot x$$

$$\Rightarrow 16 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 64}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-60}}{2} = \emptyset \Rightarrow \text{אין נקודות חיתוך עם הצירים}$$

ד.

$$y' = -\frac{16}{x^2} + 1 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{16}{x^2} = 1 \cdot x^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 4$$

x		-4		0		4	
y'	+	0	-	∅	-	0	+
y	↗	max	↘	asym.	↘	min	↗

$$y(-4) = \frac{16}{-4} - 4 - 2 = -4 - 4 - 2 = -10 \Rightarrow \text{max}(-4, -10)$$

$$y(4) = \frac{16}{4} + 4 - 2 = 4 + 4 - 2 = 6 \Rightarrow \text{min}(4, 6)$$

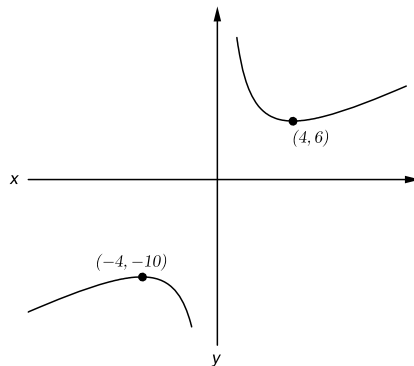
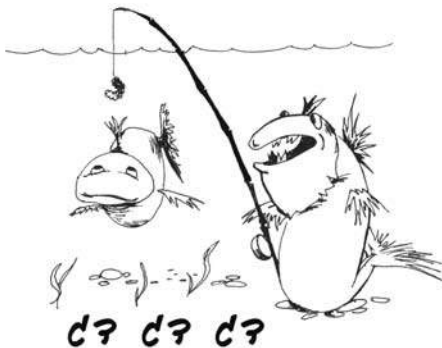
ה. ישירות מהטבלה שבסעיף הקודם:

$$\nearrow: (x < -4) \cup (x > 4), \searrow: (-4 < x < 0) \cup (0 < x < 4)$$

ו. בנקודה שבה $x = 0$ הפונקציה אינה מוגדרת.

יש לה שם אסימפטוטה אנכית: $x = 0$ כי:

$$y(0) = \frac{16}{0} + 0 - 2 = \infty - 2 = \infty$$



חשבון דיפרנציאלי - פונקציה עם שורש ריבועי - שאלות

1. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד מיוחד) נתונה הפונקציה $y = \frac{x}{4} - \sqrt{x}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x .
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה. (95)

2. (חורף תשס"ז - 2006) נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x} - x$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את הנקודה שבה נגזרת הפונקציה מתאפסת, וקבע את סוגה (מינימום או מקסימום).
- ג. הראה כי הפונקציה עוברת דרך הנקודות $(0, 0)$ ו- $(4, 0)$.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. רשום את התחום שבו הפונקציה שלילית. (95)

3. (קיץ תשס"ז - 2006, מועד מיוחד) נתונה הפונקציה $y = 2\sqrt{x} - x$ (במקור: $y = \sqrt{4x}$).

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x .
- ג. מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה שבהן שיעור x שווה לשיעור y . (96)

4. (קיץ תשס"ז - 2007, מועד ב רגיל) נתונה הפונקציה $y = 4\sqrt{x} - x$ (במקור: $y = \sqrt{2x} - x$).

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x ועם ציר y .
- ג. לפונקציה יש נקודת מקסימום אחת. מצא את שיעוריה.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה. (97)

שאלות

1. א. $x \geq 0$ ב. $\min : (4, -1)$ ג. $(0, 0)$ $(16, 0)$

2. א. $x \geq 0$ ב. $\max (1, 1)$ ה. $x > 4$

3. א. $x \geq 0$ ב. $(0, 0)$ $(4, 0)$ ג. $\max : (1, 1)$ ה. $(0, 0)$ $(1, 1)$

4. א. $x \geq 0$ ב. $(0, 0)$ $(16, 0)$ ג. $(4, 4)$

3. א.

$$y = 2\sqrt{x} - x, \quad \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

ב.

$$y = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} - x = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} = x \quad /(\quad)^2$$

$$\Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0$$

$$(1) \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$(2) 2 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow (4, 0)$$

ג.

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \stackrel{?}{=} 0$$

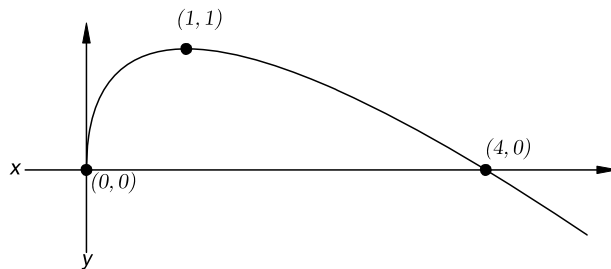
$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

x	0		1	
y'		+	0	-
y			max	

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \Rightarrow (1) \quad y'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$(2) \quad y'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 < 0$$

$$y(1) = 2\sqrt{1} - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \text{max: } (1, 1)$$



ד.

ה.

$$x = y \Rightarrow 2\sqrt{x} - x = x \Rightarrow 2\sqrt{x} = 2x = 0 \quad /: 2$$

$$\sqrt{x} = x \quad /(\quad)^2$$

$$x = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0 \quad (1) \quad x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$(2) \quad x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow (1, 1)$$

חשבון דיפרנציאלי - בעיות ערך קיצון - מספרים - שאלות

1. (קיץ תשס"ח - 2008, מועד ב) מבין כל שני מספרים x ו- y המקיימים $2x + y = 50$, מצא את שני המספרים שסכום ריבועיהם מינימלי. (102)

2. (סתיו תשס"ט - 2008, מועד לוחמים) מבין כל המספרים x ו- y המקיימים $2x + y = 20$, מצא את שני המספרים שסכום ריבועיהם הוא מינימלי. (102)

3. (קיץ תשס"ט - 2009, מועד ב) הסכום של שני מספרים הוא 10.
 א. מצא מה צריכים להיות שני המספרים, כדי שסכום הריבועים שלהם יהיה מינימלי.
 ב. מצא את סכום הריבועים המינימלי של שני המספרים. (102)

4. (קיץ תש"ע - 2010, מועד ב) הסכום של שני מספרים גדולים מאפס הוא 24.
 א. מה צריכים להיות שני המספרים, כדי שמכפלת אחד מהם בריבוע של האחר תהיה מקסימלית?
 ב. מהי המכפלה המקסימלית (של אחד המספרים בריבוע של האחר)? (102)

ליאונרד אוילר



ליאונרד אוילר 1707-1783. מתמטיקאי ופיזיקאי שוויצרי. למד בבזל, פעל ברוסיה. פיתח תחומים רבים בגאומטריה אנליטית ובטריגונומטריה ותרם רבות לגאומטריה ולתורת המספרים. פרסם כ-850 ספרים וכתבים בכל תחומי המתמטיקה. לאוילר נולדו 13 ילדים, אך רק 5 מהם שרדו את גיל הינקות. הוא סיפר שהוא השיג חלק מתגליותיו הגדולות כאשר תינוק תלוי בזרועו ואחר התרוצץ סביבו.
 בגיל 31 איבד את ראייתו בעינו הימנית ו-27 שנים מאוחר יותר, בגיל 58, הפך כמעט לעיוור לאחר ניתוח בעינו האחרת. כמחצית עבודותיו עשה תוך כדי מגבלת הראייה החמורה שלו.

שאלות

3. א. 5, 5 ב. 50

1. $x = 20, y = 10$

4. א. 8, 16 ב. 2048

2. $x = 8, y = 4$

חשבון דיפרנציאלי - בעיות ערך קיצון - מספרים - פתרונות

$$2x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - 2x \quad .1$$

$$f(x) = x^2 + (50 - 2x)^2 = x^2 + 2500 - 200x + 4x^2 = 5x^2 - 200x + 2500$$

$$f'(x) = 10x - 200 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 20, y = 50 - 2 \cdot 20 = 10$$

$$f''(x) = 10 \Rightarrow f''(20) = 10 > 0 \Rightarrow \min (\checkmark) \Rightarrow x = 20, y = 10$$

$$2x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - 2x \quad .2$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + (20 - 2x)^2 = x^2 + 400 - 80x + 4x^2$$

$$f(x) = 5x^2 - 80x + 400$$

$$f'(x) = 10x - 80 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 10x = 80 \Rightarrow x = 8$$

$$f''(x) = 10 \Rightarrow f''(8) = 10 > 0 \Rightarrow \min (\checkmark) \Rightarrow y = 20 - 2 \cdot 8 = 4$$

$$\Rightarrow x = 8, y = 4$$

3. א. נסמן את אחד המספרים: x ולכן האחר הוא: $10 - x$, כאשר: $0 \leq x \leq 10$.

$$f(x) = x^2 + (10 - x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2x^2 - 20x + 100$$

$$f'(x) = 4x - 20 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

$$f''(x) = 4 \Rightarrow f''(5) = 4 > 0 \Rightarrow \min (\checkmark), x = 5 \Rightarrow 10 - x = 5 \Rightarrow 5, 5$$

אין צורך לבדוק נקודות קצה כי נקודת המינימום נמצאת ביניהם, ולכן הם גבוהים ממנה.

ב.

$$f(5) = 2 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 100 = 50 - 100 + 100 = 50$$

4. א. נסמן את המספרים: x , $24 - x$

$$f(x) = (24 - x) \cdot x^2 = 24x^2 - x^3$$

$$f'(x) = 48x - 3x^2 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 3x(16 - x) = 0$$

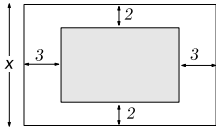
$$x > 0 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow 24 - x = 24 - 16 = 8$$

$$f''(x) = 48 - 6x \Rightarrow f''(16) = 48 - 6 \cdot 16 < 0 \Rightarrow \max (\checkmark) \Rightarrow 8, 16$$

ב.

$$f(16) = 8 \cdot 16^2 = 8 \cdot 256 = 2048$$

חשבון דיפרנציאלי - בעיות ערך קיצון - גאומטריה - שאלות



1. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד א) בתוך מלבן חיצוני שהיקפו 72 ס"מ,

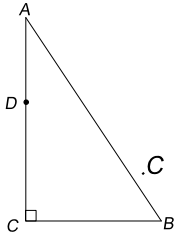
נמצא מלבן פנימי שצלעותיו מקבילות לצלעות המלבן החיצוני.

רוחב השוליים הצרים הוא 2 ס"מ מכל צד, ורוחב השוליים הרחבים הוא 3 ס"מ מכל צד.

א. נסמן ב- x את רוחב המלבן החיצוני.

הבע באמצעות x את אורך המלבן החיצוני, ואת שטח המלבן הפנימי.

ב. מצא את x שעבורו שטח המלבן הפנימי (השטח האפור) הוא מקסימלי. (108)



2. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד ב)

במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) נתון: $BC = a$, $AC = 6$.

D היא נקודה כלשהי על הניצב AC . נסמן ב- x את מרחק הנקודה D מקודקוד C .

א. הבע באמצעות x את סכום ריבועי המרחקים

של הנקודה D משלושת הקודקודים A , B ו- C .

ב. מצא עבור איזה ערך של x , הסכום שהבעת בסעיף א' הוא מינימלי. (108)

3. (חורף תשס"ה - 2005) בריבוע $ABCD$ הנקודות E , F , G נמצאות על הצלעות

DC , BC , AB בהתאמה, כך ש: $CF = CG$, $BE = BF$.

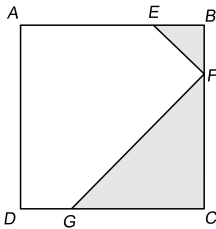
נתון כי אורך צלע הריבוע הוא 6cm .

א. סמן ב- x את BF ואת BE ,

הבע באמצעות x את הסכום של שטחי המשולשים EBF ו- FCG .

ב. (1) מצא את x שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא מינימלי.

(2) חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים. (108)



שלום מתוזמן

המילה 'שלום' מופיעה בפעם הראשונה בתנ"ך בספר בראשית כברית בין הבתרים (בראשית ט"ו ט"ו).

פסוק זה הוא הפסוק ה-376 בתורה. מספר זה הוא בדיוק הערך הגימטרי של המילה 'שלום'.

תהנות

1. א. אורך המלבן: $(36 - x)\text{cm}$, $S = (-x^2 + 34x - 120)\text{cm}^2$. ב. $x_{\max} = 17\text{cm}$

2. א. $3x^2 - 12x + 36 + a^2$. ב. $x_{\min} = 2$

3. א. $x^2 - 6x + 18$ (יחידות ריבועיות) ב. $x_{\min} = 3$ (1) א. $S_{\min} = 9$ (2) (יחידות ריבועיות)

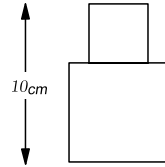
4. נסמן: x - אורך צלע הריבוע התחתון

$\Rightarrow (10 - x)_{cm} =$ אורך צלע הריבוע העליון

$S = f(x) = x^2 + (10 - x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2x^2 - 20x + 100$

$f'(x) = 4x - 20 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 5$

$f''(x) = 4 \Rightarrow f''(5) = 4 > 0 \Rightarrow \min (\checkmark) \Rightarrow x = 5_{cm}$



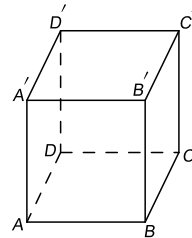
נסמן: $BB' = 15 - x \Leftrightarrow BC = x$

$V = f(x) = AB \cdot BC \cdot BB' = x \cdot x \cdot (15 - x) = 15x^2 - x^3$

$f'(x) = 30x - 3x^2 \stackrel{?}{=} 3x(10 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 10$

$f''(x) = 30 - 6x \Rightarrow f''(10) = 30 - 6 \cdot 10 < 0$

$\Rightarrow \max (\checkmark) \Rightarrow AB = BC = 10_{cm}$



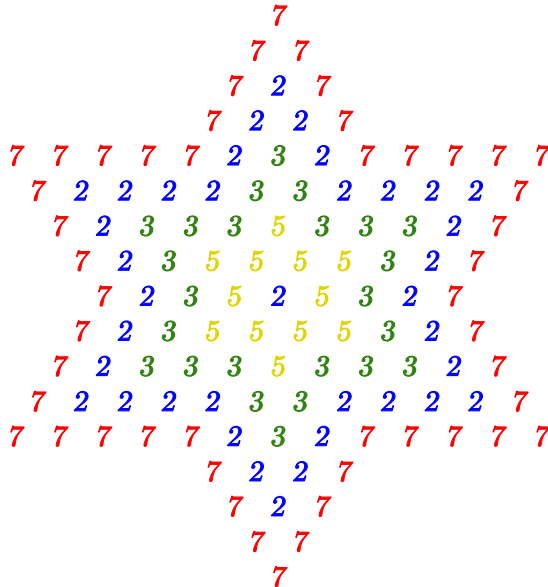
5.

מגן דוד ראשוני

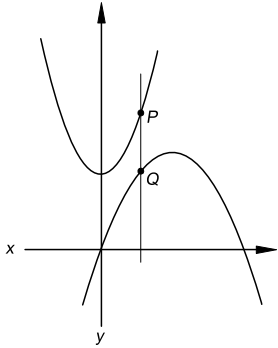
המספר הבא מורכב מ- 121 ספרות 2, 3, 5 ו- 7 בלבד הוא מספר ראשוני!

7, 777, 277, 227, 777, 772, 327, 777, 772, 222, 332, 222, 772, 333, 533, 327, 723, 555, 532, 772, 352, 532, 772, 355, 553, 277, 233, 353, 332, 772, 222, 332, 222, 777, 777, 232, 777, 777, 227, 727, 777

את המספר ניתן לסדר באופן סימטרי בצורת מגן-דוד:



8. (סתיו תשס"ח - 2008, מועד לוחמים)



נתונים הגרפים של שתי הפרבולות:

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x \quad \text{ו} \quad y = \frac{1}{2}x^2 + 7$$

הנקודה P נמצאת על פרבולה אחת,

והנקודה Q נמצאת על הפרבולה האחרת.

הקטע PQ מקביל לציר y.

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה P,

כדי שאורך הקטע PQ יהיה מינימלי?

ב. מצא את האורך המינימלי של הקטע PQ. (120)

9. (חורף תשס"ט - 2009, מועד מיוחד)

נתון גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$.

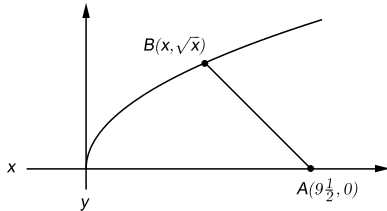
על ציר x נתונה הנקודה $A(9\frac{1}{2}, 0)$.

B היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה.

א. מה צריך להיות שיעור x של הנקודה B,

כדי שריבוע המרחק AB יהיה מינימלי?

ב. חשב את ריבוע המרחק המינימלי של AB. (120)



הרב יוסי שריד ממרצ

יוסי שריד היה חבר כנסת מטעם סיעת השמאל בכנסת ששמה 'מרצ'.

שם זה הינו גלגול שמם שתי מפלגות שמאל: 'רץ' של שולמית אלוני, ור'מ' של מפ"ם.

עוד טרם קביעת שמה הנוכחי של סיעת מרצ, פעל (ועדיין פועל) במבשרת ציון מוסד חינוכי - כולל אברכים

ציוניים ששמו... מר"ץ (מרכז צוותים).

הרב שעומד בראש כולל זה הוא הרב... יוסי שריד.

הרב יוסי שריד והח"כ לשעבר יוסי שריד כמעט בני אותו גיל (הרב יליד 1939 והח"כ לשעבר יליד 1940).

שניהם עברו אירוע לב ראשון בשנת 1986 והיו מאושפיים מיטה ליד מיטה בורזומנית.

הרב יוסי שריד, שיש לו חוש הומור נפלא, אומר שלשניהם יש שני דברים משותפים:

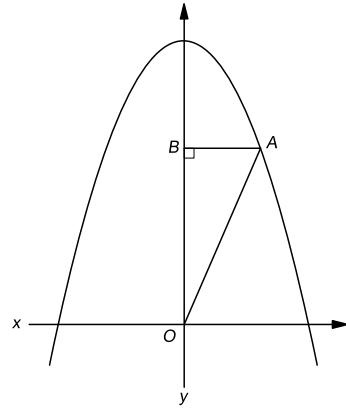
הראשון הוא 'שהשם אחד' והשני הוא ששניהם מתפללים 'לקץ הימין'...

8. א. $P(2, 9)$ ב. $\min PQ = 4$ (יחידות אורך)

9. א. $x_B = 9$ ב. $AB^2 = 9\frac{1}{4}$ (יחידות אורך)

חשבון דיפרנציאלי - בעיות ערך קיצון - גרפים - פתרונות

1. א.



$$A(x, -x^2 + 12)$$

$$x_B = 0, y_B = y_A = -x^2 + 12 \Rightarrow B(0, -x^2 + 12)$$

$$AB = x_A - x_B = x - 0 = x$$

$$BO = y_B - y_O = -x^2 + 12 - 0 = -x^2 + 12$$

$$S_{\Delta} = \frac{AB \cdot BO}{2} = \frac{x \cdot (-x^2 + 12)}{2} = \frac{-x^3 + 12x}{2}$$

$$S_{\Delta} = -\frac{x^3}{2} + 6x \quad (\text{יחידות ריבועיות})$$

ב.

$$S_{\Delta} = f(x) = -\frac{x^3}{2} + 6x$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4 \Rightarrow x^2 = \pm 2, x_A > 0, x_A \stackrel{?}{=} 2$$

$$f''(x) = -3x \Rightarrow f''(2) = -3 \cdot 2 < 0 \Rightarrow \max (\checkmark) \Rightarrow x_A = 2$$

ג.

$$\max S = f(2) = -\frac{2^3}{2} + 6 \cdot 2 = -4 + 12 \Rightarrow \max S = 8 \quad (\text{יחידות ריבועיות})$$

2. א. נסמן את היקף המלבן ב- $g(x)$

$$AP = x, PC = x + \frac{1}{2x} \Rightarrow g(x) = 2x + 2(x + \frac{1}{2x}) = 2x + 2x + \frac{1}{x}$$

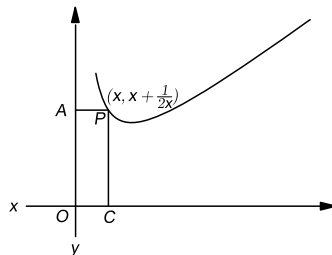
$$g(x) = 4x + \frac{1}{x} \quad (\text{יחידות אורך})$$

$$g'(x) = 4 - \frac{1}{x^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}, x_P > 0 \Rightarrow x_P \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}$$

$$g''(x) = (4 - \frac{1}{x^2})' = 0 - (-\frac{2}{x^3}) = \frac{2}{x^3} \quad (\text{ראה עמ' 74})$$

$$g''(\frac{1}{2}) = \frac{2}{(\frac{1}{2})^3} > 0 \Rightarrow \min (\checkmark) \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$



ב.

הכל יחסי: כשיוורדים במדרון - האחרון הוא הגבוה ביותר.

חשבון אינטגרלי

מציאת פונקציה קדומה - שאלות

1. (קיץ תשס"ז - 2007, מועד ב) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 16x^3 - 2$.

העבירו ישר המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה A, המקביל לישר $y = 14x - 2$.

א. מצא את שיעור x של הנקודה A.

ב. ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודה A הוא 5. מצא את הפונקציה $f(x)$. (125)

2. (קיץ תשס"ז - 2006, מועד מיוחד) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = ax - 1$.

שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $(-1, 2)$ הוא -9 .

א. מצא את a .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. חשב את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר x . (125)

3. (קיץ תשס"ז - 2007, מועד ב מיוחד) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = ax + b$.

ידוע כי $f'(1) = 2$ וכן ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(2, 8)$.

א. מצא את a ואת b .

(אין שאלה בנגרות עם שני פרמטרים. המלצה: הצב את הפרמטרים שבתשובה ופתור את סעיף ב.)

ב. מצא את $f(x)$. (126)

4. (קיץ תשס"ח - 2008, מועד ב) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = ax + 4$ (a פרמטר).

משוואת הישר, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = -1$, היא $y = 2x - 3$.

א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$. (126)

מאוד נחמד להיות חשוב. יותר חשוב להיות נחמד.



שאלות

1. א. $x_A = 1$ ב. $y = 4x^4 - 2x + 3$

2. א. $a = 8$ ב. $f(x) = 4x^2 - x - 3$ ג. $(1, 0)$ ד. $(-\frac{3}{4}, 0)$

3. א. $a = -2, b = 4$ ב. $f(x) = -x^2 + 4x + 4$

4. א. $a = 2$ ב. $f(x) = x^2 + 4x - 2$

חשבון אינטגרלי - מציאת פונקציה קדומה - פתרונות

1. א. שיפוע המשיק בנקודה A שווה לשיפוע הישר המקביל לו.

שיפוע הישר המקביל הוא $m = 14$, לכן גם שיפוע הישר המשיק הוא: $m = 14$

$$f'(x_A) = 16x_A^3 - 2 = 14 \Rightarrow 16x_A^3 = 16 \Rightarrow x_A^3 = 1 \Rightarrow x_A = 1$$

ב.

$$y_A = 5 \Rightarrow A(1, 5)$$

$$\int (16x^3 - 2) dx = 16 \frac{x^4}{4} - 2x + c \Rightarrow y = 4x^4 - 2x + c$$

$$A(1, 5) \Rightarrow 5 = 4 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1 + c \Rightarrow 5 = 4 - 2 + c \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow y = 4x^4 - 2x + 3$$

2. א.

$$f'(x) = ax - 1, f'(-1) = -9$$

$$f'(-1) = -9 \Rightarrow a \cdot (-1) - 1 = -9 \Rightarrow -a - 1 = -9 \Rightarrow a = 8$$

ב.

$$f(x) = \int (ax - 1) dx = \frac{ax^2}{2} - x + c = \frac{8x^2}{2} - x + c = 4x^2 - x + c$$

$$f(-1) = 2, y = 4x^2 - x + c$$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow 4 \cdot (-1)^2 - (-1) + c = 2 \Rightarrow 4 + 1 + c = 2 \Rightarrow c = -3$$

$$\Rightarrow f(x) = 4x^2 - x - 3$$

ג.

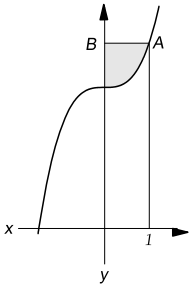
$$y = 0 \Rightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{1 \pm 7}{8}$$

$$x_1 = \frac{8}{8} \Rightarrow (1, 0)$$

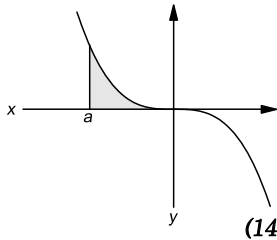
$$x_2 = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \left(-\frac{3}{4}, 0\right)$$

מספר האפשרויות לשחק את 4 הצעדים הראשונים בשחמט הוא 8902
 מספר המצבים בשחמט מוערך ב- 10^{128} . מספר האטומים המוערך בכל היקום הוא 10^{80} .

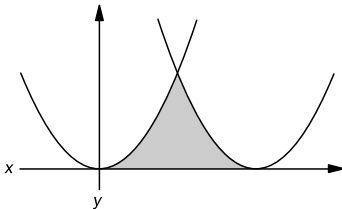
חשבון אינטגרלי - שטחים - שאלות



1. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד א) נתונה הפונקציה $y = x^3 + 3$. הישר $x = 1$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה A. מנקודה A העבירו ישר המקביל לציר x, וחותך את ציר y בנקודה B. **א.** מצא את שיעורי הנקודה A. **ב.** חשב את השטח המוגבל ע"י: גרף הפונקציה, הישר AB וציר y. (142)



2. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד ב) נתונה הפונקציה $y = -x^3$. **א.** הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הפונקציה, על ידי הישר $x = a$, ועל ידי ציר x. **ב.** נתון כי השטח המסומן שווה ל- $-a^3$. מצא את a ($a < 0$). (142)



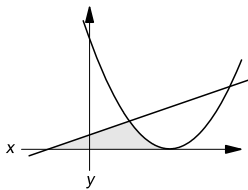
(142)

3. (קיץ תשס"ד - 2004, מועד מיוחד)

נתונות שתי הפונקציות: $y = x^2$ ו- $y = (x - 4)^2$. מצא את השטח המוגבל ע"י שתי הפונקציות, וע"י ציר x.



4. (חורף תשס"ה - 2005)



(143)

נתונה הפונקציה $y = (x - 2)^2$, ונתון הישר: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. מצא את השטח המוגבל על ידי הפונקציה, ע"י הישר, וע"י ציר x.

5. (קיץ תשס"ה - 2005, מועד א)

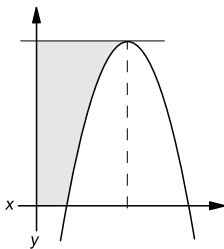
נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 5$.

א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של הפונקציה.

ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק בנקודת המקסימום,

על ידי הצירים ועל ידי גרף הפונקציה. (143)



תשובות

1. **א.** $A(1, 4)$. **ב.** $S = \frac{3}{4}$ (יחידות ריבועיות) **4.** $S = 1\frac{1}{3}$ (יחידות ריבועיות)

2. **א.** $S = \frac{a^4}{4}$ (י"ר). **ב.** $a = -4$ **5.** **א.** $\max(3, 4)$. **ב.** $y = 4$. **ג.** $S = 6\frac{2}{3}$ (י"ר)

3. $S = 5\frac{1}{3}$ (יחידות ריבועיות)

4

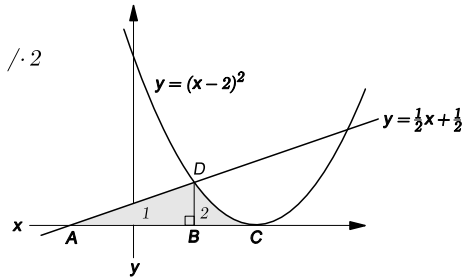
$$y_A = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}x_A + \frac{1}{2} \Rightarrow x_A = -1$$

$$D: (x-2)^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2x^2 - 9x + 7 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{14}{4} = 3\frac{1}{2}, \quad x_2 = 1 \Rightarrow x_D = 1$$

$$y_D = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow D(1, 1)$$



$$B: y_B = 0; \quad x_B = x_D = 1 \Rightarrow B(1, 0) \Rightarrow AB = x_B - x_A = 1 - (-1) = 2$$

$$BD = y_D - y_B = 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = \frac{AB \cdot BD}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

$$y_C = 0 \Rightarrow 0 = (x_C - 2)^2 \Rightarrow x_C = 2$$

$$S = S_{\Delta} + \int_1^2 (x-2)^2 dx = 1 + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx = 1 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \Big|_1^2$$

$$S = 1 + \left(\frac{8}{3} - 8 + 8 \right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4 \right) = 1 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow S = 1\frac{1}{3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

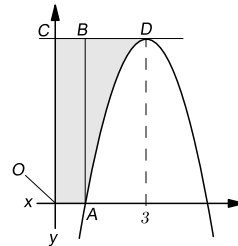
5 א.

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

$$y' = -2x + 6 = 2(-x + 3) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 3$$

$$y'' = -2 \Rightarrow y''(3) = -2 < 0 \Rightarrow \max (\checkmark)$$

$$y(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = -9 + 18 - 5 = 4 \Rightarrow \max: (3, 4)$$



ב.

המשיק לפונקציה בנקודת קיצון הוא קו אופקי. $D(3,4)$ ← משוואת המשיק: $y = 4$

ג.

$$x_A: -x^2 + 6x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm 4}{-2} \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 5 \Rightarrow x_A = 1$$

$$y_B = 4 \Rightarrow S_{ABCO} = 1 \cdot 4 = 4 \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

$$S = S_{ABCO} + \int_1^3 (4 - (-x^2 + 6x - 5)) dx = 4 + \int_1^3 (x^2 - 6x + 9) dx$$

$$S = 4 + \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right) \Big|_1^3 = 4 + (9 - 27 + 27) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 9 \right) = 4 + 9 - 6\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S = 6\frac{2}{3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

מבנה מבחן הבגרות לשאלון 803

שאלון א' (35801) מהווה 25% מהציון הסופי.

שאלון ב' (35802) מהווה 35% מהציון הסופי.

שאלון ג' (35803) מהווה 40% מהציון הסופי.

להלן מבנה המבחן לשאלון 35803 :

משך זמן המבחן: שתיים .

בחירה: 4 שאלות מתוך 6 שאלות.

בעיות מילוליות

1-2 שאלות בחלוקה הבאה:

שאלה אחת בתחום קנייה, מכירה ותשלומים, כולל התייקרויות והוזלות עוקבות באחוזים.

תיתכן שאלה שנייה בתחום שאלות תנועה,

או בתחום שאלות גאומטריות (ראה פירוט בתכנית הלימודים).

גאומטריה אנליטית

1-2 שאלות.

אורך קטע, אמצע קטע, ישרים, תנאי ניצבות, מעגל,

משיק למעגל בנקודה על המעגל (ראה פירוט בתכנית הלימודים).

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

3 שאלות.

א. חשבון דיפרנציאלי (ראה פירוט בתכנית הלימודים).

ב. חשבון אינטגרלי: פונקציה קדומה, חישובי שטחים (ראה פירוט בתכנית הלימודים).

הערה: בפתרונות המבחנים נעשה שימוש ב: $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$. הסבר מופיע בעמוד 78 .



בעיית רמנוג'אן

המתמטיקאי ההודי, רמנוג'אן, היה ילד פלא ואוטודידאקט (1887-1920).

הוא הציג את השאלה הבאה: עבור אילו ערכי n ,

$$\text{יש פתרון טבעי למשוואה: } 2^n - 7 = x^2$$

הפתרונות שהוא נתן הם: $n = 3, 4, 5, 7, 15$.

למרות שנסרקו כבר כל המספרים עד 10^{40} - לא נמצאו פתרונות נוספים!

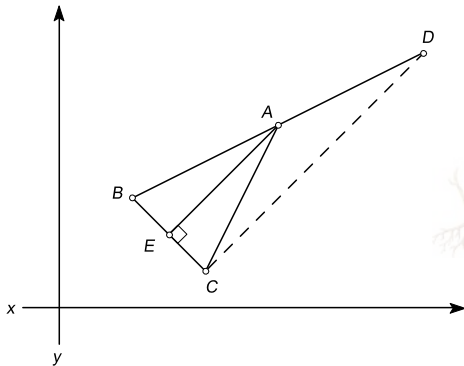
לאחרונה אף נמצאה ההוכחה לכך שאלו, אכן, הפתרונות היחידים.

מבחן 37 - קיץ תשע"ו - 2016 - מועד ב

בחירה: ארבע שאלות מתוך שש (1-6).

אלגברה

1. דני רצה לקנות 20 עפרונות ועטים סך הכל. מחיר כל עיפרון הוא 10 ש, ומחיר כל עט גבוה ב- 20% ממחיר עיפרון. המחיר הכולל של העפרונות והעטים הוא 214 ש.
- א. כמה עטים וכמה עפרונות רצה דני לקנות?
- ב. כאשר דני עמד לשלם, התברר כי יש לו רק 200 ש. המוכרת הציעה לדני הנחה של 9% על העפרונות. האם לאחר הנחה זו יספיקו לדני 200 השקלים שברשותו, והוא יוכל לקנות את כל העפרונות והעטים שרצה לקנות?



2. הנקודות $A(6,5)$ ו- $B(2,3)$ הן קדקודים של משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$). AE הוא הגובה לבסיס BC . משוואת AE היא $y = x - 1$.
- א. מצא את משוואת הצלע BC .
- ב. (1) מצא את השיעורים של הנקודה E .
(2) מצא את השיעורים של הנקודה C .
- ג. נתונה הנקודה $D(10,7)$.
- (1) הראה כי DC מאונך ל- BC .
- (2) חשב את שטח הטרפז $AECD$.

$$1380^2 + 19019^2 = 19069^2, \quad S_{\Delta} = \frac{1380 \cdot 19019}{2} = 13,123,110$$

$$3059^2 + 8580^2 = 9109^2, \quad S_{\Delta} = \frac{3059 \cdot 8580}{2} = 13,123,110$$

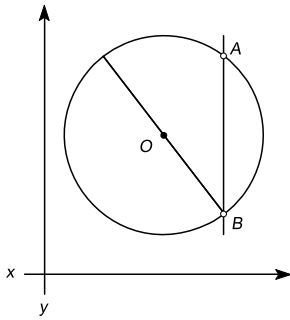
$$4485^2 + 5852^2 = 7373^2, \quad S_{\Delta} = \frac{4485 \cdot 5852}{2} = 13,123,110$$

זוהי השלישייה הקטנה ביותר של משולשי פיתגורס בעלי שטח שווה

תשובות

1. א. 13 עפרונות, 7 עטים ב. לא

2. א. $y = -x + 5$ ב. (1) $E(3,2)$ (2) $C(4,1)$ ג. (2) $S_{AECD} = 9$ (יחידות ריבועיות)



3. נתון מעגל שמרכזו $O(6, 7)$.

הנקודה $A(9, 11)$ נמצאת על המעגל.

א. (1) חשב את האורך של רדיוס המעגל.

(2) רשום את משוואת המעגל.

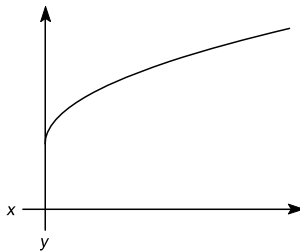
ב. הישר $x = 9$ חותך את המעגל בנקודה נוספת, B .

מצא את שיעורי הנקודה B .

ג. דרך הנקודה B העבירו קוטר במעגל.

מצא את משוואתו.

ד. חשב את שטח המשולש AOB .



חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

4. בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת החיתוך של

גרף הפונקציה עם ציר y ?

ג. גזור את הפונקציה והראה כי לפונקציה

אין נקודות קיצון פנימיות.

ד. העבירו משיק לגרף הפונקציה בנקודה ששיעור x שלה הוא 1.

מצא את משוואת המשיק.

ה. האם הישר $y = 2$ חותך את גרף הפונקציה? נמק.

מעגל סגור

הרב יהודה עמיטל ז"ל (1924-2010) היה ראש ישיבת הר עמיון (גוש עציון) ומייסדה.

פעם ניגש אליו תלמיד בשאלה בשם חברו. שאל אותו הרב עמיטל: ומדוע שהחבר לא ישאל בעצמו?

התלמיד ענה לו שאותו חבר מתבייש לשאול.

אמר לו הרב עמיטל שאם-כך אותו חבר יכול לשאול את השאלה בעצמו

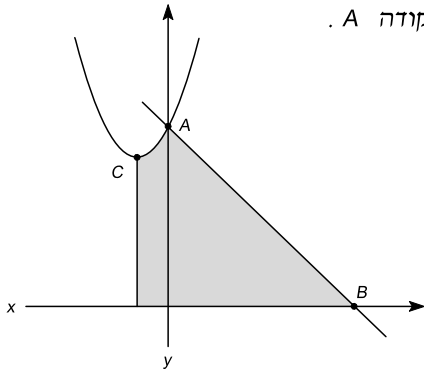
ולומר שזה בשם חבר שלו שמתבייש לשאול...



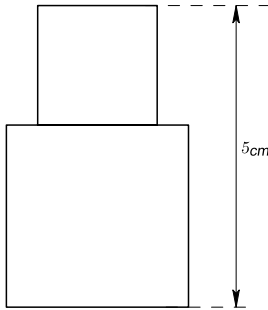
3. א. (1) $R = 5$ (יחידות אורך) (2) $(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 25$

ב. $B(9, 3)$ ג. $y = -\frac{1}{3}x + 15$ ד. $S_{\Delta AOB} = 12$ (יחידות ריבועיות)

4. א. $x \geq 0$ ב. $(0, 3)$ ג. $y = x + 4$ ד. ה. לא



5. הפרבולה $y = x^2 + 2x + 6$ חותכת את ציר y בנקודה A .
- א. מצא את השיעורים של הנקודה A .
- ב. דרך הנקודה A העבירו ישר ששיפועו -1 .
- (1) מצא את משוואת הישר.
- (2) הישר חותך את ציר x בנקודה B .
- מצא את השיעורים של הנקודה B .
- ג. המינימום של הפרבולה הוא בנקודה C .
- מצא את השיעורים של הנקודה C .
- ד. דרך הנקודה C העבירו אנך לציר x .
- חשב את השטח המוגבל על-ידי הפרבולה, על-ידי האנך, על-ידי ציר x , ועל-ידי הישר AB .



6. נתונה צורה המורכבת משני ריבועים המונחים זה על זה (הריבועים יכולים להיות שונים בגודלם או שווים בגודלם).
- גובה הצורה הוא 5cm .
- א. סמן ב- x את אורך הצלע של הריבוע התחתון, והבע באמצעות x את אורך הצלע של הריבוע העליון.
- ב. מצא מה צריך להיות x , כדי ששטח הצורה יהיה מינימלי.
- ג. חשב את השטח המינימלי של הצורה.

בהצלחה

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך, התרבות והספורט

המספר 142,857 הוא מספר מיוחד במינו. כאשר כופלים אותו ב- $2, 3, 4, 5$ ו- 6 ,

המכפלה תהיה מורכבת מהספרות מהן הוא מורכב, רק בסדר שונה:

$$\begin{aligned} 142857 \times 3 &= 428571 \\ 142857 \times 2 &= 285714 \\ 142857 \times 6 &= 857142 \\ 142857 \times 4 &= 571428 \\ 142857 \times 5 &= 714285 \end{aligned}$$

ועוד דבר: השבר $\frac{1}{7}$ הוא מחזורי מימין לנקודה העשרונית, עם אותן ספרות:

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857 \dots$$

השאלות

5. א. $A(0,6)$ ב. (1) $y = -x + 6$ (2) $B(6,0)$ ג. $C(-1,5)$ ד. $S = 23\frac{1}{3}$ (יחידות ריבועיות)

6. א. $(5-x)\text{cm}$ ב. $x_{\min} = 2.5\text{cm}$ ג. $S_{\min} = 12.5$ (סמ"ר)

פתרון מבחן 37

1. א. x - מספר העפרונות שדני רצה לקנות $\Leftarrow (20 - x)$ - מספר העטים שדני רצה לקנות.

מחיר עיפרון - 10 ש'. מחיר עט הוא 120% ממחיר עפרון, כלומר: 12 ש' $\Rightarrow 10 \cdot \frac{120}{100}$.

מחיר x עפרונות הוא $10x$. מחיר $(20 - x)$ עטים הוא $12(20 - x)$, לכן:

$$10x + 12(20 - x) = 214 \Rightarrow 10x + 240 - 12x = 214 \quad / - 240$$

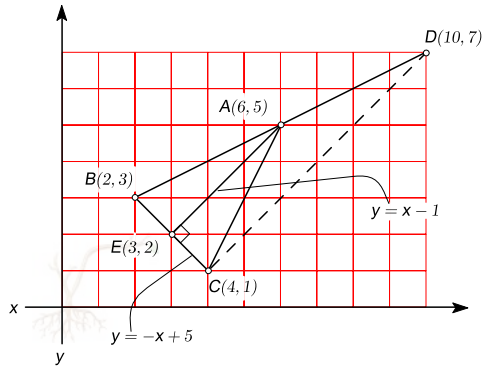
$$-2x = -26 \quad / : (-2) \Rightarrow x = 13 \Rightarrow 20 - x = 7 \Rightarrow \text{13 עפרונות, 7 עטים}$$

ב. מחיר עיפרון לאחר הנחה של 9% הוא 91% ממחירו שלפני ההנחה ($100\% - 9\% = 91\%$).

מחיר זה שווה ל- 9.1 ש' $\Rightarrow 10 \cdot \frac{91}{100}$. מחיר העפרונות והעטים יהיה לאחר ההנחה:

$$13 \cdot 9.1 + 12 \cdot 7 = 118.3 + 84 = 202.3 > 200 \Rightarrow \text{לא}$$

2. א.



ב. (1)

$$AE: y = x - 1 \Rightarrow m_{AE} = 1$$

$$AE \perp BC \Rightarrow m_{BC} = -1$$

$$B(2,3) \Rightarrow y - 3 = (-1)(x - 2)$$

$$y - 3 = -x + 2 \quad / + 3 \Rightarrow y = -x + 5$$

$$x - 1 = -x + 5 \quad / + x + 1$$

$$2x = 6 \quad / : 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = x - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow E(3,2)$$

(2)

$$(1) BE = EC \Rightarrow \frac{x_B + x_C}{2} = x_E \Rightarrow \frac{2 + x_C}{2} = 3 \Rightarrow 2 + x_C = 6 \Rightarrow x_C = 4$$

$$\frac{y_B + y_C}{2} = y_E \Rightarrow \frac{3 + y_C}{2} = 2 \Rightarrow 3 + y_C = 4 \Rightarrow y_C = 1 \Rightarrow C(4,1)$$

ג. (1)

$$m_{DC} = \frac{7-1}{10-4} = \frac{6}{6} = 1, \quad m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{DC} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow DC \perp BC \quad (\checkmark)$$

(2)

$$AE = \sqrt{(6-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}, \quad CD = \sqrt{(10-4)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$

$$h = EC = \sqrt{(3-4)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$S_{AECD} = \frac{(AE+DC) \cdot EC}{2} = \frac{(\sqrt{18} + \sqrt{72}) \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{AECD} = 9 \quad (\text{יחידות ריבועיות})$$

(1) גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם תיכון

$$R = OA = \sqrt{(6-9)^2 + (7-11)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \Rightarrow R = 5 \text{ (יחידות אורך)}$$

$$O(6,7), R^2 = 25 \Rightarrow (x-6)^2 + (y-7)^2 = 25$$

$$x_B = 9 \Rightarrow (9-6)^2 + (y-7)^2 = 25$$

$$3^2 + (y-7)^2 = 25 \Rightarrow 9 + (y-7)^2 = 25 \quad / -9$$

$$(y-7)^2 = 16 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow y-7 = \pm 4 \Rightarrow y_1 = 4+7 = 11, y_2 = -4+7 = 3$$

$$y_A = 11 \Rightarrow y_B = 3 \Rightarrow B(9,3)$$

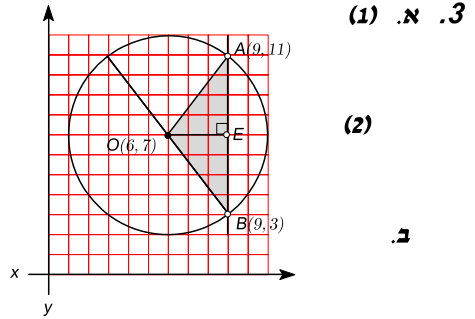
$$m_{OB} = \frac{7-3}{6-9} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

$$B(9,3) \Rightarrow y-3 = -\frac{4}{3}(x-9) \Rightarrow y-3 = -\frac{4}{3}x + 12 \quad / +3 \Rightarrow y = -1\frac{1}{3}x + 15$$

ד. AB מקביל לציר y, לכן הגובה OE מקביל לציר x. לכן:

$$AB = y_A - y_B = 11 - 3 = 8, h = OE = x_E - x_O = 9 - 6 = 3$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{AB \cdot OE}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} \Rightarrow S_{\triangle AOB} = 12 \text{ (יחידות ריבועיות)}$$



3. א. (1)

(2)

ב.

ג.

ב.

ג.

ד.

$$f(x) = 2\sqrt{x} + 3, x \geq 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot \sqrt{0} + 3 = 3 \Rightarrow (0,3)$$

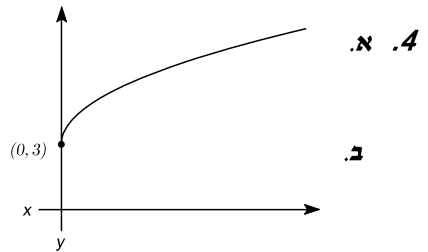
$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \sqrt{x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ לכל } x$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot \sqrt{1} + 3 = 5 \Rightarrow (1,5), m = f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$$y - 5 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 5 = x - 1 \quad / +5 \Rightarrow y = x + 4$$

ה. שורש ריבועי אינו יכול להיות שלילי.

$$2\sqrt{x} + 3 = 2 \quad / -3 \Rightarrow 2\sqrt{x} = -1 < 0 \Rightarrow \text{לא}$$



4. א.

ב.

ג.

ד.

קוסם הוא אדם ישר: הוא מבטיח לרמות אותך, והוא אכן מרמה אותך.

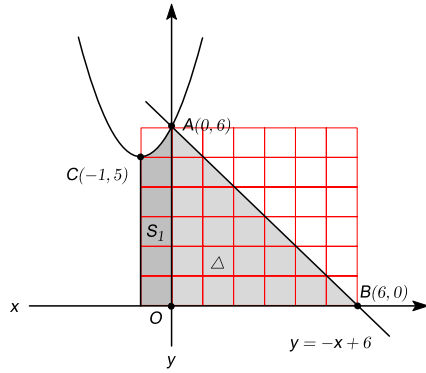
א. 5

$$y = x^2 + 2x + 6$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 0 + 6 = 6 \Rightarrow A(0, 6)$$

$$m = -1 \Rightarrow y - 6 = (-1)(x - 0) / + 6$$

$$\Rightarrow y = -x + 6$$



ב. 1

2

$$y = 0 \Rightarrow -x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow B(6, 0)$$

ג.

$$y' = 2x + 2 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$y = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 6 = 1 - 2 + 6 = 5 \Rightarrow C(-1, 5)$$

ד.

$$S_1 = \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 6) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 6x \right) \Big|_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{-1}{3} + 1 - 6 \right) = \frac{1}{3} - 1 + 6 = \frac{1}{3} + 5 = 5\frac{1}{3}$$

$$AO = y_A - y_O = 6 - 0 = 6, \quad BO = x_B - x_O = 6 - 0 = 6, \quad S_{\Delta} = \frac{AO \cdot BO}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$$

$$S = S_1 + S_{\Delta} = 5\frac{1}{3} + 18 \Rightarrow S = 23\frac{1}{3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$

א. 6

$$x + a = 5 \text{ cm} \Rightarrow a = (5 - x) \text{ cm}$$

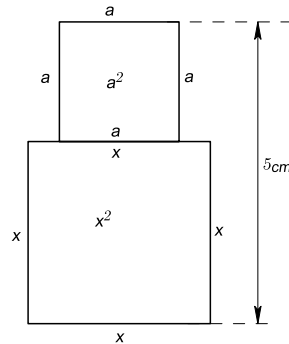
$$S = x^2 + a^2 = x^2 + (5 - x)^2 = x^2 + 25 - 10x + x^2$$

$$S(x) = 2x^2 - 10x + 25$$

$$S'(x) = 4x - 10 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$S''(x) = 4 \Rightarrow S''(2.5) = 4 > 0 \Rightarrow \min \checkmark$$

$$\Rightarrow x_{\min} = 2.5 \text{ cm}$$



ב.

ג.

$$S_{\min} = S(2.5) = 2 \cdot 2.5^2 - 10 \cdot 2.5 + 25 = 12.5 - 25 + 25 \Rightarrow S_{\min} = 12.5 \text{ (סמ"ר)}$$